受験番号		氏名	

平成18年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学(平成18年1月30日)

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	応用化学科	○	○			○
	環境建設工学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**全学科**	○	○			○
生物生命学部	**全学科**	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

平成18年度　崇城大学一般入学試験問題(前期日程)1日目
数　　学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動して得られる放物線 $y=f(x)$ が2点 $(0,\ 2)$, $(1,\ 4)$ を通るとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y=\cos 2x-2\cos x+2\ (0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(3) k を定数とする。x についての方程式 $\log_2|x^2-2x-7|=k$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)=x^3-3x+2$ のグラフと直線 $y=x+2$ の3交点を左から順にA，B，Cとする。点Pが $f(x)$ のグラフ上をAからBまで動くとき，次の各問に答えよ。

(1) 点Pの x 座標を t とするとき，点Pから直線 $y=x+2$ までの距離を t で表せ。

(2) $\triangle$BPCの面積の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上にベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があり，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) $|\vec{a}-2\vec{b}|$ を求めよ。

(2) $\vec{c}$ が $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{c}-\vec{a}$ が $\vec{b}$ に平行であるとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 初項が2，公差が1の等差数列 $\{a_n\}$ がある。$b_n=2^{a_n}$，$c_n=a_nb_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2次関数 $y=f(x)$ のグラフが原点O，点 $\mathrm{P}(1,-1)$，点 $\mathrm{Q}(3,\ 9)$ を通るとき，線分OP，OQおよびこのグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 放物線 $y=3x^2$ を平行移動して得られる放物線は $y=3x^2+bx+c$ の形で表される．2 点 $(0,\ 2)$，$(1,\ 4)$ を通るので

$$2=3\cdot0^2+b\cdot0+c$$
$$4=3\cdot1^2+b\cdot1+c$$

よって　　$c=2,\ b+c=1$

これを解くと　　$b=-1,\ c=2$

したがって　　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-x+2}$

(2) $\cos 2x-2\cos x+2=(2\cos^2 x-1)-2\cos x+2$

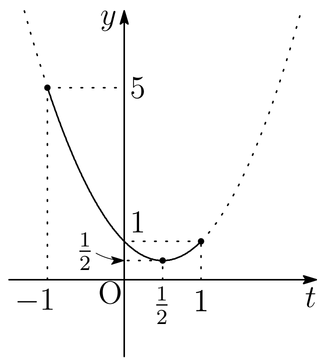
$$=2\cos^2 x-2\cos x+1$$

$\cos x=t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき $-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$y=2t^2-2t+1$$

すなわち

$$y=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$



よって　$t=-1$ で最大値 5 をとり，

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\cos x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=60^\circ$

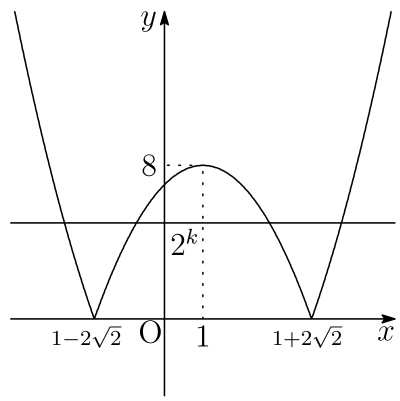
$t=-1$ のとき　$\cos x=-1$ より　$x=180^\circ$

したがって　$\boldsymbol{x=180^\circ}$ で**最大値 5** をとり，

$\boldsymbol{x=60^\circ}$ で**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

(3) $\log_2 |x^2-2x-7| = k$ から $|x^2-2x-7| = 2^k$

求める実数解の個数は，$y = |x^2-2x-7|$ のグラフと直線 $y = 2^k$ の共有点の個数に等しい．よって



$0 < 2^k < 8$　のとき　4 個

$2^k = 8$　のとき　3 個

$2^k > 8$　のとき　2 個

したがって

$k < 3$　のとき　4 個

$k = 3$　のとき　3 個

$k > 3$　のとき　2 個

【補足】

$x \leqq 1-2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2} \leqq x$　のとき　$x^2-2x-7 \geqq 0$

$1-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+2\sqrt{2}$　のとき　$x^2-2x-7 \leqq 0$

したがって

$x \leqq 1-2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2} \leqq x$　のとき　$|x^2-2x-7| = x^2-2x-7$

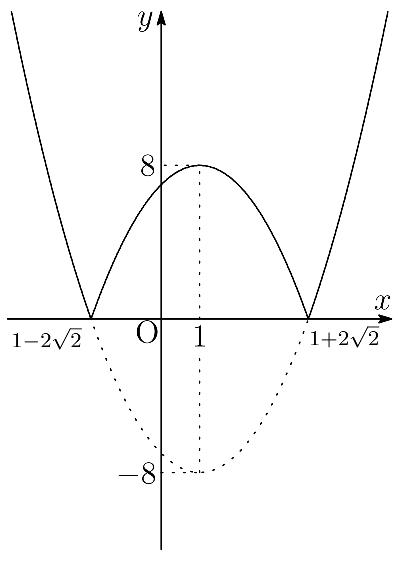
$1-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+2\sqrt{2}$　のとき　$|x^2-2x-7| = -(x^2-2x-7)$

よって，$y = x^2-2x-7 \quad \cdots ①$ に対して，$y = |x^2-2x-7|$ のグラフは，

$x \leqq 1-2\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2} \leqq x$　のとき　① のグラフに一致し，

$1-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+2\sqrt{2}$　のとき　① のグラフと x 軸に関して対称

以上のことから，$y = |x^2-2x-7|$ のグラフは，図の実線部分である．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x^3-3x+2$ のグラフと直線
$y=x+2$ の共有点の座標は,
連立方程式

$$\begin{cases} y=x^3-3x+2 \\ y=x+2 \end{cases}$$

を解いて,

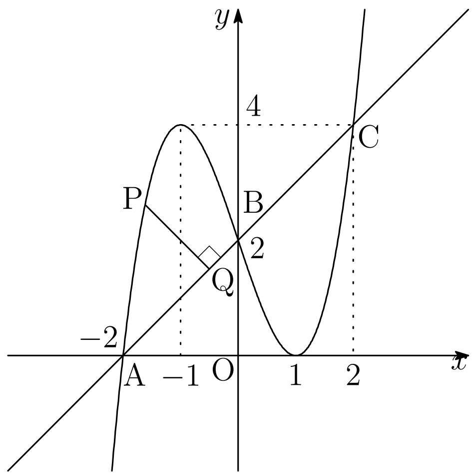
$$(x,\ y)=(-2,\ 0),\ (0,\ 2),\ (2,\ 4)$$

よって

$$\mathrm{A}(-2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 2),\ \mathrm{C}(2,\ 4)$$

このとき点 P の x 座標 t は

$$-2 \leqq t \leqq 0 \quad \cdots ①$$



点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-3t+2)$ から直線 $-x+y-2=0$ までの距離 PQ は,
① に注意して

$$\mathrm{PQ}=\frac{|-t+(t^3-3t+2)-2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{|t^3-4t|}{\sqrt{2}}=\frac{t^3-4t}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\mathrm{PQ}=\boldsymbol{\dfrac{t^3-4t}{\sqrt{2}}}$　$\boldsymbol{(-2 \leqq t \leqq 0)}$

【補足】 $t^3-4t=t(t+2)(t-2)$ であるから, $-2 \leqq t \leqq 0$ で $t^3-4t \geqq 0$
したがって, $-2 \leqq t \leqq 0$ のとき $|t^3-4t|=t^3-4t$

(2) $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 4)$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{BPC} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{PQ} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{t^3-4t}{\sqrt{2}} = t^3-4t \end{aligned}$$

$S(t)=t^3-4t\ (-2 \leqq t \leqq 0)$ とおいて, この関数の最大値を求めればよい.

$$\begin{aligned} S'(t) &= 3t^2-4 \\ &= 3\left(t^2-\tfrac{4}{3}\right) \\ &= 3\left(t+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

t	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{16}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

よって, $\boldsymbol{t=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ **で最大値** $\boldsymbol{\dfrac{16}{3\sqrt{3}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=10$ より　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$ であるから

$$2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=10$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

したがって　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$$=2^2-4\times1+4\times2^2=16$$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq0$ であるから　$\boldsymbol{|\vec{a}-2\vec{b}|=4}$

(2) $\vec{c}-\vec{a}$ は，$\vec{b}$ に平行であるから，実数 k を用いて

$$\vec{c}-\vec{a}=k\vec{b}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}\quad\cdots①$$

$\vec{c}\perp\vec{a}$ より $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot\vec{a}=0$$

$$|\vec{a}|^2+k\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2^2+k\times1=0$$

したがって　$k=-4$

① より　$\boldsymbol{\vec{c}=\vec{a}-4\vec{b}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$ より $b_n = 2^{n+1}$

b_n は初項 4，公比 2 の等比数列であるから，

この数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} = \boldsymbol{4(2^n - 1)}$$

(2) $c_n = a_n b_n = (n+1) \cdot 2^{n+1}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とし，

$S_n - 2S_n$ を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 4\cdot 2^4 + \cdots + n\cdot 2^n + (n+1)\cdot 2^{n+1} \\ -) & 2S_n = & \qquad\quad 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \cdots + (n-1)\cdot 2^n + n\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^{n+2} \\ \hline & -S_n = & 2\cdot 2^2 + (2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}) - (n+1)\cdot 2^{n+2} \end{array}$$

ここで，$2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$ は，初項 2^3，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = \frac{2^3(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+2} - 8$$

よって　$-S_n = 2\cdot 2^2 + (2^{n+2} - 8) - (n+1)\cdot 2^{n+2}$

整理して　$-S_n = -n\cdot 2^{n+2}$

したがって　$S_n = \boldsymbol{n\cdot 2^{n+2}}$

等比数列の和

初項 a，末項 l，公比 r の等比数列の和は $\boldsymbol{\dfrac{rl - a}{r - 1}}$

[**証明**]　末項 l は，$l = ar^{n-1}$ であるから

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{r\cdot ar^{n-1} - a}{r - 1} = \frac{rl - a}{r - 1}$$

[証終]

たとえば，$2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$ は，$a = 2^3$，$l = 2^{n+1}$，$r = 2$ から

$$\frac{rl - a}{r - 1} = \frac{2\cdot 2^{n+1} - 2^3}{2 - 1} = 2^{n+2} - 8$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．

グラフが3点 O(0, 0)，P(1, −1)，Q(3, 9) を通るから

$$0 = c \qquad \cdots ①$$
$$-1 = a + b + c \qquad \cdots ②$$
$$9 = 9a + 3b + c \qquad \cdots ③$$

① を ② に代入して　$a + b = -1$　$\cdots$ ④

① を ③ に代入して　$3a + b = 3$　$\cdots$ ⑤

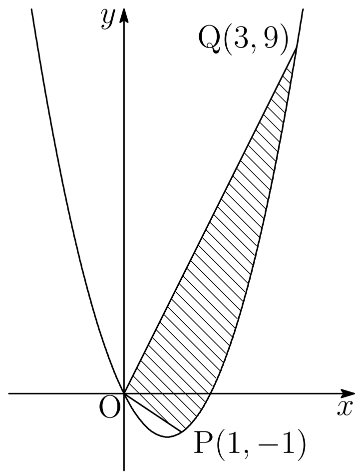
④，⑤ を解くと　$a = 2,\ b = -3$

よって　$f(x) = 2x^2 - 3x$

直線 OP の傾きは　$\dfrac{-1-0}{1-0} = -1$　より，直線 OP の方程式は　$y = -x$

直線 OQ の傾きは　$\dfrac{9-0}{3-0} = 3$　より，直線 OQ の方程式は　$y = 3x$

$y = 2x^2 - 3x$ のグラフと直線 OP で囲まれた図形の面積 S_1 は



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{-x - (2x^2 - 3x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^1 x(x-1)\,dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$y = 2x^2 - 3x$ のグラフと直線 OQ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 \{3x - (2x^2 - 3x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^3 x(x-3)\,dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3 = 9 \end{aligned}$$

よって，求める面積は，図の斜線部分であるから

$$S_2 - S_1 = 9 - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{26}{3}}$$