受験番号		氏名	

平成18年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数　　学(平成18年1月31日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$～$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※ 学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○	／	／
	応用化学科	○	○	／	／	○
	環境建設工学科	○	○	／	／	○
	建築学科	○	○	○	／	／
	宇宙航空システム工学科	○	○	○	／	／
情報学部	**全学科**	○	○	／	／	○
生物生命学部	**全学科**	○	○	／	○	／

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成18年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)2日目
数　　学

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めよ。

(2) 3直線 $y = kx + 2k + 1$，$x + y - 4 = 0$，$2x - y + 1 = 0$ によって三角形ができないのは定数 k がどのような値をとるときか。

(3) 定数 m に対して，$3^m - 20\cdot 3^{-m} + 1 = 0$ のとき，3^m の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$，$g(x)$ が条件 $f(x) = -x^2 + g(1)x + g(0)$，$f'(x) + g'(x) = 0$，$f'(1) = 4$ を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$，$g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = k$，$a_{n+1} = ka_n - k + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義されている。次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) k が $0 < k < 1$ の範囲を変化するとき，a_3 の取り得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \sqrt{7}$，$\mathrm{CA} = 2$，$\angle\mathrm{C} = 60^\circ$ である。辺BCを $2:1$ に内分する点をDとし，3点A，B，Dを通る円と辺CAとの交点をEとする。次の各問に答えよ。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABE}$ の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$，$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{AC} = 2$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺BC上に点Dを $\angle\mathrm{BAD} = 60^\circ$ となるようとる。次の各問に答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{ADB}$ の大きさを θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

解答例

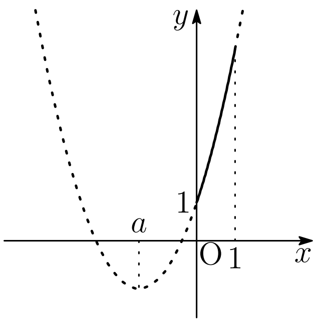
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2ax + 1 \\
&= (x-a)^2 - a^2 + 1
\end{aligned}
$$

したがって　$\boldsymbol{a < 0}$ のとき **最小値** $\boldsymbol{f(0) = 1}$

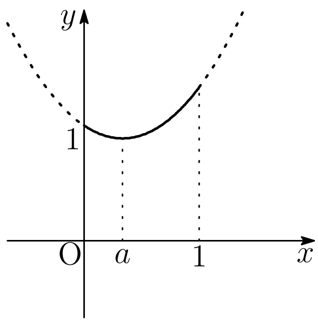
$\boldsymbol{0 \leqq a < 1}$ のとき **最小値** $\boldsymbol{f(a) = -a^2 + 1}$

$\boldsymbol{1 \leqq a}$ のとき **最小値** $\boldsymbol{f(1) = -2a + 2}$

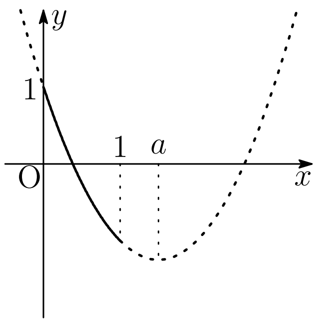
$a < 0$ のとき



$0 \leqq a < 1$ のとき



$1 \leqq a$ のとき



(2) 3 直線

$$y = kx + 2k + 1 \cdots ①,\ x + y - 4 = 0 \cdots ②,\ 2x - y + 1 = 0 \cdots ③$$

の傾きは，それぞれ k，-1，2 であるから，3 直線によって三角形ができないのは，次の 3 つの場合である．

i) 直線 ① と直線 ② が平行であるときで，$k = -1$

ii) 直線 ① と直線 ③ が平行であるときで，$k = 2$

iii) 3 直線が 1 点で交わるとき
直線 ② と直線 ③ の交点の座標は，
② と ③ の連立方程式を解いて　$(1,\ 3)$
このとき，点 $(1,\ 3)$ は直線 ① 上にあるから

$$3 = k \cdot 1 + 2k + 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{2}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{k = -1,\ 2,\ \frac{2}{3}}$

(3) $3^{-m} = \dfrac{1}{3^m}$ より　$3^m - \dfrac{20}{3^m} + 1 = 0$

$3^m = x$ とおくと　$x - \dfrac{20}{x} + 1 = 0$

両辺に x をかけて　$x^2 + x - 20 = 0$

$$(x+5)(x-4) = 0$$

$x > 0$ であるから　$x = 4$　　(答) $\boldsymbol{3^m = 4}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=-x^2+g(1)x+g(0)$ を微分すると

$$f'(x)=-2x+g(1)$$

$f'(1)=4$ より　$-2\cdot 1+g(1)=4$

すなわち　$g(1)=6$

よって　$f(x)=-x^2+6x+g(0)$　$\cdots$①

$f'(x)+g'(x)=0$ を x について積分すると

$$f(x)+g(x)=C \qquad \cdots ②$$

となる (C は定数).

①，② に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=g(0),\ f(0)+g(0)=C$$

上の 2 式から　$f(0)=g(0)=\dfrac{C}{2}$

$g(0)=\dfrac{C}{2}$ を ① に代入して　$f(x)=-x^2+6x+\dfrac{C}{2}$　$\cdots$③

③ を ② に代入して　$g(x)=x^2-6x+\dfrac{C}{2}$　$\cdots$④

$g(1)=6$ を ④ に代入して　$\dfrac{C}{2}=11$

したがって，③，④ から

$$\boldsymbol{f(x)=-x^2+6x+11,\ g(x)=x^2-6x+11}$$

(2) $f(x)$，$g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$-x^2+6x+11=x^2-6x+11$　これを解いて　$x=0,\ 6$

$0 \leqq x \leqq 6$ において $f(x) \geqq g(x)$ であるから，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^6 \{f(x)-g(x)\}\,dx \\
&= \int_0^6 \{(-x^2+6x+11)-(x^2-6x+11)\}\,dx \\
&= -2\int_0^6 x(x-6)\,dx \\
&= -2\times\left(-\frac{1}{6}\right)(6-0)^3 \\
&= \mathbf{72}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$a_{n+1} = ka_n - k + 1 \qquad \cdots ①$$

に対して，次の等式を満たす c を考える．

$$c = kc - k + 1 \qquad \cdots ②$$

② より $(k-1)c = k-1$ であるから，$c = 1$ とする．

① − ② から $\quad a_{n+1} - c = k(a_n - c)$

を上式に $c = 1$ を代入すると

$$a_{n+1} - 1 = k(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項が $a_1 - 1$，公比 k の等比数列であるから

$$a_n - 1 = (a_1 - 1)k^{n-1}$$

$a_1 = k$ より $\qquad \boldsymbol{a_n = (k-1)k^{n-1} + 1}$

(2) (1) の結果から $\quad a_3 = (k-1)k^{3-1} + 1$
$\qquad\qquad = k^3 - k^2 + 1$

$f(k) = k^3 - k^2 + 1\ (0 < k < 1)$ とすると

$$f'(k) = 3k^2 - 2k = k(3k-2)$$

k	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$	1	↘	極小 $\frac{23}{27}$	↗	1

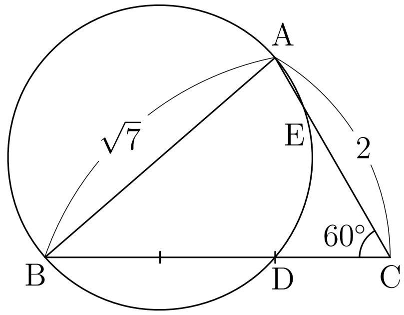
$f(k)$ の増減表は右のようになる．

したがって $\quad \boldsymbol{\frac{23}{27} \leqq a_3 < 1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) BC $= a$ とおいて，AB $= \sqrt{7}$，CA $= 2$，$\angle$C $= 60^\circ$ を余弦定理

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C$$

に適用すると



$$(\sqrt{7})^2 = a^2 + 2^2 - 2\cdot a\cdot 2\cos 60^\circ$$
$$7 = a^2 + 4 - 4a \times \frac{1}{2}$$
$$a^2 - 2a - 3 = 0$$
$$(a+1)(a-3) = 0$$

$a > 0$ であるから　**BC = 3**

(2) 辺BCを $2:1$ に内部する点がDであるから，CD $= 1$，$\angle$ADC $= 90^\circ$

したがって3点A，B，Dを通る円は，ABを直径とする円である．

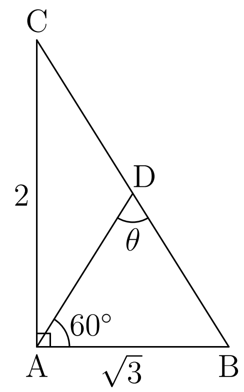
点Eは，円周上の点であるから，CA$\perp$BE

$$\mathrm{BE} = \mathrm{BC}\sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{CE} = \mathrm{BC}\cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{EA} = \mathrm{CA} - \mathrm{CE} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

したがって　$\triangle\mathrm{ABE} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{BE} \times \mathrm{EA}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{AD}=x$ とおくと



$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}x \quad \cdots ①$$
$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x \quad \cdots ②$$

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから，これに ①，② を代入して

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2$$

両辺に 4 をかけて　$3x+2x=4\sqrt{3}$

よって　$x=\frac{4}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{ABD}=\frac{3}{5}\sqrt{3}}$

(2) $\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$ より　$\sin B=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}=\frac{2}{\sqrt{7}} \quad \cdots ④$

$\triangle\mathrm{ABD}$ において，正弦定理を用いると

$$\frac{x}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$$
$$x\sin\theta=\sqrt{3}\sin B$$

③，④ を代入して　$\frac{4}{5}\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{7}}$

したがって　$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{5}{2\sqrt{7}}}$

【別解】(2) $\sin B=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\theta+B+60^\circ=180^\circ$ より $\theta=120^\circ-B$

したがって　$\sin\theta=\sin(120^\circ-B)$

加法定理により　$=\sin 120^\circ\cos B-\cos 120^\circ\sin B$

よって　$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{7}}}$