平成19年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(前期日程)2日目
数学I・数学II・数学A・数学B(平成19年2月1日)80分

1 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 12 = 0$ が $\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$ (i は虚数単位) を解にもつとき，実数 a，b の値を求めよ。

(2) 6個の数字0，1，1，2，2，3を全部使って6桁の整数を作る。

(a) 6桁の整数はいくつできるか。

(b) 200000以上の偶数はいくつできるか。

2 直線 $y = x$ 上を動く点Pから放物線 $y = x^2 + 1$ に2本の接線を引き，接点をQ，Rとする。線分QRの中点M$(X,\ Y)$とするとき，Y の最小値を求めよ。

3 平面上に△ABCがある。この平面上の点Pに対してAPの中点をQ，BQの中点をR，CRの中点をSとする。2点P，Sが一致しているとき，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △PQRと△ABCとの面積比を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}=1+\sqrt{3}\,i$$

これが方程式の解であるから

$$(1+\sqrt{3}\,i)^3+a(1+\sqrt{3}\,i)^2+b(1+\sqrt{3})-12=0$$

ゆえに　$-8+a(-2+2\sqrt{3}\,i)+b(1+\sqrt{3}\,i)-12=0$

整理して　$(-2a+b-20)+(2a+b)\sqrt{3}\,i=0$

a，b は実数であるから　$-2a+b-20=0$，$2a+b=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=10}$

(2) (a) 6 個の数字 0，1，1，2，2，3 の並べ方は，

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}=180 \quad (通り)$$

数字 0 を一番左に並べ，残りの数字 1，1，2，2，3 の並べ方は

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30 \quad (通り)$$

よって，6 桁の整数は　$180-30=150$ (通り)

(b) 200000 以上の偶数は，最高位が 2 または 3，一の位が 0 または 2 であるから，次の 4 つの場合を求めればよい．

［1］ 2 □□□□ 0 の場合

間に 1，1，2，3 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ (通り)

［2］ 2 □□□□ 2 の場合

間に 0，1，1，3 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$ (通り)

［3］ 3 □□□□ 0 の場合

間に 1，1，2，2 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ (通り)

［4］ 3 □□□□ 2 の場合

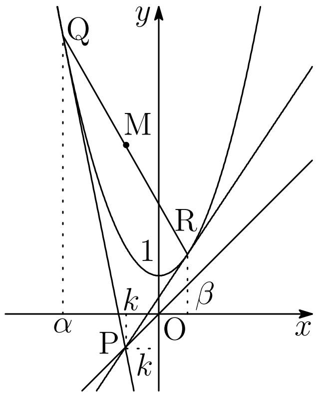
間に 0，1，1，2 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$ (通り)

［1］～［4］から　$12+12+6+12=\mathbf{42}$ (通り)

$\boxed{\mathbf{2}}$ P の座標を $(k,\ k)$ とする．$y = x^2 + 1$ を微分すると　$y' = 2x$

接点の座標を $(t,\ t^2+1)$ とすると，接線の傾きは $2t$ となるから，その方程式は

$$y - (t^2+1) = 2t(x-t)$$



この直線が点 $\mathrm{P}(k,\ k)$ を通るから

$$k - (t^2+1) = 2t(k-t)$$

よって　　$t^2 - 2kt + k - 1 = 0$　　$\cdots$ ①

この t に関する 2 次方程式の判別式 D は

$$\begin{aligned} D/4 &= (-k)^2 - (k-1) = k^2 - k + 1 \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．

この 2 つの解を α，β とし，これらに対応する点をそれぞれ $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2+1)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2+1)$ とする．また解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = k - 1$$

であるから

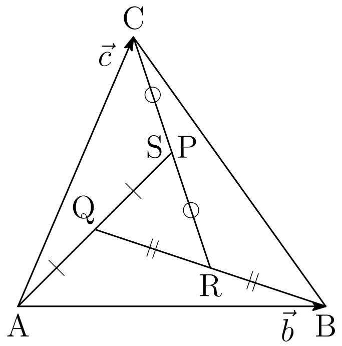
$$\begin{aligned} Y &= \frac{(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 2}{2} \\ &= \frac{(2k)^2 - 2(k-1) + 2}{2} = 2k^2 - k + 2 \\ &= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

よって，Y の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{15}{8}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とおく．

Q は AP の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\vec{p}$$



R は BQ の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{p}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{p}\end{aligned}$$

S は CR の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})\\&=\frac{1}{2}\left\{\vec{c}+\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{p}\right)\right\}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{p}\end{aligned}$$

2 点 P，S が一致しているとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ であるから

$$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{p}$$

よって　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+4\vec{c}}{7}}$

(2) $\mathrm{QA}=\mathrm{QS}$，$\mathrm{QB}=2\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{QAB}=2\times\triangle\mathrm{PQR}\quad\cdots①$$

$\mathrm{RB}=\mathrm{RQ}$，$\mathrm{RC}=2\mathrm{RP}$

$$\triangle\mathrm{RBC}=2\times\triangle\mathrm{PQR}\quad\cdots②$$

$\mathrm{PC}=\mathrm{PR}$，$\mathrm{PA}=2\mathrm{PQ}$ であるから

$$\triangle\mathrm{PCA}=2\times\triangle\mathrm{PQR}\quad\cdots③$$

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{QAB}+\triangle\mathrm{RBC}+\triangle\mathrm{PCA}+\triangle\mathrm{PQR}$ であるから ①，②，③ より

$$\triangle\mathrm{ABC}=7\times\triangle\mathrm{PQR}$$

よって　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=1:7}$