平成１８年度　崇城大学推薦入学試験問題 (専門高校)
数学I (1 日目：平成 17 年 11 月 12 日) 60 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y=-x^2-6ax+4$ の最大値が 5 以下となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{11}{2}$ と $y=2x^2+ax+b$ の頂点が一致するような定数 a，b の値を求めよ。

(3) x の整式 $(x+a)(x^2+b)(x^3+c)(x^4+x^2+d)$ を展開したとき，x^4 の係数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) CA を a で表せ。

(2) $\angle$A の大きさを求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 次方程式 $x^2-(a+2)x+a^2-3a+4=0$ の解を α，β とするとき，$1<\alpha<2<\beta$ を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2次関数 $y=-x^2-6ax+4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2+6ax)+4 \\ &= -\{(x+3a)^2-(3a)^2\}+4 \\ &= -(x+3a)^2+9a^2+4 \end{aligned}$$

よって，2次関数 $y=-x^2-6ax+4$ は $x=-3a$ で最大値 $9a^2+4$ をとる．
この2次関数の最大値は5以下であるから

$$9a^2+4 \leqq 5$$

整理して $$9a^2-1 \leqq 0$$

$$(3a+1)(3a-1) \leqq 0$$

したがって $$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{3}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{11}{2}\cdots①$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{(x-3)^2-3^2\}+\frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は $(3,\ 1)$
放物線 $y=2x^2+ax+b\cdots②$ の頂点の座標の座標は $(3,\ 1)$ であるから，
② の右辺は，x^2 の係数に注意して次のようにかける．

$$2x^2+ax+b = 2(x-3)^2+1$$

整理すると $$= 2x^2-12x+19$$

上式の係数を比較して，$\boldsymbol{a=-12}$，$\boldsymbol{b=19}$

(3) $$(x+a)(x^2+b) = x^3+ax^2+bx+ab$$
$$(x^3+c)(x^4+x^2+d) = x^7+x^5+cx^4+dx^3+cx^2+cd$$

であるから
$(x+a)(x^2+b)\times(x^3+c)(x^4+x^2+d)$ の x^4 の項は

$$ax^2\times cx^2,\ bx\times dx^3,\ ab\times cx^4$$

したがって，x^4 の係数は $\boldsymbol{ac+bd+abc}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 余弦定理 $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$ により

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a \times a\cos 30^\circ \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}a^2 + a^2 - (\sqrt{3}+1)a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{CA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}a}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right)^2 - a^2}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}a \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 - a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2 \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

したがって，$\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　　$A = 45^\circ$

【別解 (2)】 $b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと　正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

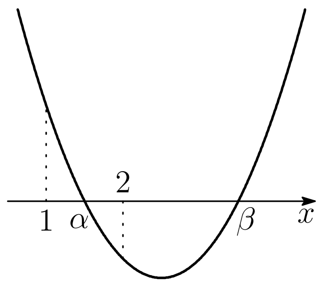
$$a\sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}a\sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす A の値は　$A = 45^\circ$，135°

ここで，$b < a < c$ より $B < A < C$ であるから　$A = 135^\circ$ は不適.

よって　　$\boldsymbol{A = 45^\circ}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)=x^2-(a+2)x+a^2-3a+4$ とおくと，
x^2 の係数が正であるから $f(x)=0$ の解 α，β
が $1<\alpha<2<\beta$ を満たすとき



$$f(1)>0 \quad \text{かつ} \quad f(2)<0$$

であればよいから

$$1^2-(a+2)\cdot 1+a^2-3a+4>0$$
$$2^2-(a+2)\cdot 2+a^2-3a+4<0$$

したがって，次の連立不等式を解けばよい．

$$\begin{cases} a^2-4a+3>0 \\ a^2-5a+4<0 \end{cases}$$

第 1 式から　$a<1,\ 3<a$　$\cdots$①
第 2 式から　$1<a<4$　$\cdots$②

よって，① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{3<a<4}$