受験番号		氏名	

平成20年度　崇城大学一般入学試験問題(後期日程)
数　　学(平成20年3月14日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$～$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号 1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○			○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成 20 年度　崇城大学一般入学試験問題 (後期日程)
数学 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - 2(a^2 - 1)x + 4$ の頂点が xy 座標平面の第 1 象限にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $x^3 + y^3 = -7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3) $\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$，$\log_3 7 = c$ とするとき，$\log_{175} 3.5$ を a，b，c を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = x(1 - |\,x\,|)$ について，次の各問に答えよ。

(1) この曲線上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線とこの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC において，辺 AB の中点を L，線分 CL の中点を M，AM の延長が辺 BC と交わる点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $|\,\vec{a}\,| = 1$，$|\,\vec{b}\,| = 2\sqrt{3}$，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\angle$C の大きさを求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ は公差 -3 の等差数列であり，数列 $\{b_n\}$ が次の条件を満たしているとき，次の各問に答えよ。

$$b_1 = 3,\ b_2 = 23,\ b_{n+1} - b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_{n+1} - b_n$ を求めよ。

(2) b_n の値を最大にする自然数 n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ において，関数 $f(\theta) = \cos^2\theta + a\cos\theta + 1$ の最小値が正であるときの定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = x^2 - 2(a^2-1)x + 4$ を変形すると

$$y = \{x - (a^2-1)\}^2 - a^4 + 2a^2 + 3$$

ゆえに，放物線の頂点は　$(a^2-1, -a^4+2a^2+3)$

頂点が第1象限にあるので

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ -a^4 + 2a^2 + 3 > 0 \end{cases}$$

第1式から　$(a+1)(a-1) > 0$

ゆえに　$a < -1,\ 1 < a$　$\cdots$①

第2式から　$a^4 - 2a^2 - 3 < 0$

整理して　$(a^2+1)(a^2-3) < 0$

$a^2 + 1 > 0$ より　$a^2 - 3 < 0$

ゆえに　$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\sqrt{3} < a < -1,\ 1 < a < \sqrt{3}}$

(2)
$$x^3 + y^3 = (x+y)\{(x+y)^2 - 3xy\} = -7$$

x，y は整数であるから，$x+y$，$(x+y)^2 - 3xy$ は整数であり，次の場合分けをする．

(i) $x + y = 1$ のとき，$(x+y)^2 - 3xy = -7$　ゆえに　$xy = \dfrac{8}{3}$
これは，x，y が整数であることに反する．

(ii) $x + y = -1$ のとき，$(x+y)^2 - 3xy = 7$　ゆえに　$xy = -2$
このとき，x，y を解とする2次方程式は　$t^2 + t - 2 = 0$
これを解いて　$(x,\ y) = (1, -2),\ (-2,\ 1)$

(iii) $x + y = 7$ のとき，$(x+y)^2 - 3xy = -1$　ゆえに　$xy = \dfrac{50}{3}$
これは，x，y が整数であることに反する．

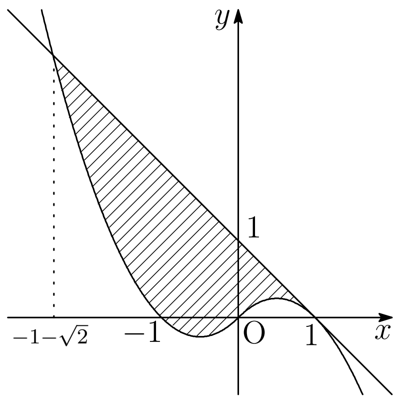
(iv) $x + y = -7$ のとき，$(x+y)^2 - 3xy = 1$　ゆえに　$xy = 16$
このとき，x，y を解とする2次方程式は　$t^2 + 7t + 16 = 0$
この2次方程式は，整数解をもたない．

(i)〜(iv) から　$\boldsymbol{(x,\ y) = (1, -2),\ (-2,\ 1)}$

(3) $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{a}$ であるから

$$\log_{175} 3.5 = \frac{\log_3 3.5}{\log_3 175} = \frac{\log_3 \dfrac{7}{2}}{\log_3(5^2\cdot 7)} = \frac{\log_3 7 - \log_3 2}{2\log_3 5 + \log_3 7}$$
$$= \frac{c - \dfrac{1}{a}}{2b + c} = \boldsymbol{\frac{ac - 1}{a(2b + c)}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 曲線 $y = x(1 - |\,x\,|)$ は



$x \geqq 0$ のとき　$y = x(1 - x)$
$= -x^2 + x$

$x < 0$ のとき　$y = x(1 + x)$
$= x^2 + x$

$y = -x^2 + x$ を微分して　$y' = -2x + 1$
$x = 1$ のとき　　$y' = -1$

点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは -1 であるから，この点における接線の方程式は

$$y - 0 = -1(x - 1)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{y = -x + 1}$

(2) 接線とこの直線の接点以外の共有点の x 座標は，$x < 0$ において，2 次方程式

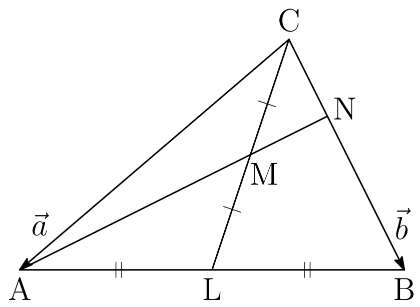
$$-x + 1 = x^2 + x \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

を解いて　$x = -1 - \sqrt{2}$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1-\sqrt{2}}^{0} \{(-x + 1) - (x^2 + x)\}\,dx + \int_0^1 \{(-x + 1) - (-x^2 + x)\}\,dx$$
$$= \int_{-1-\sqrt{2}}^{0} (-x^2 - 2x + 1)\,dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-1-\sqrt{2}}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

3 (1) L は線分 AB の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

M は線分 CL の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad \cdots ①$$

また，M は線分 AN 上の点であるから，① より

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CN}} \quad \cdots ② \qquad \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{CM}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{CN}},\ (s+t=1)$$

①，② より

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{4}\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{3}\vec{b}}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{CN}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}}$

(2) (1) の結果を $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{3}$ に代入して

$$\frac{1}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3}$$

さらに，$|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ を代入して

$$\frac{1}{9}(2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3} \quad \text{これを解いて} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$$

ゆえに $\cos C = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{1\times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって $\boldsymbol{\angle \mathrm{C} = 30^\circ}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 漸化式から $b_2 - b_1 = a_1$ であるから　$a_1 = 23 - 3 = 20$

数列 $\{a_n\}$ は，初項が 20，公差 -3 の等差数列であるから

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \frac{1}{2}n\{2\cdot 20 + (n-1)\cdot(-3)\} \\ &= \frac{1}{2}n(-3n + 43) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}n(-3n + 43)}$

(2) (1) の結果から

$n \leqq 14$ のとき　$b_{n+1} - b_n > 0$　すなわち　$b_{n+1} > b_n$

$n \geqq 15$ のとき　$b_{n+1} - b_n < 0$　すなわち　$b_{n+1} < b_n$

よって　b_n の値を最大にする自然数 n は　**15**

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\cos\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ より　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

したがって，$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ における関数

$$y = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$$

の最小値が正であればよい．したがって，次の 3 つの場合分けを行う．

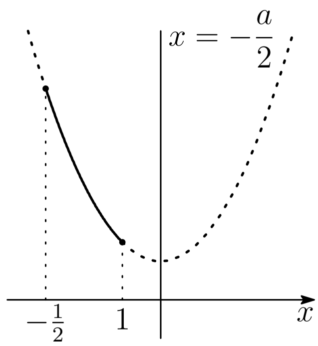
［1］$1 < -\dfrac{a}{2}$　すなわち　$a < -2$ のとき

y は $x = 1$ で最小値をとるから

$$1^2 + a \cdot 1 + 1 > 0$$

ゆえに　　$a > -2$

これは，$a < -2$ に反するので不適．



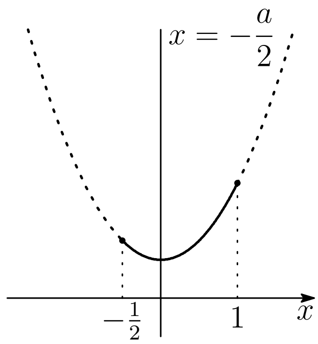
［2］$-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$　すなわち　$-2 \leqq a \leqq 1$ のとき

y は $x = -\dfrac{a}{2}$ で最小値をとるから

$$1 - \frac{a^2}{4} > 0$$

ゆえに　　$-2 < a < 2$

条件に注意して　$-2 < a \leqq 1$



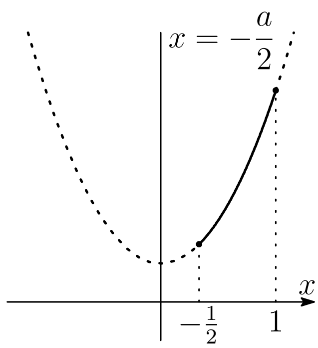
［3］$-\dfrac{a}{2} < -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a > 1$ のとき

y は $x = -\dfrac{1}{2}$ で最小値をとるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$$

ゆえに　　$a < \dfrac{5}{2}$

条件に注意して　$1 < a < \dfrac{5}{2}$



［1］～［3］より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-2 < a < \dfrac{5}{2}}$