

入試の軌跡
崇城大学 数学
2006 - 2024
専門高校



2024 年 7 月 9 日

熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会

序

本書「入試の軌跡 県立技術短期大学校」は，熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会(工進連)がこれまでに蓄積した数学および英語の入学試験問題を元に作成したものである．本書は同会が管理する専用サイトに掲載しているものを，熊本工業高校(同会の事務局)英語科の了解により公開することができた．数学の解答および英語・数学の入力は編者が担当している．

編者はセンター試験にリスニングテストが導入された平成 18 年(2006 年)に熊本県教育委員会から ICT 事業を編者個人に委託され，授業で扱いやすいリスニング教材の作成を目指した．そこで大学入試センターが公開している PDF ファイル(問題)にプレイヤー付き音声ファイルを埋め込むことでオフラインでも利用可能となり，同時に問題・スクリプト・和訳・解答・解説にハイパーリンクを施すことで一体型の教材として授業や生徒個人で学習できるものを次に作成した．

ICT 教材(リスニング) <http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html>

また，発音・アクセント問題についても PDF ファイルに音声を埋め込み，オフラインで利用できるものも作成した．センター試験過去 30 年 60 回分(本試・追試)の発音・アクセント問題およびアクセントの基本法則を次に掲載している．これらを元にデータサイエンスの観点から分析及び対策を検討した．

過去問 60 回分 http://kumamoto.s12.xrea.com/eng/center_pro_acc.zip
アクセント法則 http://kumamoto.s12.xrea.com/eng/center_accent_rule.pdf
アクセント分析 http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2019_10_25.pdf

工進連情報共有化事業

- H8 熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会(工進連)が発足。会員校は、熊本工業高校、玉名工業高校、鹿本商工高校、翔陽高校、御船高校、小川工業高校、八代工業高校、水俣工業高校(現：水俣高校)、球磨工業高校、天草工業高校。
- H12 情報共有に必要なインフラが整備されたため、編者が勤務していた球磨工業高校進路指導部が中心となり、入試情報の共有化が開始される。ユーザー名およびパスワードが必要となる専用のサイトを開設する。以来20年余り編者が一人でサイトの管理・コンテンツの作成を担当する。
- H13 工進連模試(受験料無料)を編者が担当し、専用サイトに問題と解答を掲載する。各学校で印刷・監督・採点を行い、点数を球磨工業高校に報告して参加生徒全体の結果を各学校に返却する。得点と進路決定状況の追跡調査も実施した。
- H14 球磨工業高校が同会の事務局(事務局長は編者)を担当(～H15)
工業高校生の「進学への数学」を作成
- H15 工業高校生の「進学への英語」を荒木先生(現天草工業高校教頭)と共同で作成
- H17 「就職への数学Ⅰ・Ⅱ(問題集・解答集)」を作成
- H19 「就職への数学(総合編)」を作成
- H20 「日々の課題」を作成
- H23 「公務員合格対策ノート」を作成

ICT 事業

- H18 センターテストリスニング教材、発音・アクセント教材
数学授業教材(書き込みノート・解説・副教材)の電子文書化(PDF)
熊本県入試問題 H18(数学・英語)
- H19 熊本県入試問題 H19(数学・英語)
- H20 熊本県入試問題 H20(数学・英語)
- H21 熊本県入試問題 H21(数学・英語)
- H24 入試の軌跡 九大(数学)・熊大(数学・英語)
- H26 九州地区大学(数学)
- H28 難関大学(数学)
- H30 入試の軌跡 難関大学(数学)
入試の軌跡 九大(数学・英語)・熊大(数学・英語)

目次

序	i
工進連情報共有化事業	ii
ICT 事業	ii
第 1 章 崇城大学 (数学)	1
1.1 令和 6 年度推薦試験 (60 分)	1
1.2 令和 5 年度推薦試験 (60 分)	4
1.3 令和 4 年度推薦試験 (60 分)	7
1.4 令和 3 年度推薦試験 (60 分)	10
1.5 令和 2 年度推薦試験 (60 分)	14
1.6 平成 31 年度推薦試験 (60 分)	17
1.7 平成 30 年度推薦試験 (60 分)	20
1.8 平成 29 年度推薦試験 (60 分)	22
1.9 平成 28 年度推薦試験 (60 分)	25
1.10 平成 27 年度推薦試験 (60 分)	28
1.11 平成 26 年度推薦試験 (60 分)	31
1.12 平成 25 年度推薦試験 (60 分)	34
1.13 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	37
1.14 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	40
1.15 平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	43
1.16 平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	46
1.17 平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	49
1.18 平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	52
1.19 平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	55
1.20 平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	58
1.21 平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	61
1.22 平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	64
1.23 平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	67
1.24 平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	70
1.25 平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目	73
1.26 平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目	77

第 1 章 崇城大学(数学)

1.1 令和 6 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $(x-1)^2 + 1 = 3(1-x)$ を解け.

(2) 連立 1 次不等式 $\begin{cases} 3x-1 < 2(x+2) \\ -3x+1 \leq 3-x \end{cases}$ を解け.

(3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ であり, 最も短い辺の長さが 8 であるとする. このとき, $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ.

2 放物線 $y = 2x^2 + ax + b$ (a, b は定数) について, 次の問に答えよ.

(1) この放物線が 2 点 $(-1, 12)$, $(2, 9)$ を通るように a, b の値を定めよ.

(2) この放物線が点 $(-2, 8)$ を通り, x 軸と接するように a, b の値を定めよ.
また, そのときの接点の座標を求めよ.

3 AD と BC が平行な台形において, $AB = 4$, $BC = 6$, $AD = 3$, $\angle ABC = 60^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

(1) 対角線 AC の長さ, および台形 $ABCD$ の面積を求めよ.

(2) $\triangle ABD$ の外接円の半径を求めよ.

解答例

1 (1) $(x-1)^2 = 3(1-x)$ を整理すると $x^2 + x - 1 = 0$

これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2) 連立不等式 $\begin{cases} 3x-1 < 2(x+2) \\ -3x+1 \leq 3-x \end{cases}$ から

$$\begin{cases} x < 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{よって} \quad -1 \leq x < 5$$

(3) $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$ より $C = 180^\circ - (A+B) = 45^\circ$

$C < B < A$ であるから $c < b < a$ ゆえに $c = 8$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = 2R$ より

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

2 (1) 放物線 $y = 2x^2 + ax + b$ は 2 点 $(-1, 12)$, $(2, 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 12 = 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b \\ 9 = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b \end{cases} \quad \text{整理すると} \quad \begin{cases} -a + b = 10 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

これを解いて $a = -3$, $b = 7$

(2) 放物線 $y = 2x^2 + ax + b$ は点 $(-2, 8)$ を通るから

$$8 = 2(-2)^2 + a(-2) + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a \quad \dots \textcircled{1}$$

また, x 軸との接点の x 座標は $x = -\frac{a}{2 \cdot 2} = -\frac{a}{4} \quad \dots \textcircled{2}$

放物線 $y = 2x^2 + ax + 2a$ が x 軸に接するから, 係数について

$$a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-16) = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = 0, 16$$

これを ①, ② に代入して

$$(a, b) = (0, 0) \text{ のとき接点 } (0, 0),$$

$$(a, b) = (16, 32) \text{ のとき接点 } (-4, 0)$$

- 3** (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

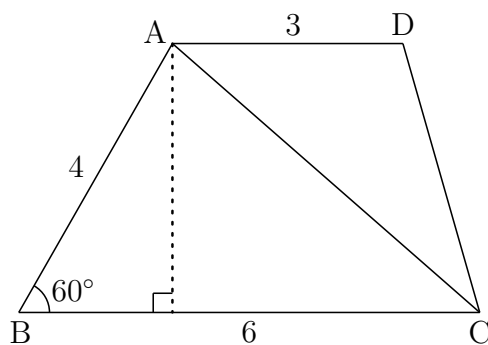
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ \\ &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 28 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ より } AC = 2\sqrt{7}$$

$$\text{台形 } ABCD \text{ の高さを } h \text{ とすると } h = AB \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

台形 $ABCD$ の体積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}(3+6) \cdot 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$



- (2) $AD \parallel BC$ より, $\angle BAD = 120^\circ$

$\triangle BAD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 120^\circ = 16 + 9 + 12 = 37$$

$\triangle ABD$ の外接円の円の半径を R とすると, 正弦定理により

$$R = \frac{BD}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

1.2 令和5年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) $x^2 - y^2 + 8x - 4y + 12$ を因数分解せよ.
- (2) 放物線 $y = 2x^2 + 4x + 3$ を x 軸方向に a , y 軸方向に $a + 1$ だけ平行移動したとき, x 軸と接する. このときの a の値および接点の座標を求めよ.
- (3) 3 辺の長さが 5, 6, 7 である三角形の内角のうち最も小さい角を θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.

2 2 次関数 $y = x^2 + 3x + a$ (a は定数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) $a = 1$ のとき, この 2 次関数グラフと x 軸の共有点の座標を求めよ.
- (2) この 2 次関数のグラフと x 軸が, $x < 0$ の範囲において, 異なる共有点をもつような a の値の範囲を求めよ.

3 平行四辺形 ABCD において, $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 3$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) $\cos \angle ABC$ の値と対角線 BD の長さを求めよ.
- (2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad & \text{与式} = x^2 + 8x - (y^2 + 4y - 12) \\ & = x^2 + 8x - (y + 6)(y - 2) \\ & = (x - y + 2)(x + y + 6) \end{aligned}$$

- (2) $y = 2x^2 + 4x + 3 = 2(x + 1)^2 + 1$ の頂点は $(-1, 1)$
 この頂点を x 軸方向に a , y 軸方向に $a + 1$ だけ平行移動した点は

$$(-1 + a, 1 + a + 1) \quad \text{すなわち} \quad (a - 1, a + 2)$$

この点が x 軸との接点であるから

$$a + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -2 \quad \text{よって, 接点は} \quad (-3, 0)$$

- (3) 求める角 θ は, 辺の長さが最も小さい辺に対する対角であるから

$$\cos \theta = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

- $\boxed{2} \quad (1) \quad a = 1$ のとき, $y = x^2 + 3x + 1$
 この放物線と x 軸との共有点の x 座標は

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって, 求める共有点の座標は} \quad \left(\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

- (2) $y = x^2 + 3x + a$ より $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{9}{4}$ 頂点が $\left(-\frac{3}{2}, a - \frac{9}{4}\right)$ で, y 軸との共有点の y 座標が a であるから, $x < 0$ の範囲で異なる2つの共有点をもつための条件は

$$a - \frac{9}{4} < 0, \quad a > 0 \quad \text{よって} \quad 0 < a < \frac{9}{4}$$

3 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \theta = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{2^2 + 3^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

また, $\angle BAD = 180^\circ - \theta$, $AD = BC$ であるから

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 17 \end{aligned}$$

よって $BD = \sqrt{17}$

(2) (1) の結果から

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

求める平行四辺形の面積は $2S$ であるから

$$2S = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

1.3 令和4年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$ を因数分解せよ.
- (2) 不等式 $|2x - 11| < x + 1$ を解け.
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $2\cos\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ を求めよ.

2 放物線 $y = x^2 + ax + a + 3$ (a は定数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) $a = 1$ のとき, この放物線を, x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ.
- (2) この放物線が x 軸と接するとき, a の値を求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$, $\angle B = 30^\circ$ である. 辺 BC 上に $\angle ADB = 120^\circ$ となる点 D をとるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 辺 AC と線分 AD の長さを求めよ.
- (2) $\triangle ADC$ の面積を求めよ.

解答例

- 1** (1) $A = x^2 + 2x$ とすると

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= A^2 - 2A - 3 \\
 &= (A + 1)(A - 3) \\
 &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) \\
 &= (x + 1)^2(x + 3)(x - 1)
 \end{aligned}$$

- (2) $|2x - 11| < x + 1$ より, $-(x + 1) < 2x - 11 < x + 1$ であるから

$$\begin{cases} -(x + 1) < 2x - 11 \\ 2x - 11 < x + 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} x > \frac{10}{3} \\ x < 12 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad \frac{10}{3} < x < 12$$

- 2** (1) $a = 1$ のとき, 放物線の方程式は $y = x^2 + x + 4$

この放物線を x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は, 元の放物線の x を $x - 1$ に, y を $y - (-3)$ に置き換えることで得られる.

$$y - (-3) = (x - 1)^2 + (x - 1) + 4 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - x + 1$$

- (2) 放物線 $y = x^2 + ax + a + 3$ が x 軸に接するとき, 係数について

$$D = a^2 - 4 \cdot 1(a + 3) = a^2 - 4a - 12 = (a + 2)(a - 6) = 0$$

$$\text{よって} \quad a = -2, 6$$

接点の x 座標は $-\frac{a}{2}$ であるから, 接点の座標は

$$a = -2 \text{ のとき } (1, 0), \quad a = 6 \text{ のとき } (-3, 0)$$

3 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= (\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cos 30^\circ \\ &= 3 + 16 - 12 = 7 \end{aligned}$$

よって $AC = \sqrt{7}$

また、正弦定理により

$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \quad \text{よって} \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \cdot \sin 30^\circ = 1$$

(2) $\angle ABD = \angle BAD$ より、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから

$$BD = AD = 1$$

点Dは辺BCを1:3に内分するから

$$\triangle ADC = \frac{3}{4} \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

1.4 令和3年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

(1) 3点 $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(3, -10)$ を通る放物線の方程式を求めよ.

(2) $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ の値を求めよ.

(3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$ とする. $AB = \sqrt{3}$ のとき, 残りの2辺の長さを求めよ.

2 $f(x) = ax^2 + (a - 1)x + a$ (a は定数, $a \neq 0$) とする. 次の各問に答えよ.

(1) $a = -1$ のとき, 2次関数 $y = f(x)$ の $-2 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ.

(2) x のどのような値に対しても $f(x) > 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 3$, $AC = 8$, $\angle A = 60^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

(1) 辺 BC の長さと $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(2) $\angle A$ の2等分線と辺 BC の交点を D とするとき, 線分 AD の長さを求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = ax^2 + bx + c$ とすると, 3点 $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(3, -10)$ を通るから

$$\begin{cases} 6 = a + b + c & \cdots \textcircled{1} \\ 1 = 4a + 2b + c & \cdots \textcircled{2} \\ -10 = 9a + 3b + c & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } 3a + b = -5 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ より } 5a + b = -11 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解いて } a = -3, b = 4$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$6 = -3 + 4 + c \quad \text{これを解いて } c = 5$$

$$\text{よって } y = -3x^2 + 4x + 5$$

$$(2) a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ より}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{したがって } a + \frac{1}{a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3$$

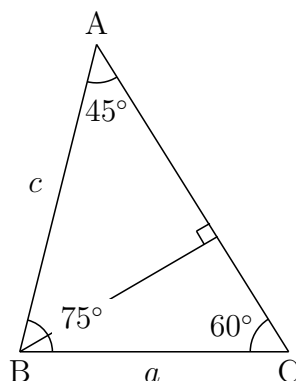
$$\text{よって } a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$(3) \ c = \sqrt{3}$$

$$A = 45^\circ, \ B = 75^\circ \text{ より } C = 180^\circ - (A + B) = 60^\circ$$

$$\text{正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ により } \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$a = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$$



第1余弦定理により

$$\begin{aligned} b &= c \cos A + a \cos C = \sqrt{3} \cos 45^\circ + \sqrt{2} \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

2 (1) $a = -1$ のとき $f(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$ ($-2 \leq x \leq 1$)

よって 最大値 $f(-1) = 0$, 最小値 $f(1) = -4$

(2) $f(x) = ax^2 + (a-1)x + a$ ($a \neq 0$) がすべての実数 x について $f(x) > 0$ である条件は, x^2 の係数および判別式 D の符号について

$$(*) \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)^2 - 4a \cdot a < 0 \end{cases}$$

(*) の第2式を整理すると

$$3a^2 + 2a - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3a-1)(a+1) > 0$$

$$\text{これを解いて } a < -1, \ \frac{1}{3} < a$$

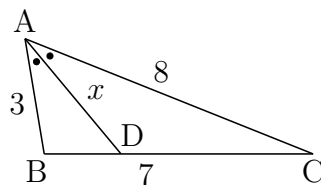
$$\text{上式と (*) の第1式から } a > \frac{1}{3}$$

- 3** (1) $b = 8$, $c = 3$, $A = 60^\circ$ に余弦定理を適用すると

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49$$

よって $BC = a = 7$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$$



- (2) $x = AD$ とおくと, $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8 \sin 30^\circ &= 6\sqrt{3} \\ \frac{3}{4}x + 2x &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

これを解いて $AD = x = \frac{24}{11}\sqrt{3}$

1.5 令和2年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) $x^2y - x^2z + xy^2 + y^2z$ を因数分解せよ.
- (2) x の関数 $y = x^2 - 2ax + 4a + 3$ の最小値が -2 のとき, 正の定数 a の値を求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $CA = 2$ であるとき, 辺 BC の長さ と $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めよ.

2 $f(x) = x^2 + (a+3)x + 2$ (a は定数) とする. 次の各問に答えよ.

- (1) $a = 2$ のとき, 2 次関数 $y = f(x)$ の最大値または最小値を求めよ.
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 8$, $BC = 9$, $CA = 7$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) $\cos B$ と $\sin B$ の値を求めよ.
- (2) 辺 BC 上に $BD = 3$ となる点 D をとるとき, $\triangle ABD$ の外接円の半径 R を求めよ.

解答例

- 1 (1) (最も次数の低い z に着目する)

$$\begin{aligned}
 x^2y - x^2z + xy^2 + y^2z &= x^2y + xy^2 - z(x^2 - y^2) \\
 &= xy(x + y) - z(x + y)(x - y) \\
 &= (x + y)\{xy - z(x - y)\} \\
 &= (x + y)(xy + yz - zx)
 \end{aligned}$$

(2) $y = x^2 - 2ax + 4a + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 4a + 3$

最小値が -2 であるから

$$-a^2 + 4a + 3 = -2 \quad \text{整理すると} \quad a^2 - 4a - 5 = 0$$

ゆえに $(a + 1)(a - 5) = 0$ $a > 0$ であるから $a = 5$

(3) $A = 120^\circ$, $B = 45^\circ$, $b = 2$ を正弦定理に適用すると

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R$$

ゆえに $BC = a = \frac{2 \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$$2R = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \text{よって} \quad R = \sqrt{2}$$

- 2 (1) $a = 2$ のとき

$$f(x) = x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

よって $x = -\frac{5}{2}$ で最小値 $-\frac{17}{4}$, 最大値なし

(2) 2 次方程式 $x^2 + (a + 3)x + 2 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$(a + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 3 + 2\sqrt{2})(a + 3 - 2\sqrt{2}) > 0$$

これを解いて $a < -3 - 2\sqrt{2}$, $-3 + 2\sqrt{2} < a$

3 (1) $a = 9$, $b = 7$, $c = 8$ を余弦定理に適用すると

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{96}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos B \\ &= 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 41 \end{aligned}$$

したがって $BD = \sqrt{41}$

正弦定理により $2R = \frac{AD}{\sin B}$

$$2R = \frac{AD}{\sin B} = \sqrt{41} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{41} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{205}}{5}$$

よって $R = \frac{3\sqrt{205}}{10}$

1.6 平成 31 年度推薦試験 (60 分)

1 次の問に答えよ.

- (1) 放物線 $y = x^2 + ax + 3$ が点 $(1, 6)$ を通るとき, 定数 a の値を求めよ. また, この放物線を x 軸方向に 3, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ.
- (2) $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき, $a^2 + a - 1$ の値を求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ において, $AB = 3$, $BC = 2$, $AC = 4$ であるとき, $\cos A$ の値と $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

2 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a + 4$ (a は定数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) $a = -3$ のとき, この 2 次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ.
- (2) この 2 次関数の最小値が 2 以上になるように, a の値の範囲を求めよ.

3 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ において, $AB = 5$, $BC = 6$, $AD = 3$, $\angle ABC = 60^\circ$ であるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 対角線 AC , BD の長さを求めよ.
- (2) $\triangle ACD$ の面積を求めよ.

解答例

- 1** (1) 放物線 $y = x^2 + ax + 3$ が点 $(1, 6)$ を通るから

$$6 = 1^2 + a \cdot 1 + 3 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

放物線の方程式は, $y = x^2 + 2x + 3$ であるから

$$y = (x + 1)^2 + 2 \quad \text{頂点の座標は} \quad (-1, 2)$$

平行移動後の頂点は $(-1 + 3, -1 + 2)$, すなわち, $(2, 1)$

よって, 求める放物線の方程式は, x^2 の係数に注意して

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

- (2) $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ より, $2a + 1 = \sqrt{5}$ の両辺を平方すると

$$(2a + 1)^2 = 5 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + a - 1 = 0$$

- (3) $a = 2, b = 4, c = 3$ より, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\sin A > 0 \text{ より} \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

- 2** (1) $a = -3$ のとき, 2次関数は $y = x^2 + 6x + 1$

このグラフの x 軸との共有点の x 座標は, $x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

- (2) $y = x^2 - 2ax + a + 4$ より $y = (x - a)^2 - a^2 + a + 4$

この2次関数の最小値が2以上であるから

$$-a^2 + a + 4 \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - a - 2 \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad (a + 1)(a - 2) \leq 0 \quad \text{よって} \quad -1 \leq a \leq 2$$

3 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 31$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{31}$$

$AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$ より, $\angle BAD = 120^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 120^\circ \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \end{aligned}$$

$$BD > 0 \text{ であるから } BD = 7$$

(2) A から BC に下ろした垂線 AH を引くと

$$AH = AB \sin B = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } \triangle ACD = \frac{1}{2}AD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$$

1.7 平成30年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

(1) $(x+1)(x-3)(2x^2+x-1)$ を展開せよ.

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ および $\sin \theta + \cos \theta$ を求めよ.

(3) $x+1=y$ のとき, $x(y+3)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ. また, $-4x^2+y^2$ の最大値とそのときの x の値を求めよ.

2 放物線 $y = x^2 + (a+3)x + 5$ (a は定数) について, 次の各問に答えよ.

(1) $a = 1$ のとき, この放物線を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ.

(2) この放物線が x 軸と共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 4$, $\angle B = 45^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

(1) 辺 AC の長さ と $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(2) 辺 BC 上に $\angle ADB = 120^\circ$ であるように点 D をとるとき, 線分 AD の長さを求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (x+1)(x-3)(2x^2+x-1) = (x^2-2x-3)(2x^2+x-1) \\ = 2x^4 - 3x^2 - 9x^2 - x + 3$$

$$(2) \quad \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の両辺を平方すると}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

上式および $\sin \theta > 0$ であるから, $\cos \theta > 0$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$$

$$\sin \theta + \cos \theta > 0 \text{ であるから} \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(3) \quad y = x + 1 \text{ より} \quad x(y + 3) = x(x + 4) = (x + 2)^2 - 4 \\ \text{よって, } x = -2 \text{ のとき, 最小値 } -4 \text{ をとる.}$$

$$\text{同様に} \quad -4x^2 + y^2 = -4x^2 + (x + 1)^2 = -3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{3}$$

$$\text{よって, } x = \frac{1}{3} \text{ のとき, 最大値 } \frac{4}{3} \text{ をとる.}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad a = 1 \text{ のとき, 放物線の方程式は } y = x^2 + 4x + 5 \\ \text{これを } y \text{ 軸に関して対称移動した方程式は } y = x^2 - 4x + 5$$

$$(2) \quad y = x^2 + (a + 3)x + 5 \text{ が } x \text{ 軸と共有点をもたないとき, 係数について}$$

$$(a + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -3 - 2\sqrt{5} < a < -3 + 2\sqrt{5}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \triangle ABC \text{ に余弦定理を適用すると}$$

$$AC^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cos 45^\circ = 10$$

$$AC > 0 \text{ であるから} \quad AC = \sqrt{10}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \sin 45^\circ = 6$$

$$(2) \quad \triangle ABD \text{ に正弦定理を適用すると} \quad \frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$$

$$\text{よって} \quad AD = \frac{3\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$$

1.8 平成29年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) 2次関数 $y = 3x^2 + ax + b$ のグラフが2点 $(4, 3)$, $(5, 0)$ を通るとき, 定数 a , b の値を求めよ.
- (2) $x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3y + 2$ を因数分解せよ.
- (3) $\triangle ABC$ において, $AB : BC : CA = (1 + \sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$ のとき, $\angle A$ の大きさを求めよ. また, $\sin B$ の値を求めよ.

2 放物線 $y = x^2 + ax + b$ (a , b は定数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) この放物線の頂点の座標を求めよ.
- (2) この放物線が点 $(-1, 2)$ を通り, 頂点が $y = x + 1$ 上にあるような a , b の値を求めよ.

3 平行四辺形 $ABCD$ において, $AB = 1$, $BC = 3$ であり, 対角線 AC の長さが $2\sqrt{2}$ のとき, 次の各問に答えよ.

- (1) $\cos \angle ABC$ の値と, この平行四辺形の面積を求めよ.
- (2) 対角線 BD の長さを求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = 3x^2 + ax + b$ が 2 点 $(4, 3)$, $(5, 0)$ を通るから

$$3 = 3 \cdot 4^2 + a \cdot 4 + b, \quad 0 = 3 \cdot 5^2 + a \cdot 5 + b$$

整理すると $4a + b = -45$, $5a + b = -75$

これを解いて $a = -30$, $b = 75$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3y + 2 \\ &= x^2 + (2y + 3)x + (y + 1)(y + 2) \\ &= (x + y + 1)(x + y + 2) \end{aligned}$$

- (3) $AB : BC : CA = (1 + \sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$ より, $AB = (1 + \sqrt{3})k$, $BC = \sqrt{6}k$, $CA = 2k$ ($k > 0$) とおくと

$$\cos A = \frac{(2k)^2 + \{(1 + \sqrt{3})k\}^2 - (\sqrt{6}k)^2}{2 \cdot 2k \cdot (1 + \sqrt{3})k} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 60^\circ$

また, 正弦定理により $\frac{\sqrt{6}k}{\sin A} = \frac{2k}{\sin B}$

$$\text{よって } \sin B = \frac{2k}{\sqrt{6}k} \sin A = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 2 (1) $y = x^2 + ax + b$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \end{aligned}$$

よって, 求める頂点の座標は $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$

- (2) 放物線が点 $(-1, 2)$ を通るから

$$2 = (-1)^2 + a \cdot (-1) + b \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) で求めた頂点が直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\frac{a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $(a, b) = (0, 1), (6, 7)$

3 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1 + 9 - 8}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって, 平行四辺形 $ABCD$ の面積は

$$AB \cdot BC \sin \angle ABC = 1 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

(2) $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC$ より

$$\cos \angle BCD = \cos(180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$$

$\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD \\ &= 9 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \left(-\frac{1}{3}\right) = 12 \end{aligned}$$

よって $\mathbf{BD = 2\sqrt{3}}$

1.9 平成 28 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ.

(1) 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{2} \geq -x + \sqrt{18} \\ x + \sqrt{80} \geq 3x + \sqrt{45} \end{cases}$$

(2) 2 次関数 $y = x^2 - 4x + m^2 - 3m$ について, y の値が つねに正であるように, 定数 m の値の範囲を定めよ.

(3) 平行四辺形 ABCD において, $BC = 5$, $CD = 3$, 対角線 $BD = 6$ のとき, $\cos A$, $\sin A$ の値を求めよ.

2 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは, 3 点 $(-1, 12)$, $(1, 0)$, $(2, -3)$ を通る. 次の各問に答えよ.

(1) 定数 a , b , c の値を求めよ.

(2) この 2 次関数の $0 \leq x \leq k + 1$ における最小値が, 定数 k の値によってどのように変わるか調べよ. ただし, $k > -1$ とする.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle A = 60^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

(1) 辺 BC の長さ と $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(2) $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき, 線分 AD の長さを求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \text{ 第1式より } 4x \geq 2\sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{第2式より } -2x \geq -\sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad x \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \quad y = x^2 - 4x + m^2 - 3m \text{ より } \quad y = (x-2)^2 + m^2 - 3m - 4$$

このグラフが常に x 軸より上側にあるから

$$m^2 - 3m - 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+1)(m-4) > 0$$

$$\text{よって} \quad m < -1, \quad 4 < m$$

$$(3) \quad \angle A = \angle C \text{ であるから, 余弦定理により}$$

$$\cos A = \cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{15}$$

$$\text{また} \quad \sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{15} \cdot \frac{14}{15}} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad 2 \text{ 次関数 } y = ax^2 + bx + c \text{ のグラフが, } 3 \text{ 点 } (-1, 12), (1, 0), (2, -3) \text{ を通るから}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 12 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて} \quad a = 1, \quad b = -6, \quad c = 5$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から, 与えられた 2 次関数は } y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$$

$$0 < k+1 < 3 \quad \text{すなわち} \quad -1 < k < 2 \text{ のとき}$$

$$x = k+1 \text{ で最小値 } (k+1-3)^2 - 4 = k^2 - 4k$$

$$3 \leq k+1 \quad \text{すなわち} \quad 2 \leq k \text{ のとき}$$

$$x = 3 \text{ で最小値 } -4$$

3 (1) 余弦定理により $BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 60^\circ = 13$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = \sqrt{13}$$

$$\text{また } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

(2) $x = AD$ とおくと, $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin 60^\circ$$

$$x + \frac{3}{4}x = 3\sqrt{3}$$

$$\text{よって } AD = x = \frac{12}{7}\sqrt{3}$$

1.10 平成27年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) $x = 3 + 2\sqrt{2}$, $y = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき, xy と $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ の値を求めよ.
- (2) 2次関数 $y = -x^2 - 2x + 1$ の $-3 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $BC = 6$ である. $\sin A$, $\cos A$ の値および辺 AB の長さを求めよ.

2 放物線 $y = ax^2 + ax + a - 2$ (a は定数) について, 次の各問いに答えよ.

- (1) この放物線の頂点の座標を求めよ.
- (2) この放物線が x 軸の負の部分と異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ.

3 平行四辺形 $ABCD$ において, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle ABC = 60^\circ$ であるとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 対角線 AC の長さと $\triangle ABD$ の面積を求めよ.
- (2) $\sin \angle ABD$ の値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x + y = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6$$

$$xy = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34 \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{34}{1} = 34$$

$$(2) \quad y = -x^2 - 2x + 1 = -(x + 1)^2 + 2$$

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ より, } x = -1 \text{ のとき最大値 } 2, \quad x = 3 \text{ のとき最小値 } -14$$

$$(3) \quad \sin A = \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos A = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$$

$$\text{正弦定理により} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{6}{\sin 135^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad AB = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = 3\sqrt{2}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad y = ax^2 + ax + a - 2 \text{ より} \quad y = a \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}a - 2$$

$$\text{よって, 頂点の座標は} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}a - 2 \right)$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から, } a < 0 \text{ のとき } \frac{3}{4}a - 2 < 0 \text{ より, } x \text{ 軸との共有点はない.}$$

$$a > 0 \text{ のとき, 放物線が } x \text{ 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるのは}$$

$$\frac{3}{4}a - 2 > 0 \quad \text{かつ} \quad a - 2 < 0 \quad \text{すなわち} \quad 2 < a < \frac{8}{3}$$

3 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 60^\circ = 19$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{19}$$

$$\text{また } \triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(2) $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 49$$

$$BD > 0 \text{ であるから } BD = 7$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin \angle ABD \text{ であるから}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \sin \angle ABD \quad \text{よって} \quad \sin \angle ABD = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

1.11 平成 26 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) 2 つの 2 次方程式 $x^2 + ax + 2a = 0$, $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ のうち, 一方だけが実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.
- (2) 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を x 軸方向に a , y 軸方向に 2 だけ平行移動してできる放物線が点 $(2, 6)$ を通るとき, 定数 a の値を求めよ.
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ.

2 グラフが 3 点 $(-2, -1)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$ を通る 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) 定数 a , b , c の値を求めよ.
- (2) この 2 次関数の $-2 \leq x \leq 3$ における最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 1 + \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle A = 45^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) 辺 BC の長さを求めよ.
- (2) $\angle B$ の大きさと $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2つの2次方程式 $x^2 + ax + 2a = 0$, $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$ の判別式を, それぞれ D_1 , D_2 とすると

$$D_1 = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = a(a - 8)$$

$$D_2/4 = a^2 - 1 \cdot (a + 2) = (a + 1)(a - 2)$$

「 $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 < 0$ 」または「 $D_1 < 0$ かつ $D_2 \geq 0$ 」であるから

$$\begin{cases} a(a - 8) \geq 0 \\ (a + 1)(a - 2) < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a(a - 8) < 0 \\ (a + 1)(a - 2) \geq 0 \end{cases}$$

よって $-1 < a \leq 0$, $2 \leq a < 8$

- (2) 点 $(2, 6)$ を x 軸方向 $-a$, y 軸方向に -2 だけ平行移動した点 $(2 - a, 4)$ は, 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあるから

$$4 = \frac{1}{4}(2 - a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 2)^2 = 16 \quad \text{これを解いて} \quad a = -2, 6$$

- (3) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$\sin \theta$, $-\cos \theta$ を解とする2次方程式は $(x - \sin \theta)(x + \cos \theta) = 0$

ゆえに $x^2 + (\cos \theta - \sin \theta)x - \sin \theta \cos \theta = 0$

すなわち $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} = 0$ これを解いて $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\sin \theta \geq 0$ よって $\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$

$$-\cos \theta = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4} \quad \text{すなわち} \quad \cos \theta = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4} \div \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$$

- 2** (1) $y = ax^2 + bx + c$ は, 3 点 $(-2, -1)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$ を通るから

$$4a - 2b + c = -1, \quad 4a + 2b + c = 3, \quad 16a + 4b + c = -1$$

これを解いて $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 3$

- (2) (1) の結果から $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2}$
 $-2 \leq x \leq 3$ において

$$x = 1 \text{ のとき最大値 } \frac{7}{2}, \quad x = -2 \text{ のとき最小値 } -1$$

- 3** (1) $b = \sqrt{2}$, $c = 1 + \sqrt{3}$, $A = 45^\circ$ を余弦定理に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 2 + (4 + 2\sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $a = 2$ よって $BC = 2$

- (2) 正弦定理により $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B}$ ゆえに $\sin B = \frac{1}{2}$

$A = 45^\circ$ より, $B < 135^\circ$ であるから $B = 30^\circ$

また $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

1.12 平成25年度推薦試験(60分)

1 次の各問に答えよ.

- (1) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ の頂点を通る傾きが2の直線と, この放物線との交点の座標を求めよ.
- (2) 不等式 $x^2 - 3x - 7 < x + 5 \leq x^2 - x + 2$ を満たす整数をすべて求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$ であるとき, $\angle B$ の大きさと $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ.

2 2次関数 $y = x^2 + ax + a$ (a は定数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) $a = 2$ のとき, この2次関数の最小値を求めよ.
- (2) この2次関数の最小値が -1 以上となるような a の値の範囲を求めよ.

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 5$, $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) 辺 AC の長さを求めよ.
- (2) 頂点 A から辺 BC に引いた垂線を AD とするとき, $\triangle ADC$ の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = x^2 - 4x + 1 \cdots \textcircled{1}$ を変形すると $y = (x - 2)^2 - 3$
 この放物線の頂点 $(2, -3)$ を通り、傾き 2 の直線の方程式は

$$y - (-3) = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

交点の座標は、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を解いて $(2, -3), (4, 1)$

- (2) 与えられた不等式から

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 7 < x + 5 \\ x + 5 \leq x^2 - x + 2 \end{cases}$$

第 1 式から $x^2 - 4x - 12 < 0$
 $(x + 2)(x - 6) < 0$
 $-2 < x < 6 \quad \cdots \textcircled{1}$

第 2 式から $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
 $(x + 1)(x - 3) \geq 0$
 $x \leq -1, 3 \leq x \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-2 < x \leq -1, 3 \leq x < 6$

これを満たす整数は $-1, 3, 4, 5$

- (3) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$ より

$$\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B} = 2R$$

ゆえに $R = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{2} \sin 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A = 30^\circ$ より $B < 150^\circ$ に注意して $B = 45^\circ, 135^\circ$

- 2 (1) $a = 2$ のとき $y = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$
 よって、 $x = -1$ のとき、最小値 1 をとる.

(2) $y = x^2 + ax + a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$

この最小値 $-\frac{a^2}{4} + a$ が -1 以上であるから

$$-\frac{a^2}{4} + a \geq -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 4a - 4 \leq 0$$

これを解いて $2 - 2\sqrt{2} \leq 2 + 2\sqrt{2}$

3 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$b > 0 \text{ より } AC = b = 7$$

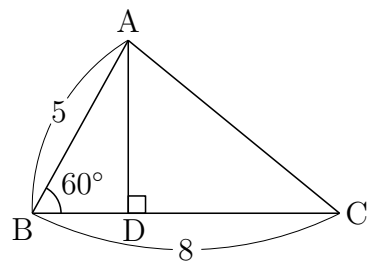
(2) 右の図より

$$AD = 5 \sin 60^\circ = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$BD = 5 \cos 60^\circ = \frac{5}{2}$$

$$CD = BC - BD = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\text{よって } \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{3} = \frac{55\sqrt{3}}{8}$$



1.13 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

- (1) 方程式 $x^2 - 2ax + 1 - a = 0$ が実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{4}$ ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) であるとき, $\cos \theta \sin \theta$ および $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ において, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$ である. 3 辺 AB , BC , AC 上にそれぞれ点 P , Q , R があり, PQ は AC に平行であるとき, $\triangle PQR$ の面積が最大となる PQ の長さと, その面積を求めよ。

2 実数 x , y , z が $5x + 2y - 4z = 3$, $3x + y - 3z = 2$ を満たすとき, 次の各問に答えよ。

- (1) x と y を z で表せ。
- (2) $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値とそのときの x , y , z の値を求めよ。

3 $\triangle ABC$ において, $AB = 6$, $AC = 4$, $\angle A = 60^\circ$ である. 辺 AC 上に $AD = 1$ をとり, E を辺 BC 上の点とすると, 次の各問に答えよ。

- (1) 辺 BC の長さと $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) 線分 DE が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき, 線分 CE の長さを求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = 4(a^2 + a - 1)$$

$D \geq 0$ であるから

$$a^2 + a - 1 \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq a$$

$$(2) \quad \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{4} \text{ の両辺を平方すると}$$

$$1 + 2 \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta \sin \theta = -\frac{15}{32}$$

したがって

$$\begin{aligned} (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{15}{32}\right) \\ &= \frac{31}{16} \end{aligned}$$

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $\cos \theta - \sin \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{\frac{31}{16}} = -\frac{\sqrt{31}}{4}$$

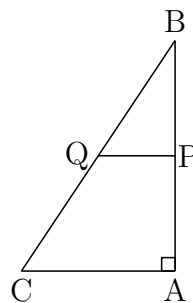
$$(3) \quad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13 - 9} = 2$$

$x = PQ$ とすると ($0 < x < 2$), $BP = \frac{3}{2}x$

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} \cdot x \left(3 - \frac{3}{2}x\right) \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \\ &= -\frac{3}{4}(x^2 - 2x) \\ &= -\frac{3}{4}(x - 1)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$x = 1$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$ をとる.

よって $PQ = 1$ のとき面積 $\frac{3}{4}$ をとる.



- 2** (1) $5x + 2y - 4z = 3 \cdots \textcircled{1}$, $3x + y - 3z = 2 \cdots \textcircled{2}$ とおく.

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ より

$$-x + 2z = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2z + 1$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$3(2z + 1) + y - 3z = 2 \quad \text{ゆえに} \quad y = -3z - 1$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2z + 1)^2 + (-3z - 1)^2 + z^2 \\ &= 14z^2 + 10z + 2 \\ &= 14 \left(z^2 + \frac{5}{7}z \right) + 2 \\ &= 14 \left\{ \left(z + \frac{5}{14} \right)^2 - \left(\frac{5}{14} \right)^2 \right\} + 2 \\ &= 14 \left(z + \frac{5}{14} \right)^2 + \frac{3}{14} \end{aligned}$$

$z = -\frac{5}{14}$ のとき最小値 $\frac{3}{14}$ をとるので, (1) の結果から

$x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{14}$, $z = -\frac{5}{14}$ のとき最小値 $\frac{3}{14}$ をとる.

- 3** (1) 余弦定理を $\triangle ABC$ に適用すると

$$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 60^\circ = 28$$

ゆえに $BC = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABC$ の面積 S は $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$

- (2) $\frac{CE}{BC} = k$ とおくと, $\frac{DC}{AC} = \frac{3}{4}$ であるから

$$k \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって} \quad CE = BC \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{7}$$

1.14 平成24年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

- (1) 実数 x, y が $3x + y = 5$ を満たすとき, xy の最大値とそのときの x, y の値を求めよ。
- (2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする. $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) 2つの放物線 $y = -x^2 + 2x$ と $y = x^2 + ax + b$ の頂点が一致するとき, 定数 a, b の値を求めよ。

2 長さが10である線分 AB 上に点 P をとり, AP を直径とする円を S とし, BP を直径とする円を T とする. 次の各問に答えよ。

- (1) $AP = x$ として, 円 S と円 T の面積をそれぞれ x を用いて表せ。
- (2) この2つの円の面積の和を y とするとき, y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

3 面積が12の $\triangle ABC$ において, $AB = 8$, $\angle B = 45^\circ$ である. 次の各問に答えよ。

- (1) BC, AC の長さを求めよ。
- (2) $\cos C$ の値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $3x + y = 5$ より $y = 5 - 3x \cdots \textcircled{1}$ であるから

$$\begin{aligned}
 xy &= x(5 - 3x) \\
 &= -3x^2 + 5x \\
 &= -3 \left(x^2 - \frac{5}{3}x \right) \\
 &= -3 \left\{ \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} \right\} \\
 &= -3 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{25}{12}
 \end{aligned}$$

したがって, $x = \frac{5}{6}$ のとき最大値 $\frac{25}{12}$

① より $x = \frac{5}{6}, y = \frac{5}{2}$ のとき最大値 $\frac{25}{12}$

- (2) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であるから

$$1 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\tan \theta < 0$ より $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\text{また} \quad \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{5}$$

- (3) $y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$, $y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$

それぞれの頂点の座標は $(1, 1), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b \right)$

これらの頂点の座標は一致するので

$$1 = -\frac{a}{2}, \quad 1 = -\frac{a^2}{4} + b \quad \text{ゆえに} \quad a = -2, \quad b = 2$$

- 2** (1) $AP = x$ より, S の半径は $\frac{x}{2}$, T の半径は $\frac{10-x}{2}$ であるから

$$S \text{ の面積は } \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} x^2$$

$$T \text{ の面積は } \pi \left(\frac{10-x}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (x^2 - 20x + 100)$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{4} (x^2 - 20x + 100) \\ &= \frac{\pi}{2} (x^2 - 10x + 50) \\ &= \frac{\pi}{2} (x - 5)^2 + \frac{25}{2} \pi \end{aligned}$$

$$x = 5 \text{ のとき } y \text{ の最小値 } \frac{25}{2} \pi$$

- 3** (1) $\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = 12$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad AB = 3\sqrt{2}$$

余弦定理により

$$AC^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = 34$$

$$AC > 0 \text{ より} \quad AC = \sqrt{34}$$

- (2) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{34}$, $c = 8$ を余弦定理に適用して

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{34})^2 - 8^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{34}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

1.15 平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

- (1) 方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の 2 解を a, b ($a > b$) とするとき, a, b および $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の値を求めよ.
- (2) 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ の頂点の座標を求めよ. また, この放物線を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき, 移動後の放物線の方程式を求めよ.
- (3) 連立不等式 $\begin{cases} |x| < 3 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

2 2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) の表す放物線を C とする. C は点 $(3, 4)$ を通り, x 軸とは共有点をもたない. 次の各問いに答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 5$ におけるこの関数の最小値が 1 であるとき, a の値を求めよ.

3 鋭角三角形 ABC において, $BC = 4$, $AB : AC = 7 : 5$ で, $\triangle ABC$ の外接円の半径が $\frac{7}{2\sqrt{3}}$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) $\cos A$ を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a, b ($a > b$) は, この2次方程式の解であるから

$$a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{2}{3 + \sqrt{5}} + \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{2(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} + \frac{2(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 3 \end{aligned}$$

- (2) $y = x^2 - 2x + 3$ の右辺を変形すると $y = (x - 1)^2 + 2$

ゆえに, この放物線の頂点の座標は $(1, 2)$

この放物線を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は $(1 + 2, 2 - 1)$ すなわち $(3, 1)$

よって, 移動後の放物線の方程式は, x^2 の係数に注意して

$$y = (x - 3)^2 + 1$$

- (3) $|x| < 3$ から $-3 < x < 3$ …①

$x^2 - 3x - 4 < 0$ から

$$(x + 1)(x - 4) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad -1 < x < 4 \quad \dots \text{②}$$

①, ②の共通範囲を求めて $-1 < x < 3$

- 2** (1) $C: y = x^2 + ax + b$ は点 $(3, 4)$ を通るから

$$4 = 3^2 + a \cdot 3 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = -3a - 5$$

放物線 $y = x^2 + ax - 3a - 5$ は、 x 軸との共有点をもたないので

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3a - 5) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 12a + 20 < 0$$

これを解いて $-10 < a < -2$

- (2) 軸の方程式は $x = -\frac{a}{2}$

(1) の結果から $1 < -\frac{a}{2} < 5$

$x^2 + ax - 3a - 5 = 1$ すなわち $x^2 + ax - 3a - 6 = 0$ は重解をもつので

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3a - 6) = 0 \quad a^2 + 12a + 24 = 0$$

(1) の結果に注意して $a = -6 \pm 2\sqrt{3}$

- 3** (1) $a = 4$, $R = \frac{7}{2\sqrt{3}}$ であるから、これを正弦定理 $2R = \frac{a}{\sin A}$ に適用すると

$$2 \times \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sin A} \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形より、 $\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}$$

- (2) k を正の定数とし、 $b = 5k$, $c = 7k$ とおく.

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ により

$$4^2 = (5k)^2 + (7k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 7k \times \frac{1}{7} \quad \text{ゆえに} \quad k^2 = \frac{1}{4}$$

$k > 0$ であるから $k = \frac{1}{2}$ ゆえに $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{7}{2}$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

1.16 平成23年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

- (1) a を $\frac{10}{\sqrt{14}-2}$ をこえない最大の整数とし, $b = \frac{10}{\sqrt{14}-2} - a$ とする. a , $(b+3)^2$ の値を求めよ。
- (2) x, y が $y = x^2 + 2x$ を満たす. $-1 \leq x \leq 3$ であるとき, $x+y$ の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ。
- (3) $\sin \theta = \frac{1}{7}$ ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) であるとき, $\cos \theta, \tan \theta$ の値を求めよ。

2 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 5x - 2 < 0 \\ |x + 1| < 2 \end{cases}$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

3 $\triangle ABC$ において, 面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $AB = 3$, $AC = \sqrt{7}$ である。次の各問いに答えよ。

- (1) $\sin A$ の値を求めよ。
- (2) 角 A が鈍角のとき, BC の長さを求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a = \frac{10}{\sqrt{14}-2} = \frac{10(\sqrt{14}+2)}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)} = \sqrt{14}+2$$

$3 < \sqrt{14} < 4$ より $5 < \sqrt{14}+2 < 6$ であるから $a = 5$

また $b = (\sqrt{14}+2) - a$ ゆえに $b+3 = \sqrt{14}$

よって $(b+3)^2 = 14$

$$(2) \quad y = x^2 + 2x \cdots \textcircled{1} \text{ より, } f(x) = x + y \text{ おくと}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + (x^2 + 2x) \\ &= x^2 + 3x \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$-1 \leq x \leq 3 \text{ において, 最大値 } f(3) = 18, \text{ 最小値 } f(-1) = -2$$

$$x = 3, y = 15 \text{ のとき最大値 } 18,$$

$$x = -1, y = -1 \text{ のとき最小値 } -2$$

$$(3) \quad 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \cos \theta \leq 0 \text{ であるから}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{7} \div \left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$\boxed{2} \quad 2 \text{ 次方程式 } x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ の解は } x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$2 \text{ 次不等式 } x^2 + 5x - 2 < 0 \text{ の解は } \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|x+1| < 2 \text{ から}$$

$$-2 < x+1 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad -3 < x < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } -3 < x < \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{7} \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

(2) 角 A が鈍角より $\cos A < 0$ であるから, (1) の結果から

$$\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= 3^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{BC = 2\sqrt{7}}$$

1.17 平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

- (1) $x = 2$ で最小値 -4 をとる 2 次関数のグラフが点 $(3, 0)$ を通るとき、この 2 次関数を求めよ。
- (2) $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ のとき、 $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + |2a + 1|$ を簡単にせよ。
- (3) 2 直線 $y = \sqrt{3}x - 1$, $y = -x + 2 + \sqrt{3}$ の交点の座標および 2 直線のなす角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) を求めよ。

2 点 $(1, 1)$ を通る放物線 $y = -x^2 + ax + b$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 頂点の座標を a で表せ。
- (2) 頂点の y 座標が最小となるような a の値を求めよ。

3 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle BCD = 60^\circ$ であり、 $\triangle BCD$ の面積は $3\sqrt{3}$ である。次の各問に答えよ。

- (1) CD と BD の長さを求めよ。
- (2) AD の長さを求めよ。

解答例

- 1** (1) 放物線の頂点の座標は $(2, -4)$ であるから, この2次関数を

$$y = a(x - 2)^2 - 4$$

とおける. このグラフが点 $(3, 0)$ を通るから

$$0 = a(3 - 2)^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

よって, 求める2次関数は $y = 4(x - 2)^2 - 4$

$$(2) \sqrt{a^2 + 2a + 1} + |2a + 1| = |a + 1| + |2a + 1|$$

$$-1 \leq a \leq -\frac{1}{2} \quad \text{より} \quad a + 1 \geq 0, \quad 2a + 1 \leq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad |a + 1| = a + 1, \quad |2a + 1| = -(2a + 1) = -2a - 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sqrt{a^2 + 2a + 1} + |2a + 1| &= (a + 1) + (-2a - 1) \\ &= -a \end{aligned}$$

- (3) $y = \sqrt{3}x - 1$ と $y = -x + 2 + \sqrt{3}$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - 1 &= -x + 2 + \sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 1)x &= 3 + \sqrt{3} \\ x &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

これから $y = 2$

よって, 求める交点の座標は $(\sqrt{3}, 2)$

直線 $y = \sqrt{3}x - 1$ の x 軸の正の向きとなす角は 60°

直線 $y = -x + 2 + \sqrt{3}$ の x 軸の正の向きとなす角は 135°

ゆえに, この2直線のなす角は $135^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

- 2** (1) 点 (1, 1) を通るから

$$1 = -1^2 + a \cdot 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2 - a$$

放物線 $y = -x^2 + ax + 2 - a$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2 \cdot (-1)}, -\frac{a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (2 - a)}{4 \cdot (-1)} \right) \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2 - 4a + 8}{4} \right)$$

- (2) (1) の結果から

$$\frac{a^2 - 4a + 8}{4} = \frac{1}{4} \{ (a - 2)^2 + 4 \} = \frac{1}{4} (a - 2)^2 + 1$$

よって, y 座標が最小となるときの a の値は **$a = 2$**

- 3** (1) $\frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \angle BCD = 3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2} \times 4 \times CD \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{CD = 3}$$

余弦定理を $\triangle BCD$ に適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 60^\circ \\ &= 16 + 9 - 12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから **$BD = \sqrt{13}$**

- (2) $x = AD$ において, 余弦定理を $\triangle ABD$ に適用すると

$$(\sqrt{13})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x - 9 = 0$$

$x > 0$ であるから $x = -1 + \sqrt{10}$

よって **$BD = -1 + \sqrt{10}$**

1.18 平成22年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

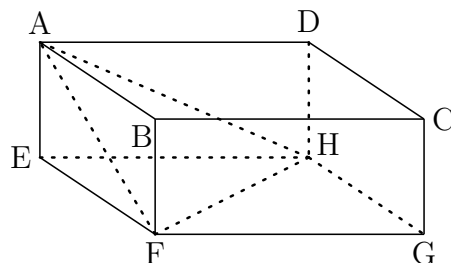
- (1) 関数 $y = x^2 + 2x + a$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値と最小値の積が -20 であるとき、定数 a の値を求めよ。
- (2) $\frac{1}{3+\sqrt{6}} + \frac{1}{3+\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ を計算せよ。
- (3) $\triangle ABC$ において、 $AB = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\angle ABC = 45^\circ$ のとき、 AC の長さ と $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。

2 a を正の整数とする。関数 $y = ax^2 - ax + 1$ ($-1 \leq x \leq 3$) について、次の各問に答えよ。

- (1) この関数の最大値と最小値を a で表せ。
- (2) 最大値と最小値の差が 20 以下となるような a の値を求めよ。

3 図のような直方体 $ABCD-EFGH$ において、 $AE = 1$, $AB = 2$, $AD = 3$ とする。次の各問に答えよ。

- (1) $\cos \angle FAH$ の値を求めよ。
- (2) $\triangle AFH$ の面積を求めよ。



解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad y = (x+1)^2 + a - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$x = -1$ で最小値 $a - 1$ をとり, $x = 2$ で最大値 $a + 8$ をとる. 最大値と最小値の積が -20 であるから

$$(a-1)(a+8) = -20 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 7a + 12 = 0$$

これを解いて $a = -4, -3$

(2) (それぞれの分母を有理化する)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3+\sqrt{6}} + \frac{1}{3+\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \\ &= \frac{3-\sqrt{6}}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} + \frac{\sqrt{12}-3}{(\sqrt{12}+3)(\sqrt{12}-3)} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{3-\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$(3) \quad c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad B = 45^\circ.$$

これを余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ に適用すると

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \sin 45^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから $b = 1$ よって $AC = 1$

正弦定理 $2R = \frac{b}{\sin B}$ により

$$2R = 1 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 2** (1) $y = ax^2 - ax + 1$ ($-1 \leq x \leq 3$) の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= a(x^2 - x) + 1 \\ &= a \left\{ \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + 1 \\ &= a \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}a + 1 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから, $x = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4}a + 1$, $x = 3$ で最大値 $6a + 1$

- (2) 最大値と最小値の差が 20 以下であるから, (1) の結果より

$$(6a + 1) - \left(-\frac{1}{4}a + 1 \right) \leq 20 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq \frac{16}{5}$$

$\frac{16}{5} = 3.2$ であるから, 求める正の整数 a は **1, 2, 3**

- 3** (1) $AF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $AH = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $FH = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
 $\triangle FAH$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \angle FAH = \frac{AF^2 + AH^2 - FH^2}{2AF \cdot AH} = \frac{5 + 10 - 13}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

- (2) (1) の結果により

$$\sin \angle AFH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AFH} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

よって

$$\triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{2}$$

1.19 平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ ($1 \leq x \leq 4$) の最大値と最小値を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \leq 0 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$ を解け。

(3) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, $CA = 2\sqrt{3} - 2$ であるとき, $\angle A$ の大きさを求めよ。

2 x についての 2 次方程式 $2x^2 + 2(m+1)x + m + \frac{1}{2} = 0$ について, 次の各問に答えよ。

(1) この方程式を解け。

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるような整数 m を求めよ。

3 $\triangle ABC$ において, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = a$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を a で表せ。

(2) CA , AB の長さを a で表せ。

解答例

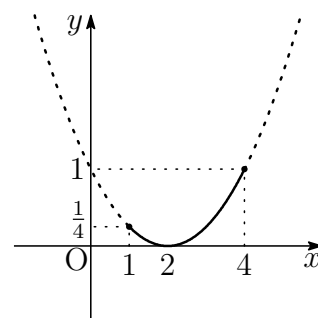
1 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ を変形すると

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2$$

$1 \leq x \leq 4$ でのグラフは、右の図の実線部分である。よって、 y は

$x = 4$ で最大値 1 をとり、

$x = 2$ で最小値 0 をとる。



(2) 第1式から $(x+1)^2 - 3 \leq 0$

$$(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) \leq 0$$

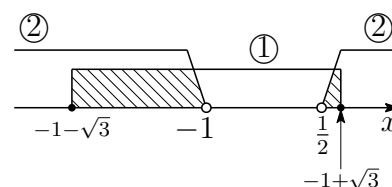
よって $-1-\sqrt{3} \leq x \leq -1+\sqrt{3}$ … ①

第2式から $(x+1)(2x-1) > 0$

よって $x < -1, \frac{1}{2} < x$ … ②

①, ② の共通範囲を求めて

$$-1-\sqrt{3} \leq x < -1, \frac{1}{2} < x \leq -1+\sqrt{3}$$



(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}-2)^2 + 2^2 - (3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{2(2\sqrt{3}-2) \cdot 2} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{8(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $\angle A = 60^\circ$

2 (1) 与えられた方程式から $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) = 0$

左辺を因数分解すると $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + m + \frac{1}{2}\right) = 0$

これを解いて $x = -\frac{1}{2}, -m - \frac{1}{2}$

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるのは, m が整数であるから

3 つの整数が $-3, -2, -1$ のとき $-m - \frac{1}{2} = -3 - \frac{1}{2}$

3 つの整数が $0, 1, 2$ のとき $-m - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}$

よって $m = \pm 3$

3 (1) 正弦定理により $2R = \frac{BC}{\sin A}$

よって $R = \frac{a}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(2) 正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$

ゆえに $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{CA}{\sin 60^\circ}$ よって $CA = \frac{a \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

第 1 余弦定理により $AB = CA \cos A + BC \cos B$

よって $AB = \frac{\sqrt{6}}{2}a \cos 45^\circ + a \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}a$

1.20 平成21年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

(1) $\frac{1}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} + a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$ を満たす有理数 a, b を求めよ。

(2) 2次方程式 $2x^2 + 8x + k(k+2) = 0$ が2つの異なる実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ において, $AB = 14$, $CA = 10$, $\angle A = 60^\circ$ であるとき, BC の長さ と $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

2 放物線 $y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の頂点が第1象限にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

3 円に内接する四角形 $ABCD$ において, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\sin B$, $\cos D$ の値を求めよ。

(2) 円の半径を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad \frac{1}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\{(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}\}\{(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}\}} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

よって、求める有理数 a, b は $\mathbf{a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}}$

(2) 2 次方程式 $2x^2 + 8x + k(k+2) = 0$ の係数について

$$D/4 = 4^2 - 2 \cdot k(k+2) = -2(k+4)(k-2)$$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は、 $D > 0$ であるから

$$-2(k+4)(k-2) > 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (k+4)(k-2) < 0$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{-4 < k < 2}$$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos A \\
 &= 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cos 60^\circ \\
 &= 100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 156
 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{156} = \mathbf{2\sqrt{39}}$$

また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &= \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin A \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 \sin 60^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{35\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

2 $y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 2ax) + a^2 + a + 2 \\ &= 2\{(x - a)^2 - a^2\} + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x - a)^2 - 2a^2 + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x - a)^2 - a^2 + a + 2 \end{aligned}$$

この放物線の頂点 $(a, -a^2 + a + 2)$ が第1象限にあるので

$$\begin{cases} a > 0 \\ -a^2 + a + 2 > 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

第2式から $a^2 - a - 2 < 0$

ゆえに $(a + 1)(a - 2) < 0$

よって $-1 < a < 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ②の共通範囲を求めて $0 < a < 2$

3 (1) $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より $\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

四角形 ABCD は円に内接するので $D = 180^\circ - B$

ゆえに $\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B \\ &= 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 4 + 3 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$CA > 0$ より $CA = \sqrt{3}$

正弦定理により $\frac{CA}{\sin B} = 2R$

よって $R = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

1.21 平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) $a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ のとき, $a + b$, ab , $a^2 + b^2$ を計算せよ。

(2) 2 次方程式 $x^2 - 4x - a^2 + 5a = 0$ が重解をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 2x - 7 \leq x - 3 \\ x^2 - 3x \leq 10 \end{cases}$ を解け。

2 $\triangle ABC$ において, $AB = 3$, $AC = 2\sqrt{5}$, $\tan A = -2$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\cos A$, $\sin A$ の値を求めよ。

(2) BC の長さを求めよ。

3 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき, $3y^2 + 2x$ の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a+b = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{5}}{5-3} = \sqrt{5}$$

$$ab = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1 \times 1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

上の2式から $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (\sqrt{5})^2 - 2 \times \frac{1}{2} = 4$

(2) 2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-2)^2 - 1 \cdot (-a^2 + 5a) \\ &= a^2 - 5a + 4 \\ &= (a-1)(a-4) \end{aligned}$$

この2次方程式が実数解をもつのは、 $D=0$ のときであるから

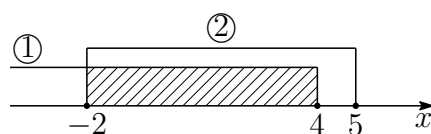
$$(a-1)(a-4)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=1, 4$$

(3) 第1式から $2x-x \leq -3+7$

$$\text{ゆえに} \quad x \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

第2式から $(x+2)(x-5) \leq 0$

$$\text{ゆえに} \quad -2 \leq x \leq 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①と②の共通範囲を求めて $-2 \leq x \leq 4$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \quad \text{から}$$

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + (-2)^2 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 A = \frac{1}{5}$$

 $\tan A < 0$ であるから A は鈍角で、 $\cos A < 0$ である。

$$\text{よって} \quad \cos A = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{また} \quad \sin A = \tan A \times \cos A = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= 3^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ であるから} \quad BC = \sqrt{41}$$

3 条件より $y^2 = 1 - x^2 \cdots \textcircled{1}$ であるから $y^2 \geq 0$

ゆえに $1 - x^2 \geq 0$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

整理して $(x+1)(x-1) \leq 0$

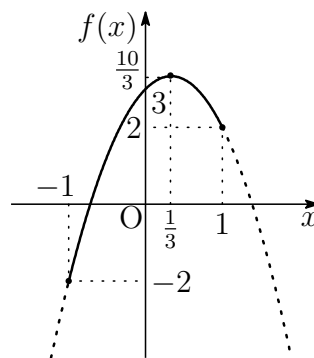
よって $-1 \leq x \leq 1 \cdots \textcircled{2}$

① から

$$\begin{aligned} 3y^2 + 2x &= 3(1 - x^2) + 2x \\ &= -3x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

これを $f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 2x + 3 \\ &= -3 \left(x^2 - \frac{2}{3}x \right) + 3 \\ &= -3 \left\{ \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right\} + 3 \\ &= -3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$



② において, $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{10}{3}$, $x = -1$ のとき最小値 -2 をとる.

1.22 平成20年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 3点 $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(2, -3)$ を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

(2) 不等式 $-9x^2 + 6x + 35 \geq 0$ を満たす整数 x の値を求めよ。

(3) $\frac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ} + \frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ の値を求めよ。

2 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と2点 $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わり, y 軸と点 $(0, -3)$ で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a , b , c の値を求めよ。

(2) この2次関数の $-1 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

3 辺 AD , BC が平行な台形 $ABCD$ において, $AB = 3$, $AD = 5$, $BC = 10$, $\angle B = 60^\circ$ である。次の各問に答えよ。

(1) 対角線 BD の長さを求めよ。

(2) 台形 $ABCD$ の面積を求めよ。

解答例

- 1** (1) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.

グラフが 3 点 $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(2, -3)$ を通るから

$$-1 = c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2 = a + b + c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-3 = 4a + 2b + c \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } a + b = 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } 4a + 2b = -2$$

$$\text{すなわち } 2a + b = -1 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を解いて } a = -4, b = 7$$

よって, 求める 2 次関数は $y = -4x^2 + 7x - 1$

$$(2) \quad -9x^2 + 6x + 35 \geq 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ をかけて } 9x^2 - 6x - 35 \leq 0$$

$$\text{ゆえに } (3x + 5)(3x - 7) \leq 0$$

$$\text{よって } -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$

したがって, この不等式の満たす整数 x は $-1, 0, 1, 2$

$$(3) \quad \frac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ} + \frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \div (-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}$$

- 2** (1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標が 1, 3 であるから, x^2 の係数に注意して

$$y = a(x - 1)(x - 3) \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける. これが点 $(0, -3)$ を通るから

$$-3 = a(0 - 1)(0 - 3) \quad \text{ゆえに} \quad a = -1$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$y = -(x - 1)(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 4x - 3$$

よって $a = -1, b = 4, c = -3$

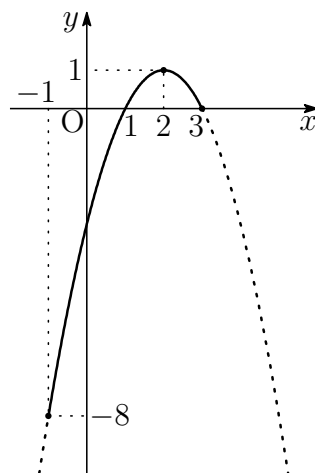
$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1) \text{ から } y &= -(x^2 - 4x) - 3 \\
 &= -\{(x-2) - 2^2\} - 3 \\
 &= -(x-2)^2 + 1
 \end{aligned}$$

よって, $-1 \leq x \leq 3$ において, y は

$x = 2$ で最大値 1,

$x = -1$ で最小値 -8

をとる.



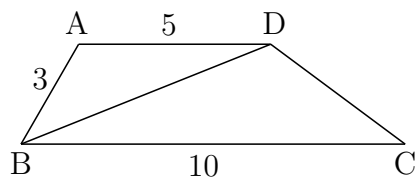
3 (1) $AD \parallel BC$ であるから

$$\angle B = 60^\circ \text{ より } \angle A = 120^\circ$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A \\
 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ \\
 &= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 49
 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから **$BD = 7$**



(2) A から BC に下ろした垂線の長さ h は

$$h = AB \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

台形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}h(AD + BC) = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times (5 + 10) = \frac{45}{4}\sqrt{3}$$

1.23 平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) x の方程式 $x^2 + 2ax + 5a^2 + 4a + 1 = 0$ が実数解をもつとき、定数 a の値とその解を求めよ。

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動したところ、放物線 $y = 2x^2 + x - 1$ に重なった。定数 a, b, c の値を求めよ。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -\frac{5}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

2 関数 $y = -x^2 + ax + b$ の $x \leq 0$ における最大値は 1 で、すべての x における最大値は 5 である。定数 a, b の値を求め、この関数のグラフをかけ。

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3 + 3\sqrt{3}$, $AC = 6$ のとき、次の各問に答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。

(2) $\angle B$ の大きさを求めよ。

解答例

- 1 (1) 2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 1 \cdot (5a^2 + 4a + 1) \\ &= -4a^2 - 4a - 1 = -(2a + 1)^2 \end{aligned}$$

この2次方程式が実数解をもつのは、 $D \geq 0$ のときであるから

$$-(2a + 1)^2 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{2}$$

このとき、2次方程式は重解をもち、その解は

$$x = -\frac{2a}{2 \cdot 1} = -a = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

- (2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c \cdots \textcircled{1}$ は放物線 $y = 2x^2 + x - 1 \cdots \textcircled{2}$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである.

放物線 $\textcircled{2}$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y - 3 = 2(x + 2)^2 + (x + 2) - 1$$

$$\text{整理して} \quad y = 2x^2 + 9x + 12$$

よって、上式は $\textcircled{1}$ に一致するから $a = 2, b = 9, c = 12$

- (3) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta = \frac{16}{41}$$

$\tan \theta < 0$ であるから θ は鈍角で、 $\cos \theta < 0$ である.

$$\text{よって} \quad \cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{41}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\text{また} \quad \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -\frac{5}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

2 $x = 0$ のとき $y = 1$ であるから $b = 1$

$y = -x^2 + ax + 1$ と $y = 5$ から y を消去して

$$-x^2 + ax + 1 = 5 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - ax + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

は、重解をもつので、係数について

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

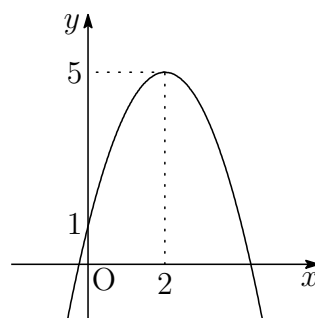
ゆえに $a = \pm 4 \quad \cdots \textcircled{2}$

重解は、 $\textcircled{1}$ より $x = -\frac{-a}{2 \cdot 1} = \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} > 0$ であるから、 $\textcircled{2}$ より $a = 4$

$$y = -x^2 + 4x + 1 = -(x - 2)^2 + 5$$

よって、頂点の座標は $(2, 5)$



3 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ &= (3 + 3\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2(3 + 3\sqrt{3}) \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{(3 + 3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{6})^2 - 6^2}{2(3 + 3\sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{6}} \\ &= \frac{54 + 18\sqrt{3}}{18(1 + \sqrt{3})\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{18(1 + \sqrt{3})\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を満たす } \angle B \text{ は } \angle B = 45^\circ$$

1.24 平成19年度推薦試験(60分)第2日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = 4x^2 + ax + 5$ の頂点の y 座標が2のとき、定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y = -x^2 + 4x + c$ ($0 \leq x \leq 6$) の最小値が -11 のとき、定数 c の値およびこの関数の最大値を求めよ。

(3) 傾斜角が θ の坂道を 5km 進むと、垂直方向に 100m 登ったことになるとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

2 軸の方程式が $x = 1$ で、2点 $(-1, 5)$, $(2, -1)$ を通る放物線について、次の各問に答えよ。

(1) この放物線の方程式を求めよ。

(2) この放物線が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

3 $\triangle ABC$ において、 $BC = 8\sqrt{5}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 外接円の半径が $5\sqrt{5}$ のとき、次の各問に答えよ。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
\boxed{1} \quad (1) \quad y &= 4x^2 + ax + 5 \\
&= 4\left(x^2 + \frac{a}{4}x\right) + 5 \\
&= 4\left\{\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \left(\frac{a}{8}\right)^2\right\} + 5 \\
&= 4\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + 5
\end{aligned}$$

頂点の y 座標が 2 であるから

$$\begin{aligned}
&-\frac{a^2}{16} + 5 = 2 \\
\text{ゆえに} \quad &a^2 = 48 \\
\text{よって} \quad &\mathbf{a = \pm 4\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad y &= -x^2 + 4x + c \\
&= -(x - 2)^2 + c + 4
\end{aligned}$$

 $0 \leq x \leq 6$ であるから $x = 2$ で最大値 $c + 4$, $x = 6$ で最小値 $c - 12$ をとる. 最小値が -11 であるから

$$c - 12 = -11 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{c = 1}$$

よって, 最大値は $c + 4 = \mathbf{5}$

$$(3) \sin \theta = \frac{100}{5000} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}$$

 θ は鋭角であるから

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{50}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{1}{50}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{51}{50} \times \frac{49}{50}} = \frac{\mathbf{7\sqrt{51}}}{\mathbf{50}}
\end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{50} \div \frac{7\sqrt{51}}{50} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7\sqrt{51}}}$$

- 2 (1) 直線 $x = 1$ を軸とするから、求める関数は $y = a(x - 1)^2 + q$ とおける.
このグラフが2点 $(-1, 5)$, $(2, -1)$ を通るから

$$5 = 4a + q, \quad -1 = a + q \quad \text{これを解くと} \quad a = 2, \quad q = -3$$

$$\text{よって} \quad y = 2(x - 1)^2 - 3 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y = 2x^2 - 4x - 1}$$

- (2) 放物線と x 軸との共有点の座標は $2x^2 - 4x - 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{よって、求める線分の長さは} \quad \frac{2 + \sqrt{6}}{2} - \frac{2 - \sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

3 (1) $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

- (2) 正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = 2R$ より $c = 2R \sin C$ であるから

$$c = 2 \cdot 5\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 20$$

$$\text{余弦定理により} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$20^2 = (8\sqrt{5})^2 + b^2 - 2 \cdot 8\sqrt{5}b \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{整理して} \quad b^2 - 16b - 80 = 0$$

$$(b + 4)(b - 20) = 0$$

$$b > 0 \text{ であるから} \quad b = 20$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{AC = 20}$$

1.25 平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ の最大値が 5 以下となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$ と $y = 2x^2 + ax + b$ の頂点が一致するような定数 a, b の値を求めよ。

(3) x の整式 $(x+a)(x^2+b)(x^3+c)(x^4+x^2+d)$ を展開したとき、 x^4 の係数を求めよ。

2 $\triangle ABC$ において、 $BC = a$, $AB = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a$, $\angle B = 30^\circ$ のとき、次の各問に答えよ。

(1) CA を a で表せ。

(2) $\angle A$ の大きさを求めよ。

3 2 次方程式 $x^2 - (a+2)x + a^2 - 3a + 4 = 0$ の解を α, β とするとき、
 $1 < \alpha < 2 < \beta$ を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

- 1 (1) 2次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 + 6ax) + 4 \\ &= -\{(x + 3a)^2 - (3a)^2\} + 4 \\ &= -(x + 3a)^2 + 9a^2 + 4 \end{aligned}$$

よって、2次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ は $x = -3a$ で最大値 $9a^2 + 4$ をとる。
この2次関数の最大値は5以下であるから

$$9a^2 + 4 \leq 5$$

整理して $9a^2 - 1 \leq 0$

$$(3a + 1)(3a - 1) \leq 0$$

したがって $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$

- (2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2} \cdots \textcircled{1}$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{(x - 3)^2 - 3^2\} + \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

したがって、放物線 $\textcircled{1}$ の頂点の座標は (3, 1)

放物線 $y = 2x^2 + ax + b \cdots \textcircled{2}$ の頂点の座標の座標は (3, 1) であるから、
 $\textcircled{2}$ の右辺は、 x^2 の係数に注意して次のようにかける。

$$2x^2 + ax + b = 2(x - 3)^2 + 1$$

整理すると $= 2x^2 - 12x + 19$

上式の係数を比較して、 **$a = -12$, $b = 19$**

$$\begin{aligned} (3) \quad (x + a)(x^2 + b) &= x^3 + ax^2 + bx + ab \\ (x^3 + c)(x^4 + x^2 + d) &= x^7 + x^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + cd \end{aligned}$$

であるから

$(x + a)(x^2 + b) \times (x^3 + c)(x^4 + x^2 + d)$ の x^4 の項は

$$ax^2 \times cx^2, \quad bx \times dx^3, \quad ab \times cx^4$$

したがって、 x^4 の係数は **$ac + bd + abc$**

- 2** (1) 余弦定理 $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cos B$ により

$$\begin{aligned}
 CA^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a \right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a \times a \cos 30^\circ \\
 &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}a^2 + a^2 - (\sqrt{3}+1)a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2 \\
 &= \frac{1}{2}a^2
 \end{aligned}$$

$$CA > 0 \text{ であるから } CA = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

- (2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot CA \cdot AB} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a \right)^2 - a^2}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}a \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}a} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 - a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2 \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ から } A = 45^\circ$$

【別解 (2)】 $b = CA$, $c = AB$ とおくと 正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$a \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}a \sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす A の値は $A = 45^\circ, 135^\circ$

ここで, $b < a < c$ より $B < A < C$ であるから $A = 135^\circ$ は不適.

よって **$A = 45^\circ$**

- 3** $f(x) = x^2 - (a+2)x + a^2 - 3a + 4$ とおくと,
 x^2 の係数が正であるから $f(x) = 0$ の解 α, β
 が $1 < \alpha < 2 < \beta$ を満たすとき

$$f(1) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) < 0$$

であればよいから

$$1^2 - (a+2) \cdot 1 + a^2 - 3a + 4 > 0$$

$$2^2 - (a+2) \cdot 2 + a^2 - 3a + 4 < 0$$

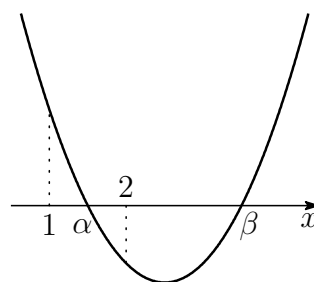
したがって、次の連立不等式を解けばよい.

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 3 > 0 \\ a^2 - 5a + 4 < 0 \end{cases}$$

第1式から $a < 1, 3 < a \cdots \textcircled{1}$

第2式から $1 < a < 4 \cdots \textcircled{2}$

よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $3 < a < 4$



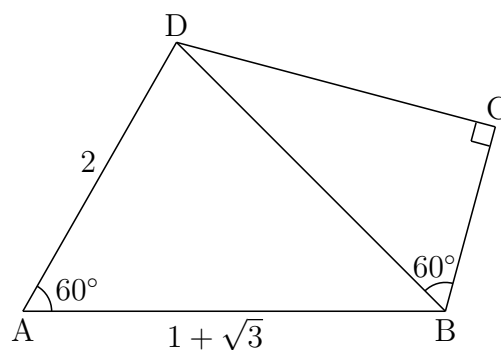
1.26 平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = ax^2 + x - 3$ の最大値が 2 であるような定数 a の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ と $y = ax^2 + bx - 10$ の頂点が一致するような定数 a, b の値を求めよ。

(3) 右図において、辺 CD の長さを求めよ。



2 $\triangle ABC$ において、BC の中点を D とする。 $AB = \sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$ であるとき、次の各問に答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) CA の長さを求めよ。

3 関数 $y = -x^2 + 4x$ ($a \leq x \leq a + 4$) の最大値と最小値を求めよ。ただし、定数 a は $|a| \leq 2$ とする。

解答例

- 1 (1) 2次関数 $y = ax^2 + x - 3$ において, $y = 2$ となる x の値は
 $ax^2 + x - 3 = 2$ から, 2次方程式

$$ax^2 + x - 5 = 0$$

の解である. この方程式は重解をもつので, 係数について

$$1^2 - 4a \cdot (-5) = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 1 + 20a = 0$$

$$a < 0 \text{ に注意して} \quad a = -\frac{1}{20}$$

- (2) $y = 2x^2 - 12x + 17 \cdots \textcircled{1}$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 6x) + 17 \\ &= 2\{(x - 3)^2 - 3^2\} + 17 \\ &= 2(x - 3)^2 - 1 \end{aligned}$$

したがって, 放物線 $\textcircled{1}$ の頂点の座標は $(3, -1)$

放物線 $y = ax^2 + bx - 10 \cdots \textcircled{2}$ の頂点の座標の座標は $(3, -1)$ であるから, $\textcircled{2}$ の右辺は, x^2 の係数に注意して次のようにかける.

$$ax^2 + bx - 10 = a(x - 3)^2 - 1$$

$$\text{整理すると} \quad = ax^2 - 6ax + 9a - 1$$

$$\text{上式の係数を比較して} \quad b = -6a, \quad -10 = 9a - 1$$

$$\text{これを解いて} \quad a = -1, \quad b = 6$$

- (3) $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos A \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \cdot 2 \cos 60^\circ \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 4(1 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{2} \\ &= 8 + 2\sqrt{3} - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

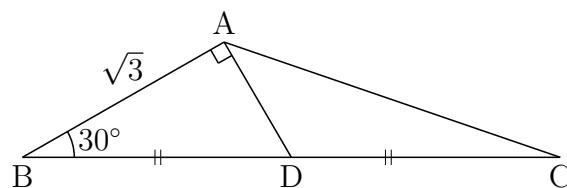
$$BD > 0 \text{ であるから} \quad BD = \sqrt{6}$$

$$\text{したがって} \quad CD = BD \sin 60^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

2 (1) 右の図より

$BD = 2$ であるから $BC = 4$
 よって, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \sin 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



(2) $AD = 1$, $DC = 2$, $\angle ADB = 120^\circ$ であるから, 余弦定理により

$$\begin{aligned} CA^2 &= AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos \angle ADC \\ &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ \\ &= 1 + 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

$CA > 0$ であるから $CA = \sqrt{7}$

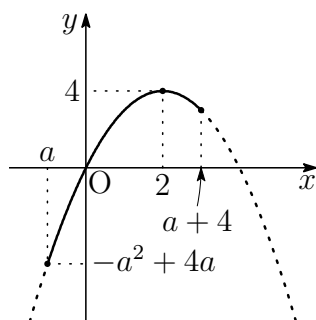
3 $|a| \leq 2$ から $-2 \leq a \leq 2$

$y = -x^2 + 4x$ を変形すると $y = -(x-2)^2 + 4$

$-2 \leq a < 0$ のとき

$x = 2$ で最大値 4

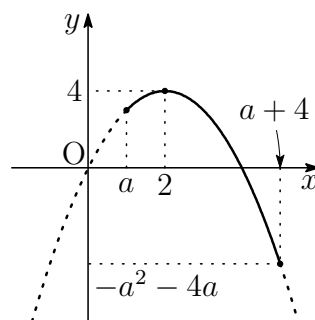
$x = a$ で最小値 $-a^2 + 4a$



$0 \leq a \leq 2$ のとき

$x = 2$ で最大値 4

$x = a+4$ で最小値 $-a^2 - 4a$



[補足] $-2 \leq a \leq 0$ と $0 < a \leq 2$ の場合に分けてもよい.