平成20年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(後期日程)
数学I・数学II・数学A・数学B(平成20年3月14日)80分

1 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = 2x^2 + ax + b$ の最小値は -8 であり，不等式 $2x^2 + ax + b < 0$ の解が $-1 < x < p$ であるとき，定数 a，b および p の値を求めよ。

(2) 初項 a_1，公比 r $(r \neq 0)$ の等比数列 $\{a_n\}$ が $a_4 - 5a_3 + 8a_2 - 4a_1 = 108$，$a_2 - a_1 = 27$ を満たしている。

(a) a_1 と r の値を求めよ。

(b) $a_n > 10^6$ となる n の取り得る値の範囲を求めよ。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 関数 $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (at^2 + bt + c)\,dt$　$(a > 0)$ は $x = 1$ と $x = 3$ で極値をとり，極大値が20である。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 点 $(0,\ k)$ を通り，曲線 $y = f(x)$ に接する直線がちょうど2本引けるとき，k の値を求めよ。

3 $\mathrm{AB} = 7$，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CA} = 6$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，点A，B，Cを中心とする3つの円 C_1，C_2，C_3 があり，C_1 と C_2，C_2 と C_3，C_3 と C_1 はそれぞれ点D，E，Fにおいて外接しているとする。このとき，点D，E，Fにおける円の接線は1点Iで交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 四角形IFAD，四角形IDBE，四角形IECFの面積比を求めよ。

(2) 直線AIと辺BCとの交点をGとするとき，$\triangle\mathrm{IGE}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積比を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次方程式

$$2x^2+ax+b=-8 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2+ax+b+8=0$$

は，重解をもつので，$D=0$ より

$$a^2-4{\cdot}2(b+8)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2-8(b+8)=0 \quad \cdots①$$

2 次不等式 $2x^2+ax+b<0$ の解が $-1<x<p$ であるから，2 次方程式 $2x^2+ax+b=0$ は $-1,\ p\ (p>-1)$ を解にもつので，2 次方程式の解と係数の関係により

$$-1+p=-\frac{a}{2},\ \ -1{\cdot}p=\frac{b}{2}$$

したがって　$a=-2(p-1)$，$b=-2p$　$\cdots②$

② を ① に代入すると

$$\{-2(p-1)\}^2-8(-2p+8)=0$$

整理すると　$p^2+2p-15=0$

ゆえに　$(p-3)(p+5)=0$

$p>-1$ より　$\boldsymbol{p=3}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{a=-4,\ b=-6}$

(2) (a) $a_2=a_1r$，$a_3=a_1r^2$，$a_4=a_1r^3$ であるから，これらを

$$a_4-5a_3+8a_2-4a_1=108,\ \ a_2-a_1=27$$

に代入すると

第 1 式から　$a_1(r^3-5r^2+8r-4)=108$

ゆえに　$a_1(r-1)(r-2)^2=108$　$\cdots①$

第 2 式から　$a_1(r-1)=27$　$\cdots②$

② を ① に代入して　$27(r-2)^2=108$

整理して　$r^2-4r=0$

したがって　$r(r-4)=0$

$r\neq0$ より　$\boldsymbol{r=4}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{a_1=9}$

(b) (a) の結果により　$a_n = 9 \cdot 4^{n-1}$

ゆえに $9 \cdot 4^{n-1} > 10^{n-1}$ となる n の取り得る値の範囲を求めればよい.

この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 9 \cdot 4^{n-1} > \log_{10} 10^6$$

ゆえに　$2\log_{10} 3 + 2(n-1)\log_{10} 2 > 6$

整理して　$(n-1)\log_{10} 2 > 3 - \log_{10} 3$

したがって　$n > \dfrac{3 - \log_{10} 3}{\log_{10} 2} + 1 = \dfrac{3 - 0.4771}{0.3010} + 1 = 9.3\cdots$

よって　$\boldsymbol{n \geqq 10}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (at^2 + bt + c)\, dt$ を微分すると　$f'(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 0$ の解が $x = 1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$1 + 3 = -\frac{b}{a},\ \ 1 \cdot 3 = \frac{c}{a}$$

ゆえに　$b = -4a$，$c = 3a$　$\cdots$①

このとき　$f'(x) = ax^2 - 4ax + 3a$

$\qquad\qquad = a(x-1)(x-3)$

$a > 0$ であるから，増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

① より，極大値は

$$f(1) = \int_{-1}^{1} (at^2 - 4at + 3a)\, dt$$

$$= a\left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t\right]_{-1}^{1} = \frac{20}{3}a$$

$f(1) = 20$ であるから　$\dfrac{20}{3}a = 20$　よって　$\boldsymbol{a = 3}$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{b = -12,\ c = 9}$

(2) (1) の結果により

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^{x} (3t^2 - 12t + 9)\,dt \\
&= \Big[\ t^3 - 6t^2 + 9t\ \Big]_{-1}^{x} \\
&= x^3 - 6x^2 + 9x + 16
\end{aligned}
$$

接点の座標を $(\alpha,\ \alpha^3-6\alpha^2+9\alpha+16)$ とすると，接線の傾きは $3\alpha^2-12\alpha+9$ となるから，その方程式は

$$y - (\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha + 16) = (3\alpha^2 - 12\alpha + 9)(x - \alpha)$$

この直線が $(0,\ k)$ を通るから　　$k = -2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 16$　$\cdots$②

点 $(0,\ k)$ から 2 本の接線が引けるので，② を満たす α が 2 個ある．

このとき，$g(x) = -2x^3 + 6x^2 + 16$ とおくと，方程式 $g(x) = k$ が異なる 2 つの実数解をもつので，$g(x)$ について

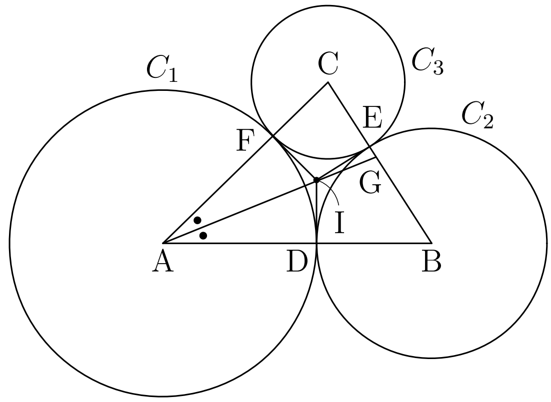
$$g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$$

$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	極小 16	$\nearrow$	極大 24	$\searrow$

よって，求める k の値は，$y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が異なる 2 つの共有点をもつときであるから　$\boldsymbol{k = 16,\ 24}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C_1，C_2，C_3 の半径を，それぞれ r_1，r_2，r_3 とすると



$$r_1 + r_2 = 7$$
$$r_2 + r_3 = 5$$
$$r_3 + r_1 = 6$$

これを解いて

$r_1 = 4$，$r_2 = 3$，$r_3 = 2$

I は △ABC の内心なので

$r = \mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}$

とおくと

四角形 IFAD $= 4r$，四角形 IDBE $= 3r$，四角形 IECF $= 2r$

よって　**四角形 IFAD : 四角形 IDBE : 四角形 IECF = 4 : 3 : 2**

(2) 線分 AG は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BG} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}} \times \mathrm{BC} = \frac{7}{7+6} \times 5 = \frac{35}{13}$$

ゆえに　$\mathrm{GE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BG} = 3 - \dfrac{35}{13} = \dfrac{4}{13}$

したがって　$\triangle\mathrm{IGE} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{GE}\cdot r = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{13}\cdot r = \dfrac{2}{13}r$

また　$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{IAB} + \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA}$

$$= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot = 9r$$

よって　$\triangle\mathrm{IGE} : \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{2}{13}r : 9r =$ **2 : 117**