受験番号		氏名	

平成19年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数　　学(平成19年2月1日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　　　　　　　　　　　　　　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**ソフトウェアサイエンス学科**	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成 19 年度　崇城大学一般入学試験問題 (前期日程)2 日目
数　　学

1 次の各問に答えよ。

(1) $|\,x-5\,|+|\,2x-1\,|=10$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において，3 辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 2，$\sqrt{3}$，x とする。x を動かすとき，$\angle$A の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(3) 円 $x^2+y^2-4x-8y+k=0$ が直線 $y=x$ から長さ 4 の線分を切り取るとき，定数 k の値を求めよ。

2 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標が -1，2 であり，この 2 つの放物線で囲まれた図形の面積が 9 であるとき，$f(x)$ を求めよ。

3 x，y，z を自然数とする。$5 \leqq x(y+z) \leqq 10$ を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

4 平面上に，線分 AB，AC があり，AB $=7$，AC $=10$ である。点 D は線分 AB 上の点で，AD $=3$ であり，2 点 B，D は C を中心とする同一円周上にある。このとき，この円の半径および $\angle$BAC の大きさを求めよ。

5 a は正の定数とする。放物線 $y=a(x-1)^2+2$ と，この放物線の頂点を通り y 軸に平行な直線，およびこの放物線の傾き 2 の接線で囲まれた図形の面積が 3 であるとき，a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) [1] $x < \dfrac{1}{2}$ のとき，$|x-5| = -x+5$，$|2x-1| = -2x+1$ であるから

方程式は　$(-x+5)+(-2x+1)=10$

これを解いて　$x = -\dfrac{4}{3}$

これは，$x < \dfrac{1}{2}$ を満たすから，解である．

[2] $\dfrac{1}{2} \leqq x < 5$ のとき，$|x-5| = -x+5$，$|2x-1| = 2x-1$ であるから

方程式は　$(-x+5)+(2x-1)=10$

これを解いて　$x=6$

これは，$\dfrac{1}{2} \leqq x < 5$ に反するから，解ではない。

[3] $5 \leqq x$ のとき，$|x-5| = x-5$，$|2x-1| = 2x-1$ であるから

方程式は　$(x-5)+(2x-1)=10$

これを解いて　$x = \dfrac{16}{3}$

これは，$5 \leqq x$ を満たすから，解である．

したがって，求める解は　　$\boldsymbol{x = -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{16}{3}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\ &= \frac{x^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2x\cdot 2} = \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ であるから，$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$

ゆえに，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 2 \quad \cdots ②$$

よって　　$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2$

上式で，等号が成り立つのは　$x = \dfrac{1}{x}$　すなわち　$x=1$ のときである．

①，② から　　$\cos A \geqq \dfrac{1}{4}\times 2 = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$A \leqq 60°$

よって，**$x=1$ のとき $\angle$A の最大値は $60°$** である．

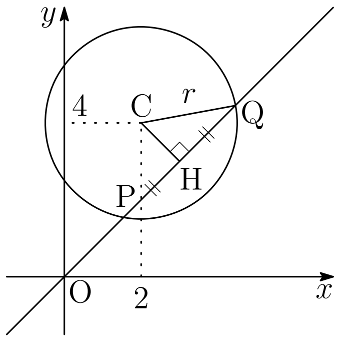
(3) 円の方程式 $x^2+y^2-4x-8y+k=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-4)^2=20-k$$

ゆえに，中心が C(2, 4) で，半径 r が $\sqrt{20-k}$ の円である．

点 C と直線 $x-y=0$ の距離 CH は

$$\mathrm{CH}=\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$



円と直線の共有点を P，Q とすると

PQ $=4$ より　PH $=$ HQ $=2$

直角三角形 CHQ において

$$r^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{HQ}^2$$

であるから

$$20-k=(\sqrt{2})^2+2^2 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{k=14}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=x^2$ との交点の x 座標が -1，2 であるから

$$f(-1)-(-1)^2=0,\ f(2)-2^2=0$$

$f(x)-x^2$ は x の 2 次式で，$x+1$，$x-2$ を因数にもち，定数 k を用いて

$$f(x)-x^2=k(x+1)(x-2) \quad \cdots ①$$

とおける．ゆえに，この 2 つの放物線で囲まれた図形の面積が 9 であるから

$$\int_{-1}^{2}|\,f(x)-x^2\,|\,dx=9$$

① を上式に代入して

$$\int_{-1}^{2}|\,k(x+1)(x-2)\,|\,dx=9$$

$$-|\,k\,|\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx=9$$

$$-|\,k\,|\times\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=9$$

$$\frac{9}{2}|\,k\,|=9$$

よって，$k=\pm 2$．これを ① に代入して

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x-4} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{f(x)=-x^2+2x+4}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y+z \geqq 2$ であるから $x(y+z) \leqq 10$ であるから $x \leqq 5$

［1］ $x=1$ のとき，$5 \leqq y+z \leqq 10$

$$
\begin{aligned}
(y,z)=&(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),\\
&(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),\\
&(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),\\
&(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),\\
&(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1),\\
&(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)
\end{aligned}
$$

以上の 39 組

［2］ $x=2$ のとき，$\dfrac{5}{2} \leqq y+z \leqq 5$　すなわち　$3 \leqq y+z \leqq 5$

$$
\begin{aligned}
(y,z)=&(1,2),(2,1),\\
&(1,3),(2,2),(3,1)\\
&(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)
\end{aligned}
$$

以上の 9 組

［3］ $x=3$ のとき，$\dfrac{5}{3} \leqq y+z \leqq \dfrac{10}{3}$　すなわち　$2 \leqq y+z \leqq 3$

$(y,z)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の 3 組

［4］ $x=4$ のとき，$\dfrac{5}{4} \leqq y+z \leqq \dfrac{5}{2}$　すなわち　$y+z=2$

$(y,z)=(1,1)$ の 1 組

［5］ $x=5$ のとき，$1 \leqq y+z \leqq 2$　すなわち　$y+z=2$

$(y,z)=(1,1)$ の 1 組

よって，［1］～［5］より　$39+9+3+1+1=\mathbf{53}$ (組)

$\boxed{4}$ C は BD の垂直二等分線上にあるから，C から BD に垂線 CH を引くと，AH $= 5$ であるから

$$\cos A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

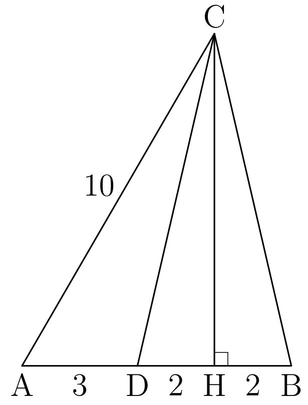
ゆえに　$\angle \mathbf{BAC = 60^\circ}$

また　$\mathrm{CH} = \mathrm{AH}\tan 60^\circ = 5\sqrt{3}$

求める円の半径を R とすると

$$R^2 = \mathrm{DH}^2 + \mathrm{CH}^2$$
$$= 2^2 + (5\sqrt{3})^2 = 79$$

よって，**円の半径は**　$\boldsymbol{\sqrt{79}}$



$\boxed{5}$ $y = a(x-1)^2 + 2$ を微分して

$$y' = 2a(x-1)$$

傾きが 2 の接線の接点の x 座標は

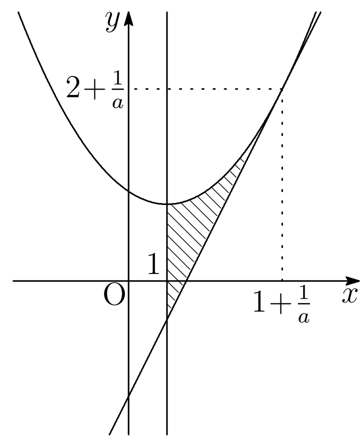
$$2a(x-1) = 2$$

ゆえに　$x = 1 + \dfrac{1}{a}$

接点の座標は $\left(1 + \dfrac{1}{a},\ 2 + \dfrac{1}{a}\right)$

よって，接線の方程式は

$$y - \left(2 + \frac{1}{a}\right) = 2\left\{x - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\right\}$$
$$y = 2x - \frac{1}{a}$$



右の図の斜線部の面積が S は

$$S = \int_1^{1+\frac{1}{a}} \left\{a(x-1)^2 + 2 - \left(2x - \frac{1}{a}\right)\right\} dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}(x-1)^3 + 2x - x^2 + \frac{x}{a}\right]_1^{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{3a^2}$$

$S = 3$ であるから　$\dfrac{1}{3a^2} = 3$　　$a > 0$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$

公式

$$\int (x+a)^n\, dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C \qquad (a \text{ は定数，} n = 0, 1, 2, \cdots)$$