平成19年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学I (1日目：平成18年11月11日) 60分

1 次の各問に答えよ。

(1) x の方程式 $x^2+2ax+5a^2+4a+1=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値とその解を求めよ.

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，放物線 $y=2x^2+x-1$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ.

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

2 関数 $y=-x^2+ax+b$ の $x \leqq 0$ における最大値は 1 で，すべての x における最大値は 5 である。定数 a，b の値を求め，この関数のグラフをかけ。

3 $\triangle$ABC において，$\angle$A $=60^\circ$，AB $=3+3\sqrt{3}$，AC $=6$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。

(2) $\angle$B の大きさを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 1\cdot(5a^2 + 4a + 1) \\ &= -4a^2 - 4a - 1 = -(2a+1)^2 \end{aligned}$$

この 2 次方程式が実数解をもつのは，$D \geqq 0$ のときであるから

$$-(2a+1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$$

このとき，2 次方程式は重解をもち，その解は

$$x = -\frac{2a}{2\cdot 1} = -a = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots$ ① は放物線 $y = 2x^2 + x - 1 \cdots$ ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

放物線 ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y - 3 = 2(x+2)^2 + (x+2) - 1$$

整理して　$y = 2x^2 + 9x + 12$

よって，上式は ① に一致するから　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 9,\ c = 12}$

(3) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta = \frac{16}{41}$$

$\tan\theta < 0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta < 0$ である．

よって　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{16}{41}} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{\sqrt{41}}}$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -\dfrac{5}{4} \times \left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{41}}}$

2 $x=0$ のとき $y=1$ であるから　$\boldsymbol{b=1}$

$y=-x^2+ax+1$ と $y=5$ から y を消去して

$$-x^2+ax+1=5 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+4=0 \quad \cdots ①$$

は，重解をもつので，係数について

$$(-a)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$$

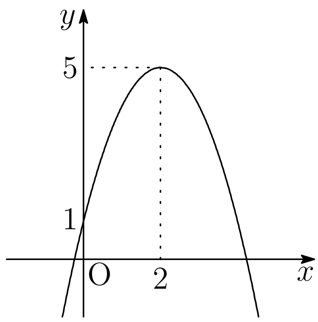
ゆえに　$a=\pm 4 \quad \cdots ②$

重解は，① より　$x=-\dfrac{-a}{2\cdot 1}=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}>0$ であるから，② より　$\boldsymbol{a=4}$

$y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$

よって，頂点の座標は　$(2,\ 5)$



3 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\&=(3+3\sqrt{3})^2+6^2-2(3+3\sqrt{3})\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\\&=54\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\sqrt{54}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{(3+3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{6})^2-6^2}{2(3+3\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{6}}\\&=\frac{54+18\sqrt{3}}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\angle\mathrm{B}$ は　$\boldsymbol{\angle \mathrm{B}=45^\circ}$