平成 19 年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学 I・数学 II (2 日目：平成 18 年 11 月 12 日) 60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b と表すとき，$\dfrac{a}{b}$ を計算せよ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}+\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ の値を求めよ。

(3) $a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$ とする。$\log_{10} 6$ を a，b で表せ。

2 不等式 $\dfrac{1}{2}x^2+x \leqq y \leqq -x^2-2x$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$\dfrac{y}{x}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

3 $a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x+b$ が極大値 0 をもち，$f(1)=0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$ より $3<\sqrt{5}+1<4$ であるから　$a=3$

$a+b=\sqrt{5}+1$ より　$b=\sqrt{5}+1-a=\sqrt{5}-2$

よって　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\boldsymbol{3\sqrt{5}+6}$

(2)
$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}+\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}\qquad\cdots①$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると
$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

ゆえに　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

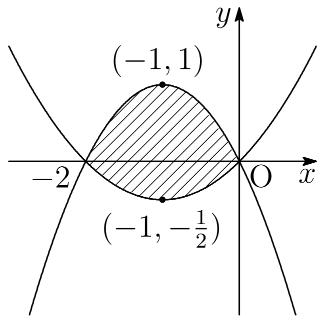
したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

① より　$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}+\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\div\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{16}{3}}$

(3) $b=\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 5}{a}$ より　$\log_2 5=ab$

よって　$\log_{10}6=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 10}=\dfrac{\log_2 2+\log_2 3}{\log_2 2+\log_2 5}=\boldsymbol{\dfrac{1+a}{1+ab}}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x$ の上側，放物線 $y=-x^2-2x$ の下側に共通する領域で，境界線を含む.



(2) (1) より，$\dfrac{y}{x}$ は $-2 \leqq x < 0 \quad \cdots①$

$\dfrac{1}{2}x^2+x \leqq y \leqq -x^2-2x$ の 3 辺を x で割って

$$\frac{1}{2}x+1 \geqq \frac{y}{x} \geqq -x-2$$

$$-x-2 \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{1}{2}x+1$$

① より　$-2 < -x-2 \leqq 0$，$0 \leqq \dfrac{1}{2}x+1 < 1$

よって　　$\boldsymbol{-2 < \dfrac{y}{x} < 1}$

$\boxed{\textbf{3}}$ $f(x)=x^3-3a^2x+b$ から

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ から，$f(x)$ の増減表は右のようになる．$f(-a)=0$ であるから

x		$-a$		a	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$(-a)^3-3a^2\cdot(-a)+b=0$$

すなわち　$b=-2a^3 \quad \cdots①$

$f(1)=0$ から　$1^3-3a^2\cdot 1+b=0$

ゆえに　$b=3a^2-1 \quad \cdots②$

①，② より　$-2a^3=3a^2-1$

整理して　$2a^3+3a^2-1=0$

よって　$(a+1)^2(2a-1)=0$

$a>0$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{4}}$