平成20年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学I・数学II (2日目：平成19年11月10日) 60分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2次関数 $y = ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1$ の最大値が3であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\triangle$ABCにおいて，AB $= 5$，BC $= 6$，CA $= 7$である。$\cos A$の値と $\triangle$ABC の面積を求めよ。

(3) 連立不等式 $|\,x - 2y\,| \leqq 1$，$x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を図示せよ。

$\boxed{2}$ 3点 $(0,\ 0)$，$(8,\ 0)$，$(4, -2)$ を通る円 C と直線 $y = 2x + a$ が接している。次の各問に答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。

(2) 定数 a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 2つの放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x(x-3)$ と $y = x^2 + ax + b$ とは x 軸上の2点で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) 直線 $x = t$ $(0 < t < 3)$ とこの2つの放物線との交点をそれぞれP，Qとし，Oは原点とする。$\triangle$OPQの面積の最大値とそのときの定数 t の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次関数 $y = ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1$ は最大値をとるので，x^2 の係数 a は

$$a < 0$$

また，その最大値が 3 であるから，2 次方程式

$$ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1 = 3$$

すなわち　$ax^2 - 4ax + a^2 + 5a - 2 = 0$

は重解をもつので，係数について

$D/4 = 0$ より　$(-2a)^2 - a{\cdot}(a^2 + 5a - 2) = 0$

整理して　$a^3 + a^2 - 2a = 0$

ゆえに　$a(a+2)(a-1) = 0$

$a < 0$ から　$\boldsymbol{a = -2}$

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AB}} = \frac{7^2 + 5^2 - 6^2}{2{\cdot}7{\cdot}5} = \boldsymbol{\frac{19}{35}}$$

$\sin A > 0$ であるから

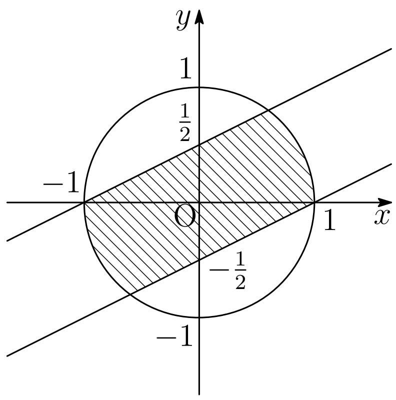
$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{35}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{19}{35}\right)\left(1 - \frac{19}{35}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{54}{35} \times \frac{16}{35}} = \frac{3\sqrt{6} \times 4}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{35}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AB}\sin A = \dfrac{1}{2}{\cdot}7{\cdot}5{\cdot}\dfrac{12\sqrt{6}}{35} = \boldsymbol{6\sqrt{6}}$

(3) $|\,x-2y\,| \leqq 1$ より

$$-1 \leqq x-2y \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

これと $x^2+y^2 \leqq 1$ を同時に満たす領域であるから，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 円 C の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 $(0,\ 0)$ を通るから　　$n=0$

点 $(8,\ 0)$ を通るから　　$8^2+8l+n=0$

点 $(4, -2)$ を通るから　　$4^2+(-2)^2+4l-2m+n=0$

整理すると　　$n=0,\ 8l+n+64=0,\ 4l-2m+n+20=0$

これを解くと　　$l=-8,\ m=-6,\ n=0$

よって，円 C の方程式は

$$x^2+y^2-8x-6y=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-4)^2+(y-3)^2=5^2}$$

(2) 直線 $y=2x+a$ $(2x-y+a=0)$ は，円 C に接するので，C の中心 $(4,\ 3)$ とこの直線の距離は，円の半径 5 に等しいので

$$\frac{|\,2\cdot4-3+a\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-5\pm5\sqrt{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x(x-3)$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式

$$-\frac{1}{2}x(x-3)=0$$

の解であるから，これを解いて　$x=0,\ 3$

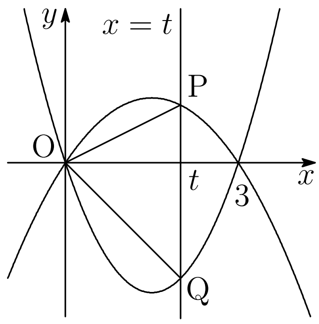
放物線 $y=x^2+ax+b$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式

$$x^2+ax+b=0$$

の解であり，これが 0，3 を解にもつので，解と係数の関係により

$$0+3=-a,\ 0\cdot3=b \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=-3,\ b=0}$$

(2) 右の図のように，P の y 座標は $-\dfrac{1}{2}t(t-3)$，Q の y 座標は t^2-3t であるから



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=-\frac{1}{2}t(t-3)-(t^2-3t)\\&=-\frac{3}{2}t(t-3)\end{aligned}$$

よって　$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}t\times\mathrm{PQ}\\&=\frac{1}{2}t\times\left\{-\frac{3}{2}t(t-3)\right\}\\&=-\frac{3}{4}t^2(t-3)\end{aligned}$

$\triangle\mathrm{OPQ}=f(t)$ とおくと　$f(t)=-\dfrac{3}{4}(t^3-3t^2)\quad(0<t<3)$

$f(t)$ を微分すると　$f'(t)=-\dfrac{3}{4}(3t^2-6t)=-\dfrac{9}{4}t(t-2)$

したがって，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{t=2}$ のとき**最大値** $f(2)=-\dfrac{3}{4}(2^3-3\cdot2^2)=\mathbf{3}$ をとる．