平成18年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(前期日程)
数学I・数学II・数学A・数学B(平成18年1月30日)80分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) a を定数とする。y 軸上の点 P$(0,\ a)$ と放物線 $y = x^2$ 上の点 Q との距離の最小値およびそのときの Q の座標を求めよ。

(2) n を正の整数とする。$x + y + z = n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の総数を a_n で表す。

(a) a_n を n で表せ。

(b) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= 4$，CA $= 3$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$ とするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\triangle$ABC の内接円の中心を O とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の大きさを求めよ。

$\boxed{3}$ 曲線 $y = |x + 2|(x - 4)$ と直線 $y = -2x + k$ が 2 点を共有するとき，これらのグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，定数 k は $|k| \geqq 5$ とする。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) PQ 間の距離を d とすると

$$
\begin{aligned}
d^2 &= (x-0)^2 + (x^2-a)^2 \\
&= x^4 + (1-2a)x^2 + a^2 \\
&= \left(x^2 + \frac{1-2a}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 + a^2 \\
&= \left(x^2 + \frac{1-2a}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4}
\end{aligned}
$$

[1] $\dfrac{1-2a}{2} > 0$　すなわち　$\boldsymbol{a < \dfrac{1}{2}}$ **の場合**
$x^2 = 0$ のとき d は最小となる．
$\mathrm{Q}(0,\ 0)$ のとき，d は**最小値** $\boldsymbol{|a|}$ をとる．

[2] $\dfrac{1-2a}{2} \leqq 0$　すなわち　$\boldsymbol{a \geqq \dfrac{1}{2}}$ **の場合**
$x^2 = \dfrac{2a-1}{2}$ のとき d は最小となる．
$\mathrm{Q}\left(\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}},\ \dfrac{2a-1}{2}\right)$ のとき，d は**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}}$ をとる．

(2) (a) 異なる 3 種類のもの (x, y, z) から，重複を許して n 個とる組合せの総数であるから (重複組合せ)

$$
\begin{aligned}
a_n &= {}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot 1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

(b) $a_k = \dfrac{1}{2}(k+1)(k+2) = \dfrac{1}{2}(k^2+3k+2)$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\times\frac{1}{2}n(n+1) + 2n\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)}
\end{aligned}
$$

[例] チョコ，バニラ，メロンの3種類のアイスクリームがたくさんある．これらの中から5個のアイスクリームを選ぶとき，何通りの選び方があるか．ただし，含まないアイスクリームがあってもよいものとする．

考え方　2つの仕切り (|) があれば，3種類のアイスクリームに分けることができるので，仕切りの左側をチョコ，仕切りと仕切りの間をバニラ，仕切りの右側をメロンとする．たとえば

○ | ○○ | ○○　は　チョコ1個，バニラ2個，メロン2個
○○○○ | | ○　は　チョコ4個，バニラ0個，メロン1個
○○ | ○○○ |　は　チョコ2個，バニラ3個，メロン0個

このように考えると，2つの | と5つの○の配列の仕方の総数が3種類のアイスクリーム5個の選び方の総数である．これは同じものを含む順列で，$7 = (3-1) + 5$ 個の場所から5個の○の場所を選ぶ組合せの数で

$$ {}_{(3-1)+5}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21 \text{ (通り)} $$

　一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個を取る組合せの数は，上と同じ考えで，$n-1$ 個の仕切り | と r 個○の順列の数で，$(n-1)+r$ 個の場所から，r 個の○の場所を選ぶことであるから

$$ {}_{(n-1)+r}\mathrm{C}_r \quad \text{すなわち} \quad {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

である．このような組合せを**重複組合せ**といい，その数を $\boldsymbol{{}_n\mathrm{H}_r}$ で表す．

重複組合せ

異なる n 個のものから，**重複を許して** r 個とる組合せの数は

$$ \boldsymbol{{}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{n < r}\ \textbf{でもよい)} $$

[問] $x+y+z=8$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか．

(解) 異なる3種類のものから，重複を許して8個とる組合せの総数であるから　${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$　(組)

$x+y+z=n$ $(n \geqq 0)$ の負でない整数解の個数は

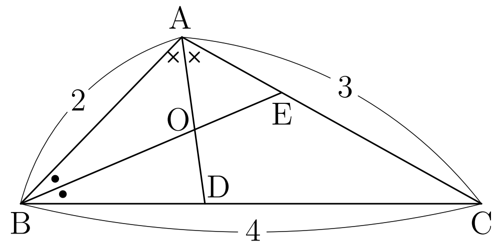
$$ {}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} $$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) AD は $\angle$A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:3$$

D は線分 BC を $2:3$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}$$



(2) $\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\dfrac{2}{2+3}=4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$

BO は $\angle$B の二等分線であるから

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OD}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=2:\frac{8}{5}=5:4$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}(3\vec{a}+2\vec{b})}$　$\cdots$①

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおき，$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}$$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\times3\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3}{2}$　$\cdots$②

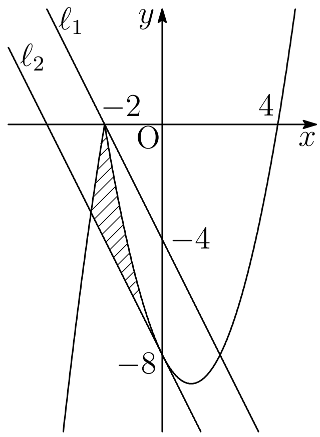
したがって，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ および ①，② から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2&=\frac{1}{9}(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot\frac{1}{9}(3\vec{a}+2\vec{b})\\&=\frac{1}{81}(9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{81}\left\{9\times2^2+12\times\left(-\frac{3}{2}\right)+4\times3^2\right\}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $y = |x+2|(x-4)$ は

$$y = \begin{cases} -(x+2)(x-4) & (x \leqq -2) \\ (x+2)(x-4) & (x \geqq -2) \end{cases}$$



この曲線と傾き -2 の直線が 2 点を共有するのは，右の図のように点 $(-2,\ 0)$ を通る直線 ℓ_1 および曲線に接する直線 ℓ_2 である．

ℓ_1 は点 $(-2,\ 0)$ を通るから　$k = -4$

ℓ_2 は放物線に接するから　　$k = -8$

$|k| \geqq 5$ であるから ℓ_1 は不適

$x < -2$ において，曲線と直線 ℓ_2 の共有点の x 座標は

$$-(x+2)(x-4) = -2x-8 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2-2\sqrt{5}$$

$x > -2$ において，曲線と直線 ℓ_2 の共有点の x 座標は

$$(x+2)(x-4) = -2x-8 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{2-2\sqrt{5}}^{-2} \{-(x+2)(x-4) - (-2x+8)\}\,dx \\ &\qquad\qquad + \int_{-2}^{0} \{(x+2)(x-4) - (-2x-8)\}\,dx \\ &= \int_{2-2\sqrt{5}}^{-2} \{-(x-2)^2 + 20\}\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx \\ &= \left[\ -\frac{1}{3}(x-2)^3 + 20x\ \right]_{2-2\sqrt{5}}^{-2} + \left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right]_{-2}^{0} \\ &= \boldsymbol{\frac{80\sqrt{5}}{3} - 56} \end{aligned}$$

重要な積分法

$n \geqq 0$ である整数のとき　$\displaystyle\int (x-\alpha)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} + C$