平成18年度　崇城大学　薬学部　一般入学試験問題(後期日程)
数学I・数学II・数学A・数学B(平成18年3月14日)80分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y=(x-p)^2+p$ が3点 A(0, 3)，B(0, 2)，C(1, 3) を頂点とする△ABC と共有点をもつような定数 p の値の範囲を求めよ。

(2) 1，2，2，3，3，3 の6個の数字を使って整数をつくる。次の各問に答えよ。

(a) 3桁の整数は何個できるか。

(b) 3の倍数である4桁の整数は何個できるか。

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上の点 P$(-1,\ 1)$，Q$(2,\ 4)$ を結ぶ線分 PQ とこの放物線で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) (1) の図形の面積を二等分する原点を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ xy 平面において，x 座標，y 座標の値が共に整数である点を格子点という。放物線 $y=x^2$ と直線 $y=n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれる領域(境界を含む)内の格子点の個数を a_n とする。次の各問に答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 の値を求めよ。また，a_n-a_{n-1} を n を用いて表せ。

(2) a_n を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=(x-p)^2+p$ とおく.

y 軸との共有点の y 座標によって，次の場合分けを行う.

［1］ y 軸との共有点が点 B より下側にある場合

$$\begin{cases} f(0)<2 \\ f(1) \geqq 3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} p^2+p<2 \\ p^2-p+1 \geqq 3 \end{cases}$$

これを解いて　$-2<p \leqq -1$

［2］ y 軸との共有点が線分 AB 上にある場合

$$2 \leqq f(0) \leqq 3 \quad \text{すなわち} \quad 2 \leqq p^2+p \leqq 3$$

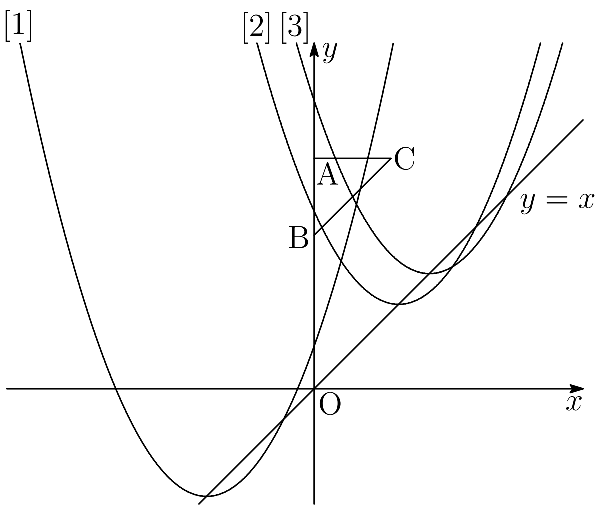
これを解いて　$\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \leqq p \leqq -2,\ 1 \leqq p \leqq \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

［3］ y 軸との共有点が点 A より上側にある場合

$$\begin{cases} f(0)>3 \\ f(1) \leqq 3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} p^2+p>3 \\ p^2-p+1 \leqq 3 \end{cases}$$

これを解いて　$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}<p \leqq 2$

［1］［2］［3］より　$\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \leqq p \leqq -1,\ 1 \leqq p \leqq 2}$



(2) (a) $\{1, 2, 3\}$ を用いる組合せは　$3!$　(個)

$\{1, 2, 2\}$，$\{1, 3, 3\}$，$\{2, 2, 3\}$，$\{2, 3, 3\}$ を用いる組合せは

それぞれ　${}_3\mathrm{C}_1$　(個)

$\{3, 3, 3\}$ を用いる組合せは　1　(個)

したがって　$3! + 4 \times {}_3\mathrm{C}_1 + 1 = \mathbf{19}$　(個)

(b) 3 の倍数となる 4 桁の整数は $\{1, 2, 3, 3\}$ を用いる組合せであるから

$$\frac{4!}{1!1!2!} = \mathbf{12} \quad (\text{個})$$

0 以上の整数 A に対して次のことが成り立つ．

A が 3 の倍数　$\Longleftrightarrow$　A の各位の数字の和が 3 の倍数
A が 9 の倍数　$\Longleftrightarrow$　A の各位の数字の和が 9 の倍数

[**証明**]　4 桁の数 $A = 1000a + 100b + 10c + d$ の場合で示すと

$$\begin{aligned} A &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 9(111a + 11b + c) + a + b + c + d \end{aligned}$$

ゆえに，$a + b + c + d$ が 3 の倍数 (9 の倍数)$\Longleftrightarrow$$A$ が 3 の倍数 (9 の倍数)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 PQ の方程式は　$y = x + 2$

線分 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x+2) - x^2\}\,dx$$
$$= -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(2) (1) の図形の面積を二等分する原点を通る直線と直線 $y = x + 2$ の交点 A の座標を $(a,\ a+2)$，直線 $y = x + 2$ と y 軸との交点を B とおく．

線分 OB，BP と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

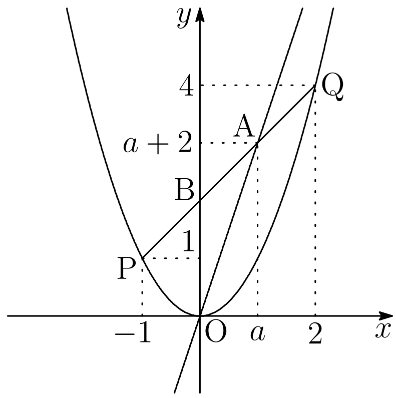
$$S_1 = \int_{-1}^{0} \{(x+2) - x^2\}\,dx = \frac{7}{6}$$

$S_1 + \triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}S$ であるから

$$\frac{7}{6} + \frac{1}{2} \times 2 \times a = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}$$

これを解いて　$a = \dfrac{13}{12}$

よって，点 A の座標は $\left(\dfrac{13}{12},\ \dfrac{37}{12}\right)$



したがって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y = \dfrac{37}{13}x}$

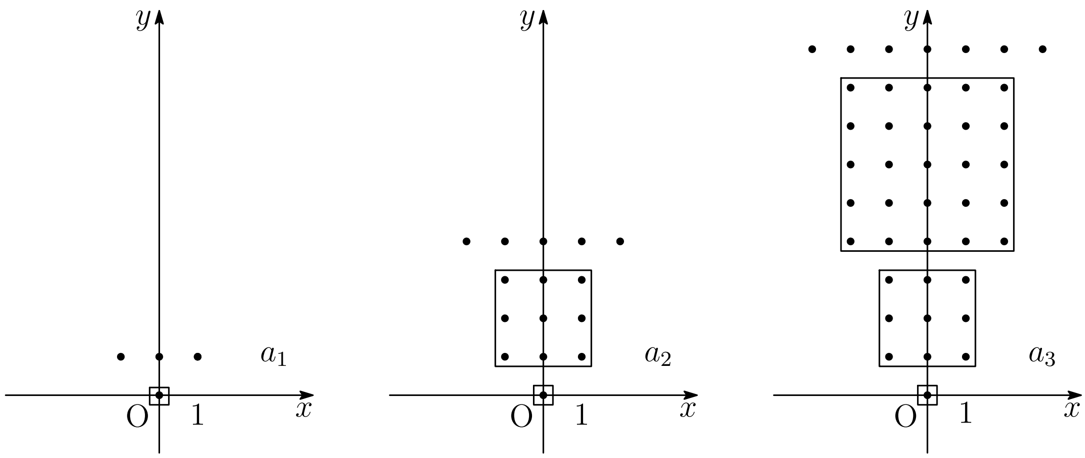
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$a_1 = 1^2 + (2{\cdot}1 + 1) = 4$$
$$a_2 = 1^2 + 3^2 + (2{\cdot}2 + 1) = 15$$
$$a_3 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + (2{\cdot}3 + 1) = 42$$

上の式から

$$a_2 - a_1 = 3^2 + 2,\ \ a_3 - a_2 = 5^2 + 2,\ \ \cdots,\ \ a_n - a_{n-1} = (2n-1)^2 + 2$$

よって　$\boldsymbol{a_n - a_{n-1} = 4n^2 - 4n + 3}$



(2) $a_{k+1} - a_k = (2k+1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k^2 + 4k + 3) \\ &= 4 + 4 \times \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} \\ &\qquad + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} + 3(n-1) \\ &= 4 + \frac{2}{3}n(n-1)(2n-1) + 2n(n-1) + 3n - 3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(4n^3 + 5n + 3)} \end{aligned}$$