平成19年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学I (2日目：平成18年11月12日) 60分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y=4x^2+ax+5$ の頂点の y 座標が 2 のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=-x^2+4x+c\ (0 \leqq x \leqq 6)$ の最小値が -11 のとき，定数 c の値およびこの関数の最大値を求めよ。

(3) 傾斜角が θ の坂道を 5km 進むと，垂直方向に 100m 登ったことになるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 軸の方程式が $x=1$ で，2点 $(-1,\ 5)$，$(2,-1)$ を通る放物線について，次の各問に答えよ。

(1) この放物線の方程式を求めよ。

(2) この放物線が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において，$\mathrm{BC}=8\sqrt{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，外接円の半径が $5\sqrt{5}$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)
$$\begin{aligned} y &= 4x^2 + ax + 5 \\ &= 4\left(x^2 + \frac{a}{4}x\right) + 5 \\ &= 4\left\{\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \left(\frac{a}{8}\right)^2\right\} + 5 \\ &= 4\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + 5 \end{aligned}$$

頂点の y 座標が 2 であるから

$$-\frac{a^2}{16} + 5 = 2$$

ゆえに　$a^2 = 48$

よって　$\boldsymbol{a = \pm 4\sqrt{3}}$

(2)
$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + c \\ &= -(x-2)^2 + c + 4 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 6$ であるから

$x = 2$ で最大値 $c + 4$，$x = 6$ で最小値 $c - 12$

をとる．最小値が -11 であるから

$c - 12 = -11$　ゆえに　$\boldsymbol{c = 1}$

よって，最大値は　$c + 4 = \mathbf{5}$

(3) $\sin\theta = \dfrac{100}{5000} = \boldsymbol{\dfrac{1}{50}}$

θ は鋭角であるから

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{50}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{1}{50}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{51}{50} \times \frac{49}{50}} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{51}}{50}} \end{aligned}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{50} \div \dfrac{7\sqrt{51}}{50} = \boldsymbol{\dfrac{1}{7\sqrt{51}}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 $x=1$ を軸とするから，求める関数は $y=a(x-1)^2+q$ とおける．

このグラフが 2 点 $(-1,\ 5)$，$(2, -1)$ を通るから

$$5=4a+q,\quad -1=a+q \quad \text{これを解くと} \quad a=2,\ q=-3$$

よって　　$y=2(x-1)^2-3$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x^2-4x-1}$

(2) 放物線と x 軸との共有点の座標は $2x^2-4x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$$

よって，求める線分の長さは　　$\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より $c=2R\sin C$ であるから

$$c=2\cdot5\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=20$$

余弦定理により　　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$20^2=(8\sqrt{5})^2+b^2-2\cdot8\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

整理して　　$b^2-16b-80=0$

$(b+4)(b-20)=0$

$b>0$ であるから　　$b=20$

よって　　$\mathbf{AC=20}$