平成 20 年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学 I・数学 II (1 日目：平成 19 年 11 月 9 日) 60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $(x-1)(x-4)=|x-2|$ を解け。

(2) $\angle$A が鈍角である $\triangle$ABC において，AB $=4$，AC $=2$ で，面積が $\sqrt{7}$ である。辺 BC の長さを求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2-8x+10$ と直線 $y=-3x+6$ の交点を P，Q とし，O は原点とする。$\triangle$OPQ の面積を求めよ。

2 連立不等式 $|2x|+|y| \leqq 4$，$xy \leqq 0$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D と不等式 $y \geqq x^2+1$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

3 放物線 $y=4-x^2$ $(0<x<2)$ 上の点 P$(a,\ 4-a^2)$ における接線が x 軸と交わる点を Q とし，O は原点とする。次の各問に答えよ。

(1) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 2 つの線分 OP，PQ の長さが等しいとき，$\cos\angle$POQ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $\underline{x \geqq 2 \text{ のとき}}$，方程式は

$$(x-1)(x-4) = x-2$$

整理して　$x^2 - 6x + 6 = 0$

$x \geqq 2$ より　$x = 3 + \sqrt{3}$

(ii) $\underline{x < 2 \text{ のとき}}$，方程式は

$$(x-1)(x-4) = -(x-2)$$

整理して　$x^2 - 4x + 2 = 0$

$x < 2$ より　$x = 2 - \sqrt{2}$

よって　$\boldsymbol{x = 3 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{2}}$

(2) 三角形の面積の公式 $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ に $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{7}$，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 2$ を代入すると

$$\sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sin A \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

これを $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2 A = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 A = \frac{9}{16}$$

$\angle\mathrm{A}$ は鈍角であるから，$\cos A < 0$ より　$\cos A = -\sqrt{\dfrac{9}{16}} = -\dfrac{3}{4}$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\ &= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= 4 + 16 + 12 = 32\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\mathrm{BC} = \sqrt{32} = \boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(3) 放物線 $y=x^2-8x+10$ と直線 $y=-3x+6$ の共有点の x 座標は，

2 次方程式　$x^2-8x+10=-3x+6$

の解であり，これを解いて　$x=1,\ 4$

これらを $y=-3x+6$ に代入すると，2 つの交点 P，Q の座標は

$$(1,\ 3),\ (4,-6)$$

このとき　$\mathrm{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(-6-3)^2}=3\sqrt{10}$

原点 O から直線 $y=-3x+6$ $(3x+y-6=0)$ に下ろした垂線の長さ d は

$$d=\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

よって　$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot d=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\mathbf{9}$

2 (1) $xy\leqq 0$ から，次の 2 つの場合分けをする．

(i) $x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき，$|2x|+|y|\leqq 4$ は

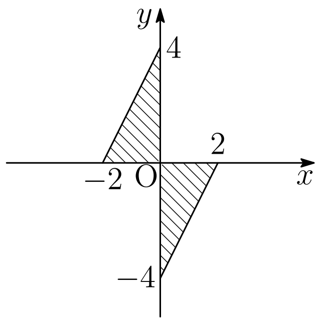
$$2x+(-y)\leqq 4$$

よって　$y\geqq 2x-4$

(ii) $x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき，$|2x|+|y|\leqq 4$ は

$$-2x+y\leqq 4$$

よって　$y\leqq 2x+4$



(i),(ii) から，D の表す領域は，右の図のとおりである．
ただし，境界線を含む．

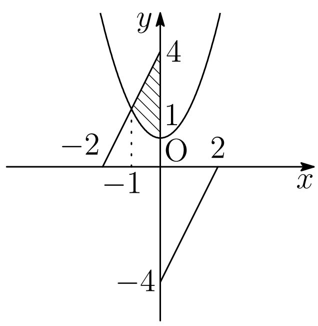
(2) $y=x^2+1$ と線分 $y=2x+4$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ の共有点の x 座標は，方程式 $x^2+1=2x+4$ の解であるから

整理して　$x^2-2x-3=0$

ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$

$-2\leqq x\leqq 0$ より　$x=-1$

したがって，領域 D と不等式 $y=x^2+1$ の表す領域の共通部分は，右の図の斜線部分である．



よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0} \{(2x+4)-(x^2+1)\}dx \\
&= \int_{-1}^{0} (-x^2+2x+3)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0} = \mathbf{\frac{5}{3}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=4-x^2$ を微分すると　$y'=-2x$

点 $\mathrm{P}(a,\ 4-a^2)$ における接線の傾きは　$-2a$

したがって，P における接線の方程式は

$$y-(4-a^2)=-2a(x-a)$$

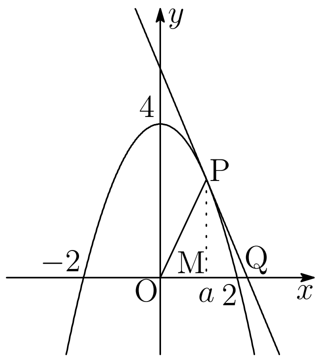
ゆえに　　$y=-2ax+a^2+4$

Q において $y=0$ であるから

$$0=-2ax+a^2+4 \quad 0<a<2 \text{ に注意して} \quad x=\frac{a^2+4}{2a}$$

よって，Q の座標は　　$\left(\boldsymbol{\frac{a^2+4}{2a}},\ \mathbf{0}\right)$

(2) $\mathrm{OP}=\mathrm{PQ}$ のとき，P から x 軸に下ろした垂線を PM とすると，M は OQ の中点であるから



$$a=\frac{1}{2}\times\frac{a^2+4}{2a}$$

$$a^2=\frac{4}{3}$$

$a>0$ より　　　$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

したがって，P の座標は　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{8}{3}\right)$

ゆえに　　$\mathrm{OP}^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2=\dfrac{76}{9}$

$\mathrm{OP}>0$ であるから　　$\mathrm{OP}=\dfrac{2\sqrt{19}}{3}$

$\angle\mathrm{POQ}$ は，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角であるから，OP および P の x 座標より

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\div\frac{2\sqrt{19}}{3}=\mathbf{\frac{\sqrt{57}}{19}}$$