平成１８年度　崇城大学推薦入学試験問題 (普通高校)
数学 I・数学 II (1 日目：平成 17 年 11 月 12 日) 60 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = -x^2 + 2x + 1$ と同じ頂点をもち，点 $(3,\ 6)$ を通るグラフをもつ 2 次関数を求めよ。

(2) $x + y = 10$，$\log_3 x + \log_3 y = 1$ のとき，$x^2 + y^2$ の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC において，AB $= 2$，$\angle$B $= 60^\circ$ であり，外接円の半径が 3 であるとき，CA，BC の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 連立不等式 $y \geqq x(x-2)$，$y \leqq x$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$y - \dfrac{1}{4}x^2$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を正の定数とし，$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が $-1 < x < 3$ において，異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=-x^2+2x+1$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2-2x)+1 \\ &= -\{(x-1)^2-1^2\}+1 \\ &= -(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

したがって，放物線 $y=-x^2+2x+1$ の頂点は $(1,\ 2)$ である．
よって，放物線の頂点が点 $(1,\ 2)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-1)^2+2$$

の形に表される，このグラフが点 $(3,\ 6)$ を通るから

$$6=a(3-1)^2+2$$

よって　$6=4a+2$

これを解くと　$a=1$

したがって　$y=1(x-1)^2+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-2x+3}$

(2) $\log_3 x+\log_3 y=1$ から　$\log_3 xy=1$

したがって　$xy=3$

よって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$$=10^2-2\cdot 3=\mathbf{94}$$

(3) $\triangle$ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理 $\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2R$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{CA} &= 2R\sin B \\ &= 2\cdot 3\sin 60^\circ = 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\mathrm{BC} = a$ とする．余弦定理 $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$ により

$$\begin{aligned} (3\sqrt{3})^2 &= 2^2 + a^2 - 2\cdot 2\cdot a\cos 60^\circ \\ 27 &= 4 + a^2 - 4a\times\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって　　$a^2 - 2a - 23 = 0$

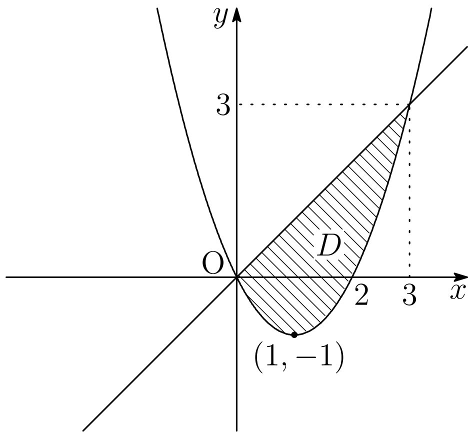
これを解いて　　$a = 1\pm 2\sqrt{6}$

$a > 0$ であるから　　$\mathrm{BC} = \boldsymbol{1+2\sqrt{6}}$

2 (1) 領域 D は

放物線 $y = x(x-2)$ の上側と
直線 $y = x$ の下側

の共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む.



(2) $$y - \frac{1}{4}x^2 = k \quad \cdots ①$$

とおく．放物線 ① と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は

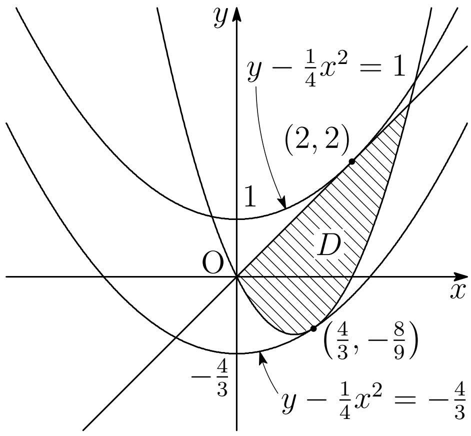
$$x - \frac{1}{4}x^2 = k$$

すなわち $\frac{1}{4}x^2 - x + k = 0 \quad \cdots ②$

であるから，係数について

$$(-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times k \geqq 0$$

これを解いて　　$k \leqq 1$



$k = 1$ のとき ② より $x = 2$ であり，接点 $(2,\ 2)$ は D に含まれる．

放物線 ① と放物線 $y = x(x-2)$ の共有点の x 座標は

$$x(x-2) - \frac{1}{4}x^2 = k$$

すなわち $\frac{3}{4}x^2 - 2x - k = 0 \quad \cdots ③$

であるから，係数について

$$(-2)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times (-k) \geqq 0$$

これを解いて　　$k \geqq -\frac{4}{3}$

$k = -\frac{4}{3}$ のとき ③ より $x = \frac{4}{3}$ であり，接点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ は D に含まれる．

放物線 ① が領域 D の点を通るときの k の値は

$(2,\ 2)$ を通るとき　$k = 1$,　　$\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ を通るとき　$k = -\frac{4}{3}$

これ以外で領域 D の点を通るとき　　$-\frac{4}{3} < k < 1$

したがって，$y - \frac{1}{4}x^2$ は

$x = 2$，$y = 2$　　のとき　**最大値 1**　　をとり，

$x = \frac{4}{3}$，$y = -\frac{8}{9}$　のとき　**最小値 $-\frac{4}{3}$**　をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y' = 6x^2 - 6ax$

$= 6x(x-a)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ a$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 a	$\searrow$	極小 $-a^3+a$	$\nearrow$

$a > 0$ より，この関数は

$x = 0$ で**極大値 $\boldsymbol{a}$**,

$x = a$ で**極小値 $\boldsymbol{-a^3+a}$**

をとる．

(2) $a > 0 \quad \cdots ①$ より

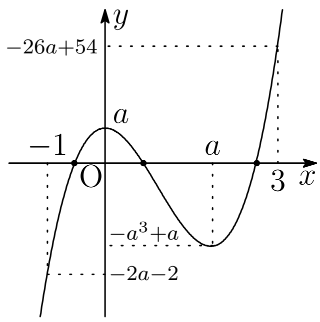
$f(-1) = -2a - 2 < 0$

$f(0) = a > 0$

であるから，$-1 < x < 3$ において，異なる 3 つの実数解をもつためには，

$a < 3 \quad \cdots ②,\ f(a) < 0,\ f(3) > 0$

を満たせばよい．



$f(a) < 0$ より
$$-a^3 + a < 0$$
$$a^3 - a > 0$$
$$a(a+1)(a-1) > 0$$
$$-1 < a < 0,\ 1 < a \quad \cdots ③$$

$f(3) > 0$ より
$$-26a + 54 > 0$$
$$a < \frac{27}{13} \quad \cdots ④$$

したがって，①，②，③，④ の共通する範囲を求めて

$$\boldsymbol{1 < a < \frac{27}{13}}$$