# 平成19年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(後期日程)
# 数学I・数学II・数学A・数学B(平成19年3月14日)80分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) $x$，$y$ が $(\log_2 x)^2 + \log_2(x^2y) = 2$ を満たすとき，$y$ の最大値とそのときの $x$ の値を求めよ。

(2) 実数 $x$，$y$ が $3x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $y = |-x^2 + 4|$ のグラフを $C$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 曲線 $C$ に点 $(1,\ 7)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $C$ に点 $(1,\ p)$ からちょうど2本の接線が引けるような実数 $p$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上の2点A，Bの $x$ 座標をそれぞれ $a$，$b$ $(a < b)$ とする。$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ を満たす点Cがこの放物線上に存在するための $a$，$b$ の条件を求めよ。

**解答例**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x^2y>0$

ゆえに　$x>0$, $y>0$

与式を変形すると　$(\log_2 x)^2+2\log_2 x+\log_2 y=2$

$$\log_2 y=-(\log_2 x+1)^2+3$$

$y$ が最大となるとき，$\log_2 y$ は最大となるから，

$\log_2 x=-1$ のとき，$\log_2 y$ は最大値 $3$ をとる．

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **のとき，$\boldsymbol{y}$ は最大値** $8$ をとる．

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと　$3x^2-2xy+y^2=2$ は

$$\begin{aligned}3(r\cos\theta)^2-2r\cos\theta\cdot r\sin\theta+(r\sin\theta)^2&=2\\ r^2(3\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)&=2\\ r^2\{2-(\sin 2\theta-\cos 2\theta)\}&=2\\ r^2\left\{2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}&=2\end{aligned}$$

このとき，$x^2+y^2=r^2$ の最大値と最小値を求めればよいので

$$r^2=\frac{2}{2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

よって　**最大値は**　$\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$

**最小値は**　$\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

数学 C を用いた別解 (行列 $A$ が ${}^tA=A$ を満たす対称行列を用いた解法)

**定理 1**

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

**証明** $A$ の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

この方程式の判別式 $D$ は

$$D=\{-(a+c)\}^2-4\cdot 1(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $u_1$，$u_2$ とする．ここで，内積 $u_1 \cdot u_2$ は行列の積 ${}^tu_1u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1)\cdot u_2={}^t(Au_1)u_2={}^tu_1{}^tAu_2={}^tu_1Au_2=u_1\cdot(Au_2)$$

$Au_1=\lambda_1u_1$，$Au_2=\lambda_2u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1u_1)\cdot u_2=u_1\cdot(\lambda_2u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1-\lambda_2)u_1\cdot u_2=0$$

$\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$ であるから　$u_1\cdot u_2=0$　よって　$u_1 \perp u_2$ **証終**

$u_1$，$u_2$ を単位固有ベクトルとし，これらを基底とする座標変換を用いることで，$ax^2+2bxy+cy^2$ について次の定理 2 が成り立つ．

**定理 2**

$u_1$，$u_2$ を $A$ の単位固有ベクトルとする．

基底の変換　$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=Xu_1+Yu_2$　　($x, y, X, Y$ は実数)

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ により次が成り立つ．

$$ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$$

**証明** $ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
ax^2+2bxy+cy^2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
\end{aligned}
$$

**証終**

とくに，この座標変換ついては，次式も成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^2+Y^2
\end{aligned}
$$

**(2) の別解**

$$
3x^2-2xy+y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は　$\lambda^2-4\lambda+2=0$

これを解いて　$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$

したがって　$(2-\sqrt{2})X^2+(2+\sqrt{2})Y^2=2$ のときの $X^2+Y^2$ の最大値と最小値を求めればよいから

$X^2 = 2+\sqrt{2}$，$Y=0$ のとき　最大値 $2+\sqrt{2}$

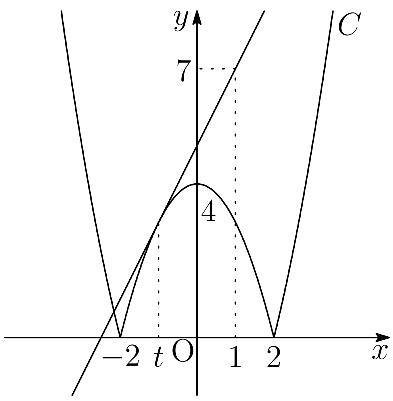
$X=0$，$Y^2=2-\sqrt{2}$ のとき　最小値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 $(1,\ 7)$ から $C$ に引いた接線は，この点から曲線 $y=-x^2+4\ (-2<x<2)$ に引いた接線を求めればよい．

$y=-x^2+4$ を微分すると　$y'=-2x$

接点の座標を $(t, -t^2+4)$ とすると，接線の傾きは $-2t$ となるから，その方程式は

$$y-(-t^2+4)=-2t(x-t) \quad \cdots ①$$




この直線が点 $(1,\ 7)$ を通るから

$$7-(-t^2+4)=-2t(1-t)$$

よって　　　$t^2-2t-3=0$

すなわち　　$(t+1)(t-3)=0$

$-2<t<2$ であるから　$t=-1$

① より　　$\boldsymbol{y=2x+5}$

(2) $C$ に $(1,\ p)$ からちょうど 2 本の接線が引けるのは，次の 2 つの場合である．

［1］ $y=-x^2+4\ (-2<x<2)$ に 2 本の接線が引けるとき

① が $(1,\ p)$ を通るから

$$p-(-t^2+4)=-2t(1-t) \quad すなわち \quad t^2-2t+4-p=0$$

この方程式が $-2<t<2$ に 2 つの解をもつから

$f(t)=t^2-2t+4-p$ とおくと，$f(t)=(t-1)^2+3-p$

このとき，$f(1)<0$ かつ $f(2)>0$ であるから

$$3-p<0 \text{ かつ } 4-p>0 \quad ゆえに \quad 3<p<4$$

［2］ $y=x^2-4\ (x<-2,\ 2<x)$ に 2 本の接線が引けるとき

$y=x^2-4$ を微分すると　$y'=2x$

接点の座標を $(t,\ t^2-4)$ とすると，接線の傾きは $2t$ となるから，その方程式は

$$y-(t^2-4)=2t(x-t)$$

この直線が点 $(1,\ p)$ を通るから

$$p-(t^2-4)=2t(1-t) \quad すなわち \quad t^2-2t+4+p=0$$

この方程式が $t<-2,\ 2<t$ に 2 つの解をもつから

$g(t)=t^2-2t+4+p$ とおくと，$g(t)=(t-1)^2+3+p$

このとき，$g(-2)<0$ であるから

$$12+p<0 \quad ゆえに \quad p<-12$$

［1］，［2］ より　$\boldsymbol{p<-12,\ 3<p<4}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 点 C の座標を $\left(c,\ \dfrac{1}{2}c^2\right)$ とする.

直線 CA の傾きは $\dfrac{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}c^2}{a-c}=\dfrac{a^2-c^2}{2(a-c)}=\dfrac{(a+c)(a-c)}{2(a-c)}=\dfrac{a+c}{2}$

直線 CB の傾きは $\dfrac{\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2}{b-c}=\dfrac{b^2-c^2}{2(b-c)}=\dfrac{(b+c)(b-c)}{2(b-c)}=\dfrac{b+c}{2}$

この 2 つの直線は直交するから

$$\frac{a+c}{2}\times\frac{b+c}{2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad c^2+(a+b)c+ab+4=0 \quad \cdots ①$$

$c$ に関する 2 次方程式 ① が $a$, $b$ と異なる実数解をもてばよい.
この 2 次方程式の係数について

$$\begin{aligned} D&=(a+b)^2-4\cdot1(ab+4)\\ &=(b-a)^2-16\\ &=(b-a+4)(b-a-4) \end{aligned}$$

$a<b$ であるから　$b-a+4>0$

ゆえに　$b>a+4$ のとき $D>0$,　$b=a+4$ のとき $D=0$

[1] $b>a+4$ のとき

① は異なる 2 つの実数解をもち，これらを $c_1$, $c_2$ $(c_1<c_2)$ とすると，解と係数の関係から

$$c_1c_2=ab+4$$

であるから，$c_1=a$, $c_2=b$ ではない．したがって，方程式 ① は $a$, $b$ と異なる解を少なくとも 1 つもつ.

[2] $b=a+4$ のとき

① は重解をもち，これを $c_3$ とすると，① の係数から

$$c_3=-\frac{a+b}{2}$$

$c_3\neq a$ から　$a\neq-1$,　　$c_3\neq b$ から　$a\neq-3$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{b>a+4}$　**または**　$\boldsymbol{b=a+4\ (a\neq-1,-3)}$