受験番号		氏名	

平成19年度　崇城大学一般入学試験問題(後期日程)
数　学(平成19年3月14日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$～$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**ソフトウェアサイエンス学科**	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成 19 年度　崇城大学一般入学試験問題 (後期日程)
数　　学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ のとき，x^2+xy+y^2 と x^3+y^3 の値を求めよ。

(2) $0 < x < \pi$，$0 < y < \pi$ のとき，次の 2 式を満たす x，y の値を求めよ。

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x - \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(3) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2^{x-2y} = 8 \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) - \log_2 3 = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(t) = at + b$ とするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = -8$，$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt = -7$ となるように定数 a，b の値を定めよ。

(2) (1) で定めた $f(t)$ について，関数 $G(x) = \displaystyle\int_0^x (t-2)\,f(t)\,dt$ の極値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ SOJODAI の 7 つの文字を一列に並べるとき，次の各問に答えよ。

(1) 並べ方は全部で何通りあるか。

(2) (1) における文字列を 1 つずつ印刷したカードが箱に入っている。この中から 1 枚のカードを取り出すとき，2 つの O の間に 2 つの文字が入っているカードを取り出す確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{1}{2}n^2 + 2n$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin(a_k \pi)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面において，連立不等式 $y \geqq |\,x^2-1\,|$，$y \leqq -x^2+2x+3$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)
$$x+y=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{2}{1-3}=-1$$
$$xy=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1}{1-\sqrt{3}}=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

したがって
$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(-1)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(-1)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

(2) 与えられた等式から $\sin x=\dfrac{1}{2}-\cos y$ $\cdots$①，$\cos x=\sin y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cdots$②

①，② から
$$\sin^2 x+\cos^2 x=\left(\frac{1}{2}-\cos y\right)^2+\left(\sin y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$1=(\sin^2 y+\cos^2 y)-\cos y-\sqrt{3}\sin y+1$$
$$\sqrt{3}\sin y+\cos y=1$$
$$2\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=1$$
$$\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$0<y<\pi$ より $\dfrac{\pi}{6}<y+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$ であるから，上式から
$$y+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{2}{3}\pi$$

これを ② に代入して　$\cos x=0$

$0<x<\pi$ より　$x=\dfrac{\pi}{2}$　　(答) $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{2}{3}\pi}$

(3) 第１式から　$2^{x-2y}=2^3$

ゆえに　$x-2y=3$　よって　$x=2y+3$　$\cdots$①

① を第２式に代入して

$$\log_2(3y+3)+\log_2(y+3)-\log_2 3=3 \quad \cdots ②$$

真数は正であるから　$3y+3>0$ かつ $y+3>0$

すなわち　$y>-1$　$\cdots$③

② を変形すると　$\log_2(y+1)(y+3)=\log_2 8$

ゆえに　$(y+1)(y+3)=8$

整理して　$y^2+4y-5=0$

よって　$(y+5)(y-1)=0$

③ に注意して　$y=1$

これを ① に代入して　$x=5$　　(答) $\boldsymbol{x=5,\ y=1}$

2 (1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=-8$ から　$\displaystyle\int_0^2 (at+b)dt=-8$

$$\left[\frac{at^2}{2}+bt\right]_0^2=-8$$

ゆえに　$2a+2b=-8$

したがって　$a+b=-4$　$\cdots$①

$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt=-7$ から　$\displaystyle\int_{-1}^0 (at+b)dt=-7$

$$\left[\frac{at^2}{2}+bt\right]_{-1}^0=-7$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2}a+b=-7$　$\cdots$②

①, ② を解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-6}$

(2)　(1) の結果から

$$G(x)=\int_0^x 2(t-2)(t-3)\,dt$$

これを x で微分して

$$G'(x)=2(x-2)(x-3)$$

$G'(x)=0$ とすると　$x=2,\ 3$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　**極大値は**　$G(2)=\displaystyle\int_0^2 2(t-2)(t-3)\,dt=\boldsymbol{\frac{28}{3}}$

極小値は　$G(3)=\displaystyle\int_0^3 2(t-2)(t-3)\,dt=\boldsymbol{9}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\dfrac{7!}{2!} = \mathbf{2520}$ (通り)

(2) 2 つの O とその間に入る 2 文字をひとまとめにし，これと残りの 3 文字の並び方を考えればよい．

O			O			

O の間に入る 2 つの文字の入り方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

ひとまとめにしたものと残りの 3 文字の並び方は　$4!$ (通り)

したがって，並び方の総数は　${}_5\mathrm{P}_2 \times 4!$

よって，求める確率は　${}_5\mathrm{P}_2 \times 4! \div \dfrac{7!}{2!} = \mathbf{\dfrac{4}{21}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + 2n - \left\{\frac{1}{2}(n-1)^2 + 2(n-1)\right\} = n + \frac{3}{2}$$

初項は　$a_1 = S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = \dfrac{5}{2}$

よって，$a_n = n + \dfrac{3}{2}$ は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n = n + \dfrac{3}{2}}$

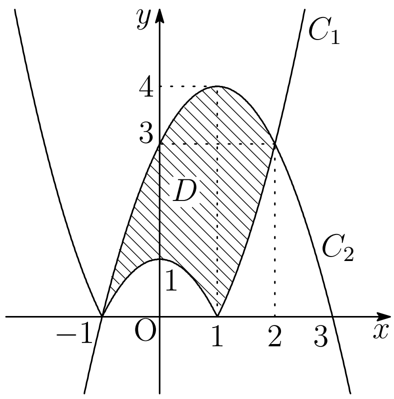
(2) k が整数のとき

$$\sin(a_k\pi) = \sin\left(k + \frac{3}{2}\right)\pi = (-1)^{k-1}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin(a_k\pi) &= \sum_{k=1}^{n} 3^k\cdot(-1)^{k-1} \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}(-3)^{k-1} \\ &= 3 \times \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y = |x^2 - 1|$, $y = -x^2 + 2x + 3$ の表すグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の座標は，連立方程式



$$\begin{cases} y = |x^2 - 1| \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

を解いて　$(-1,\ 0)$, $(2,\ 3)$

D の表す領域は，C_1 の上側，C_2 の下側に共通する領域で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

(2) D の面積を S とすると，右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(-x^2 + 2x + 3) - |x^2 - 1|\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \{(-x^2 + 2x + 3) - (-x^2 + 1)\}\,dx \\ &\qquad\qquad + \int_{1}^{2} \{(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 1)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (2x + 2)\,dx + \int_{1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx \\ &= \Big[\ x^2 + 2x\ \Big]_{-1}^{1} + \Big[\ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\ \Big]_{1}^{2} = \mathbf{\frac{19}{3}} \end{aligned}$$