

平成 19 年度 崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学 I・数学 II (1 日目：平成 18 年 11 月 11 日) 60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) $k \neq 0$ とする。 x の 2 次方程式 $x^2 - 2kx + k = 0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍に等しいとき、定数 k の値を求めよ。

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は直線 $y = 2x - 1$ に接し、かつ $x = 1$ において x 軸に接している。定数 a, b, c の値を求めよ。

(3) $2\log_4(x+2) + \log_2(x+5) = 2$ を満たす x の値を求めよ。

2 $\triangle ABC$ は半径 3 の円に内接し、 $AB = 3$ 、 $BC = 2$ 、 $CA > AB$ である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

3 放物線 $y = -(x-a)^2 + a^2$ (a は定数) と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。 a が $-2 \leq a \leq 3$ の範囲を変化するとき、 $S(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

解答例

- 1 (1) 2つの解は $\alpha, 2\alpha$ と表すことができる .

解と係数の関係から $\alpha + 2\alpha = 2k, \alpha \cdot 2\alpha = k$

すなわち $3\alpha = 2k, 2\alpha^2 = k$

上の2式から $(\alpha, k) = (0, 0), \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$

$k \neq 0$ であるから $k = \frac{9}{8}$

- (2) $x = 1$ において, x 軸に接するから, 放物線の方程式は

$$y = a(x - 1)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける .

放物線と直線の方程式から y を消去すると

$$a(x - 1)^2 = 2x - 1$$

ゆえに $ax^2 - 2(a + 1)x + a + 1 = 0$

放物線と直線が接するとき, $D = 0$ であるから

$$D/4 = \{-(a + 1)\}^2 - a(a + 1) = 0$$

整理すると $a + 1 = 0$

よって $a = -1$

これを ① に代入して $y = -x^2 + 2x - 1$

したがって $a = -1, b = 2, c = -1$

(3) 真数は正であるから $x + 2 > 0$ かつ $x + 5 > 0$

すなわち $x > -2 \quad \dots \textcircled{1}$

方程式を変形すると $2 \times \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 4} + \log_2(x+5) = 2$

$$\log_2(x+2)(x+5) = 2$$

よって $(x+2)(x+5) = 2^2$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

したがって $(x+1)(x+6) = 0$

① に注意して $x = -1$

2 正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = 2R$ であるから

$$\frac{b}{\sin B} = 2 \cdot 3 \quad \text{すなわち} \quad \sin B = \frac{b}{6} \quad \dots \textcircled{1}$$

余弦定理により

$$\cos B = \frac{3^2 + 2^2 - b^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 - b^2}{12} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ に代入して

$$\left(\frac{b}{6}\right)^2 + \left(\frac{13 - b^2}{12}\right)^2 = 1$$

ゆえに $(2b)^2 + (13 - b^2)^2 = 12^2$

$$b^4 - 22b^2 + 25 = 0$$

$$b^2 = 11 \pm \sqrt{11^2 - 25} = 11 \pm 2\sqrt{24}$$

$b > 0$ より $b = \sqrt{11 \pm 2\sqrt{24}} = \sqrt{8} \pm \sqrt{3}$

仮定より $b > 3$ であるから $b = \sqrt{8} + \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

① より $\sin B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

3 放物線の方程式は $y = -x^2 + 2ax$

放物線と直線の共有点の x 座標は, 方程式

$$-x^2 + 2ax = x$$

を解いて $x = 0, 2a - 1$

[1] $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{2a-1} \{(-x^2 + 2ax) - x\} dx \\ &= - \int_0^{2a-1} x\{x - (2a - 1)\} dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{(2a - 1) - 0\}^3 = \frac{1}{6}(2a - 1)^3 \end{aligned}$$

[2] $-2 \leq a < \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{2a-1}^0 \{(-x^2 + 2ax) - x\} dx \\ &= - \int_{2a-1}^0 x\{x - (2a - 1)\} dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6}\right) \{0 - (2a - 1)\}^3 = -\frac{1}{6}(2a - 1)^3 \end{aligned}$$

[1], [2] より $a = 3, -2$ のとき最大値 $\frac{125}{6}$, $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 0