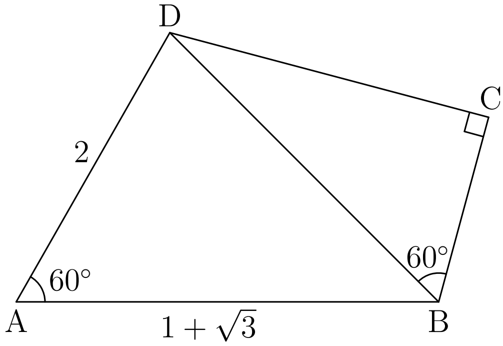
平成１８年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学 I (2 日目：平成 17 年 11 月 13 日) 60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = ax^2 + x - 3$ の最大値が 2 であるような定数 a の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ と $y = ax^2 + bx - 10$ の頂点が一致するような定数 a，b の値を求めよ。

(3) 右図において，辺 CD の長さを求めよ。



2 △ABC において，BC の中点を D とする。$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$，$\angle\mathrm{B} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) △ABC の面積を求めよ。

(2) CA の長さを求めよ。

3 関数 $y = -x^2 + 4x$ $(a \leqq x \leqq a + 4)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし，定数 a は $|a| \leqq 2$ とする。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次関数 $y=ax^2+x-3$ において，$y=2$ となる x の値は
$ax^2+x-3=2$ から，2 次方程式

$$ax^2+x-5=0$$

の解である．この方程式は重解をもつので，係数について

$$1^2-4a\cdot(-5)=0$$

整理すると　$1+20a=0$

$a<0$ に注意して　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{20}}$

(2) $y=2x^2-12x+17\cdots$① を変形すると

$$\begin{aligned}y&=2(x^2-6x)+17\\&=2\{(x-3)^2-3^2\}+17\\&=2(x-3)^2-1\end{aligned}$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は $(3,-1)$
放物線 $y=y=ax^2+bx-10\cdots$② の頂点の座標の座標は $(3,-1)$ である
から，② の右辺は，x^2 の係数に注意して次のようにかける．

$$ax^2+bx-10=a(x-3)^2-1$$

整理すると　$=ax^2-6ax+9a-1$

上式の係数を比較して　$b=-6a$，$-10=9a-1$
これを解いて　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=6}$

(3) △ABD に余弦定理を適用すると

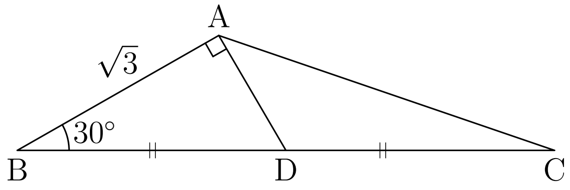
$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A\\&=(1+\sqrt{3})^2+2^2-2(1+\sqrt{3})\cdot2\cos60^\circ\\&=(4+2\sqrt{3})+4-4(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}\\&=8+2\sqrt{3}-2(1+\sqrt{3})\\&=6\end{aligned}$$

BD >0 であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{6}$
したがって　$\mathrm{CD}=\mathrm{BD}\sin60^\circ=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 右の図より

BD $= 2$ であるから BC $= 4$

よって，△ABC の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin B \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) AD $= 1$，DC $= 2$，∠ADB $= 120^\circ$ であるから，余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos\angle\mathrm{ADC} \\ &= 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ \\ &= 1 + 4 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

CA > 0 であるから　$\mathbf{CA} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$

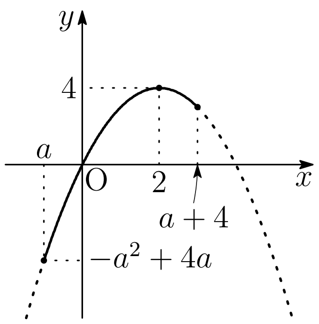
$\boxed{\mathbf{3}}$ $|a| \leqq 2$ から　$-2 \leqq a \leqq 2$

$y = -x^2 + 4x$ を変形すると　$y = -(x-2)^2 + 4$

$-2 \leqq a < 0$ のとき

$x = 2$ で**最大値 4**

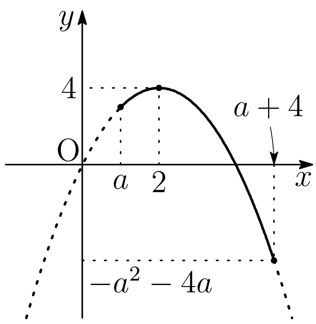
$x = a$ で**最小値 $\boldsymbol{-a^2 + 4a}$**



$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

$x = 2$ で**最大値 4**

$x = a + 4$ で**最小値 $\boldsymbol{-a^2 - 4a}$**



[補足] $-2 \leqq a \leqq 0$ と $0 < a \leqq 2$ の場合に分けてもよい．