受験番号		氏名	

平成19年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学(平成19年1月31日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	機械工学科	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	応用微生物工学科	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成19年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b+y}{a+x} = 5$ であるとき，$\dfrac{2b+3y}{2a+3x}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos^8\theta - 2\cos^4\theta\sin^4\theta + \sin^8\theta$ の値を求めよ。

(3) $f(x) = \log_4(1+x)$ $(x > 0)$ とするとき，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ と，この放物線の頂点Pにおける接線，および点Q(2, 5)における接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の数列について各問に答えよ。

$$1\cdot 1,\ 3\cdot 3,\ 5\cdot 3^2,\ 7\cdot 3^3,\ 9\cdot 3^4,\ \cdots$$

(1) 第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) $S_n = 3646$ となるときの n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n + 2n + 3$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義されている。次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + b$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ は $f(1) = 1$ であり，最大値と最小値の差が3となるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{b}{a}=5$ より　　$b=5a$　　$\cdots$①

$\dfrac{b+y}{a+x}=5$ より　　$b+y=5(a+x)$　　$\cdots$②

① を ② に代入して　$5a+y=5a+5x$

$y=5x$　　$\cdots$③

①，③ より

$$\frac{2b+3y}{2a+3x}=\frac{2\cdot 5a+3\cdot 5x}{2a+3x}=\frac{5(2a+3x)}{2a+3x}=\mathbf{5}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\cos^8\theta-2\cos^4\theta\sin^4\theta+\sin^8\theta &=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)^2\\
&=\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\}^2\\
&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\\
&=1^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\\
&=\{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)\}^2\\
&=(\cos\theta+\sin\theta)^2(\cos\theta-\sin\theta)^2\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^2(\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\\
&=\frac{1}{4}(1-2\sin\theta\cos\theta)\quad\cdots①
\end{aligned}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$　　$\cdots$②

② を ① に代入して

$$\cos^8\theta-2\cos^4\theta\sin^4\theta+\sin^8\theta=\frac{1}{4}\left\{1-2\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\mathbf{\frac{7}{16}}$$

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_4(1+x)+\log_4\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\log_4(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log_4\left(2+x+\frac{1}{x}\right)$$

$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2+x+\frac{1}{x} \geqq 2+2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=4$$

したがって　$\log_4(1+x)\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \geqq \log_4 4=1$

よって，**最小値は　1**

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$y=2x^2-4x+5$$
$$=2(x-1)^2+3$$

であるから，頂点 P の座標は $(1,\ 3)$

よって，P における接線の方程式は

$$y=3 \qquad \cdots ①$$

$y=2x^2-4x+5$ を微分して

$$y'=4x-4$$

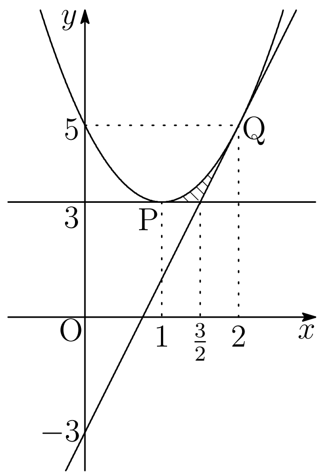
点 $\mathrm{Q}(2,\ 5)$ における接線の傾きは

$$y'=4\cdot 2-4=4$$

点 Q における接線の方程式は

$$y-5=4(x-2)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{y=4x-3}$　　$\cdots ②$



①，② の共有点の x 座標は　$3=4x-3$　これを解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，求める面積 S は，図の斜線部分であるから

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{(2x^2-4x+5)-3\}\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\{(2x^2-4x+5)-(4x-3)\}\,dx$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}2(x-1)^2\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}2(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $S_n - 3S_n$ を計算すると

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + 7\cdot 3^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^{n-1} \\
-) & 3S_n = & 1\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + \cdots + (2n-3)\cdot 3^{n-1} + (2n-1)\cdot 3^n \\
\hline
 & -2S_n = & 1\cdot 1 + (2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1}) - (2n-1)\cdot 3^n
\end{array}
$$

ここで，$2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1}$ は，初項 $2\cdot 3$，公比 3，項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1} = \frac{2\cdot 3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 3^n - 3$$

よって　　$-2S_n = 1\cdot 1 + (3^n - 3) - (2n-1)\cdot 3^n$

整理して　　$-2S_n = -(2n-2)\cdot 3^n - 2$

したがって　　$\boldsymbol{S_n = (n-1)\cdot 3^n + 1}$

(2) (1) の結果から，$3646 = (6-1)\cdot 3^6 + 1$ であるから　$\boldsymbol{n = 6}$

等比数列の和

初項 a，末項 l，公比 r の等比数列の和は　$\boldsymbol{\dfrac{rl-a}{r-1}}$

[証明]　末項 l は，$l = ar^{n-1}$ であるから

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{r\cdot ar^{n-1} - a}{r-1} = \frac{rl-a}{r-1}$$

[証終]

たとえば，$2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1}$ は，$a = 2\cdot 3$，$l = 2\cdot 3^{n-1}$，$r = 3$ から

$$\frac{rl-a}{r-1} = \frac{3\times 2\cdot 3^{n-1} - 2\cdot 3}{3-1} = 3^n - 3$$

$\boxed{4}$ (1) $a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2n+3$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) \\ &= 3+2\times\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

初項は $a_1=3$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項 a_n は　　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

(2) $$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right. \\ &\qquad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax+b \\ &= (x-a)^2-a^2+b \end{aligned}$$

であるから，頂点の座標は $(a, -a^2+b)$

$f(1)=1$ より

$$1=1^2-2a\cdot1+b \quad \text{すなわち} \quad b=2a \quad \cdots①$$

［1］ $a<0$ のとき，$f(2)-f(0)=3$ であるから

$$(-4a+b+4)-b=3 \text{ を解いて} \quad a=\frac{1}{4}$$

これは，$a<0$ に反する．

［2］ $0 \leqq a<1$ のとき，$f(2)-f(a)=3$ であるから

$$(-4a+b+4)-(-a^2+b)=3 \text{ を解いて} \quad a=2\pm\sqrt{3}$$

$0 \leqq a<1$ に注意して　$a=2-\sqrt{3}$

① から　$b=4-2\sqrt{3}$

［3］ $1 \leqq a<2$ のとき，$f(0)-f(a)=3$ であるから

$$b-(-a^2+b)=3 \text{ を解いて} \quad a=\pm\sqrt{3}$$

$1 \leqq a<2$ に注意して　$a=\sqrt{3}$

① から　$b=2\sqrt{3}$

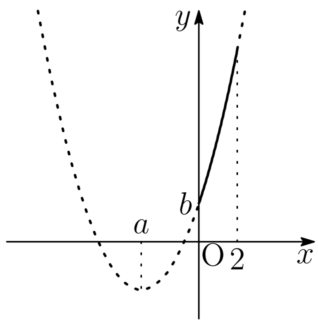
［4］ $2 \leqq a$ のとき，$f(0)-f(2)=3$ であるから

$$b-(-4a+b+4)=3 \text{ を解いて} \quad a=\frac{7}{4}$$

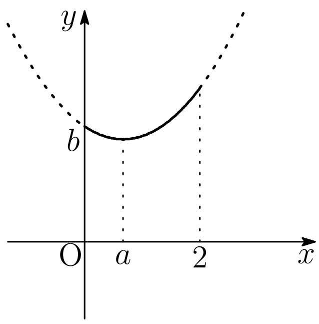
これは，$2 \leqq a$ に反する．

よって，$\boldsymbol{(a,\ b)=(2-\sqrt{3},\ 4-2\sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})}$

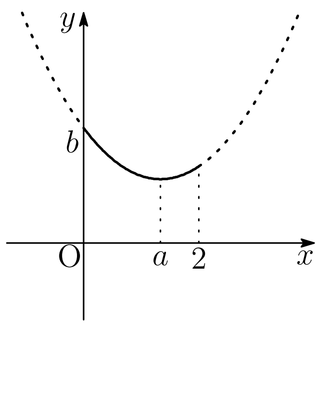
［1］ $a<0$ のとき



［2］ $0 \leqq a<1$ のとき



［3］ $1 \leqq a<2$ のとき



［4］ $2 \leqq a$ のとき