平成 19 年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題 (前期日程)1 日目
数学 I・数学 II・数学 A・数学 B(平成 19 年 1 月 31 日)80 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 正の奇数の列を，次のように群に分ける。

$$1\,|\,3,5\,|\,7,9,11\,|\,13,15,17,19\,|\,21,\cdots$$

(a) 第 n 群の最初の数は何か。

(b) 909 は第何群の何番目の数か。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=4$ である。辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PR と BC が平行な $\triangle\mathrm{PQR}$ を作る。このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値を求めよ。

2 関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ のグラフと x 軸で囲まれた領域を D(境界を含む) とするとき，次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$x+y$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ とする。辺 AB，AC の垂直二等分線の交点を P とし，直線 AP が辺 BC と交わる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

(2) $\triangle\mathrm{ABQ}$ の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) m 番目の正の奇数は，$2m-1$ である．

第 n 群の最初の数は，$\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目の正の奇数であり，

$m=\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$ とすると，求める数は $2m-1$ であるから

$$\begin{aligned}2m-1 &= 2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1\\ &= \boldsymbol{n^2-n+1}\end{aligned}$$

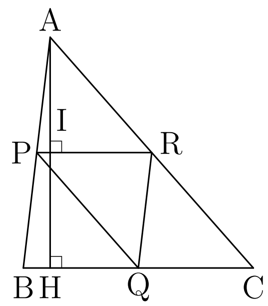
(b) $2m-1=909$ を解いて　$m=455$　　ゆえに　909 は 455 番目の奇数.

$$455=\frac{1}{2}\cdot 29\cdot 30+20$$

であるから，**909 は第 30 群の 20 番目の数**

(2) $2s=3+3+4$ とおくと $s=5$

ヘロンの公式により



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると

$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \mathrm{AH}=2\sqrt{5}\qquad \text{ゆえに}\qquad \mathrm{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

AH と PR の交点を I とする．$\triangle$ABC と $\triangle$APR は相似であり，その相似比を $1:k$ とすると $(0<k<1)$

$$\mathrm{PR}=k\mathrm{BC}=3k$$

$$\mathrm{IH}=(1-k)\mathrm{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}(1-k)$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{PR}\cdot\mathrm{IH}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times 3k\times\frac{4\sqrt{5}}{3}(1-k)=2\sqrt{5}k(1-k)\\ &=2\sqrt{5}\{-k^2+k\}=2\sqrt{5}\left\{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}\end{aligned}$$

よって　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f'(x)=3x^2-6x$

$\qquad\qquad=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると

$\quad x=0,\ 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表は，右のようになる．

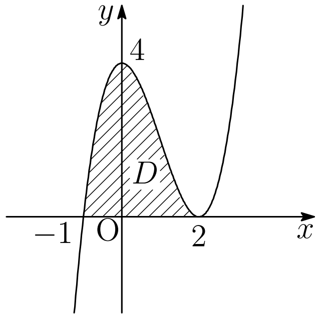
x 軸との共有点の x 座標は　$f(x)=0$ より

ゆえに　　　　　$x^3-3x^2+4=0$

因数分解をして　$(x+1)(x-2)^2=0$

よって　　　　　$x=-1,\ 2$

領域 D は右の図のようになる．

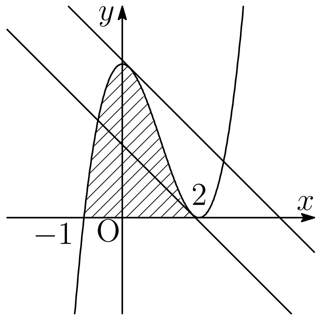


(2) $x+y=k\cdots$① とおくと，① は傾き -1，
y 切片 k の直線で，
① と $y=f(x)$ のグラフが接するとき
$f'(x)=-1$ であるから

$$3x^2-6x=-1$$

ゆえに　$3x^2-6x+1=0\quad\cdots$①

よって　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$



k が最大となるのは，グラフから

$$x=\frac{3-\sqrt{6}}{3}\qquad\cdots②$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \tfrac{1}{3}x \quad -\tfrac{1}{3} \\
\hline
3x^2-6x+1\ ) & x^3 -3x^2 \qquad\quad +4 \\
 & x^3 -2x^2 +\tfrac{1}{3}x \\
\hline
 & \quad -x^2 -\tfrac{1}{3}x \ +4 \\
 & \quad -x^2 +2x \ -\tfrac{1}{3} \\
\hline
 & \qquad -\tfrac{7}{3}x+\tfrac{13}{3}
\end{array}$$

また　$y=x^3-3x^2+4$

$$=(3x^2-6x+1)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{3}x+\frac{13}{3}$$

であるから，これに①，② を代入して

$$y=-\frac{7}{3}\times\frac{3-\sqrt{6}}{3}+\frac{13}{3}=\frac{18+7\sqrt{6}}{9}$$

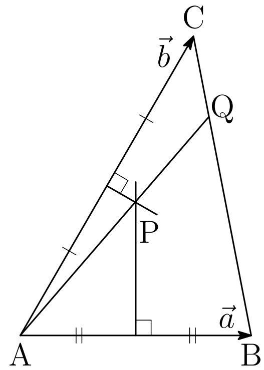
よって，$x=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$，$y=\dfrac{18+7\sqrt{6}}{9}$ のとき，最大値

$$\frac{3-\sqrt{6}}{3}+\frac{18+7\sqrt{6}}{9}=\frac{27+4\sqrt{6}}{9}$$

をとる．また，上の図から $x=-1$，$y=0$ のとき，最小値 -1 をとる．

(答) **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{27+4\sqrt{6}}{9}}$**，最小値** $\boldsymbol{-1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}^{\perp}=\vec{b}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$, $\vec{b}^{\perp}=\vec{a}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ とおくと



$$\vec{a}\cdot\vec{a}^{\perp}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{b}^{\perp}=0$$

すなわち　$\vec{a}\perp\vec{a}^{\perp}$, $\vec{b}\perp\vec{b}^{\perp}$

また

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3$$

であるから

$$\vec{a}^{\perp}=\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a},\ \vec{b}^{\perp}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

P は AB の垂直二等分線上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\vec{a}^{\perp}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+s\vec{b}$$

同様に P は AC の垂直二等分線上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{b}^{\perp}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\left(\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=t\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s=t,\ s=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t$$　これを解いて　$s=\dfrac{4}{9}$, $t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}}$

(2) 実数 k を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}$

Q は BC 上の点であるから　$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{4}{9}k=1$　ゆえに　$k=\dfrac{18}{11}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3\vec{a}+8\vec{b}}{11}$

したがって　$\triangle\mathrm{ABQ}=\dfrac{8}{11}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{8}{11}\times\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{12}{11}\sqrt{3}}$