平成１８年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学I・数学II (2日目：平成17年11月13日) 60分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ の頂点が直線 $y = x$ より上にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$x^2 - x - 1$ および x^4 の値を求めよ。

(3) 関数 $y = -(\log_3 x)^2 + k \log_3 x^2 - 6$ は $x = \dfrac{1}{27}$ のとき最大値をとる。k の値およびその最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点をOとし，x 軸上にA(8, 0)，y 軸上にB(0, 4) をとる。点P(4, −4) を通る直線 ℓ が線分OA，AB と交わる点をそれぞれQ，R とする。ただし，Q，R はO，A，B とは一致しないものとする。4 点O，Q，R，B が同一円周上にあるとき，次の各問に答えよ。

(1) ∠PRB の大きさと直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 4 点O，Q，R，B を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y = 2x^2$ について，次の各問に答えよ。

(1) この放物線の点 (2, 8) における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線を y 軸方向に 2 だけ平行移動した直線とこの放物線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 4ax) + 5a^2 - 3 \\ &= \{(x-2a)^2 - (2a)^2\} + 5a^2 - 3 \\ &= (x-2a)^2 + a^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって，放物線 $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ の頂点は $(2a,\ a^2-3)$
この放物線の頂点が直線 $y = x$ より上にあるので
頂点 $(2a,\ a^2-3)$ は不等式 $y > x$ を満たす.

したがって　$a^2 - 3 > 2a$
整理して　$a^2 - 2a - 3 > 0$
すなわち　$(a+1)(a-3) > 0$
これを解いて　$\boldsymbol{a < -1,\ 3 < a}$

(2) $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\cdots$① であるから

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

したがって，$x^2 - x - 1 = \mathbf{0}$ $\cdots$②
右の割り算から

$$\begin{array}{r} x^2 \ +x \ +2 \\ x^2 - x - 1 \,\big)\, x^4 \qquad\qquad \\ x^4 - x^3 - x^2 \qquad \\ \hline x^3 + x^2 \qquad \\ x^3 - x^2 \ - x \\ \hline 2x^2 \ + x \\ 2x^2 - 2x - 2 \\ \hline 3x + 2 \end{array}$$

$$x^4 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 2) + 3x + 2$$

② から　$= 0 \times (x^2 + x) + 3x + 2$
　　　　$= 3x + 2$

① から　$= 3 \times \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + 2 = \boldsymbol{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

(3) $t=\log_3 x \cdots①$ とおくと，$y=-(\log_3 x)^2+k\log_3 x^2-6$ は

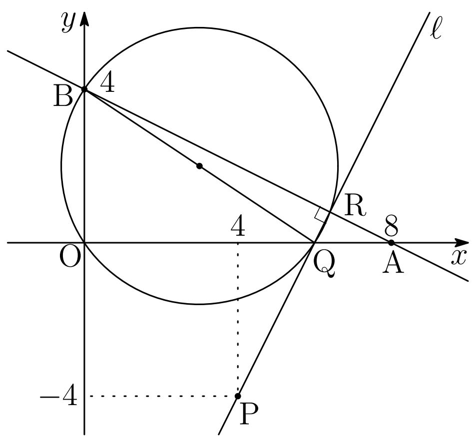
$$\begin{aligned} y &= -(\log_3 x)^2+2k\log_3 x-6 \\ &= -t^2+2kt-6 \\ &= -(t^2-2kt)-6 \\ &= -\{(t-k)^2-k^2\}-6 \\ &= -(t-k)^2+k^2-6 \end{aligned}$$

したがって，$t=k$ で，最大値 k^2-6 をとる．

① より $x=\dfrac{1}{27}$ のとき，すなわち $t=-3$ で最大値をとるので

よって　　$\boldsymbol{k=-3,}$　　最大値は　$k^2-6=(-3)^2-6=\mathbf{3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\angle\mathrm{BOQ}=90^\circ$ であるから，O，Q，R，B を通る円は BQ を直径とする円であるから　　$\angle\mathrm{PRB}=90^\circ$



直線 AB の傾きは

$$\frac{4-0}{0-8}=-\frac{1}{2}$$

直線 ℓ は直線 AB に垂直であるから，

直線 ℓ の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}m=-1 \text{ より } m=2$$

したがって，直線 ℓ は，点 P$(4,-4)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-(-4)=2(x-4) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-12}$$

(2) 点 Q は，直線 ℓ と線分 OA の交点であるから，

$y=2x-12$ に $y=0$ を代入して　$x=6$

したがって点 Q の座標は　$(6,\ 0)$

よって，求める円の方程式は線分 BQ を直径の両端とする円であり，その中心を C，半径を r とすると，C は線分 BQ の中点であるから

$$\left(\frac{0+6}{2},\ \frac{4+0}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 2)$$

また　　$r=\mathrm{BC}=\sqrt{(3-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{13})^2$$

すなわち　　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=13}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=2x^2$ とすると，点 $(2,\ 8)$ における接線の傾きは $f'(2)$ である．

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=4x$

$$f'(2)=4\times 2=8$$

ゆえに，求める接線は点 $(2,\ 8)$ を通り，傾き 8 の直線であるから

$$y-8=8(x-2)\quad すなわち\quad \boldsymbol{y=8x-8}$$

(2) (1) の接線を y 軸方向に 2 だけ平行移動した直線の方程式は

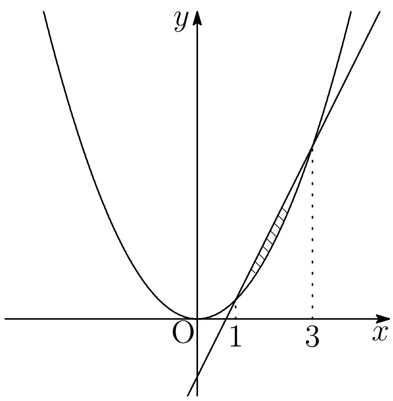
$$y=8x-8+2\quad すなわち\quad y=8x-6$$

放物線と直線の交点の x 座標は，方程式

$$2x^2=8x-6$$

を解いて　　$x=1,\ 3$

右の図から，求める面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\{(8x-6)-2x^2\}\,dx\\&=-2\int_1^3(x-1)(x-3)\,dx\\&=-2\times\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\boldsymbol{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

重要な定積分

α，β を実数とする．

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

[**証明**]

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\&=\int_\alpha^\beta x^2\,dx-(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta x\,dx+\alpha\beta\int_\alpha^\beta dx\\&=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$