平成21年度　青照館　一般入学試験(第2期)試験問題
数学I・数学A(平成20年11月9日)60分

I. $x+y=p$，$xy=q$ のとき，x^2+y^2，x^3+y^3，x^4+y^4 をそれぞれ p，q で表しなさい。

II. $y=x^2-kx+1$ のグラフが x 軸から切り取る長さが 1 になるように k の値を定めよ。

III. 一辺の長さが 6 の正四面体の表面積と体積を求めなさい。

IV. $\sqrt{5}$ は無理数であることを証明しなさい。

解答例

I. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\boldsymbol{p^2-2q}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=\boldsymbol{p^3-3pq}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=(p^2-2q)^2-2q^2=\boldsymbol{p^4-4p^2q+2q^2}$

II. x 軸との共有点がもつとき，その x 座標は

$$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$$

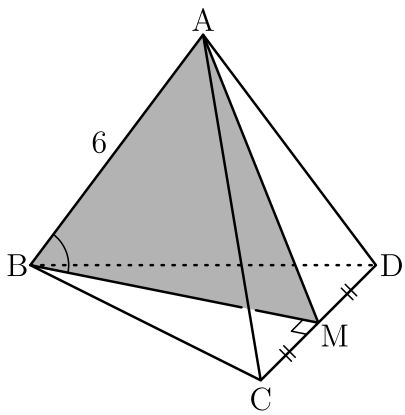
したがって，x 軸から切り取る線分の長さは

$$\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}-\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}=\sqrt{k^2-4}$$

このとき，$\sqrt{k^2-4}=1$ を解いて　$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{5}}$

III. 一辺の長さが 6 の正四面体の表面積 S は

$$S = 4 \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 60^\circ = \mathbf{36\sqrt{3}}$$



正四面体 ABCD の CD の中点を M とすると
$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} = \mathrm{BC} \sin 60^\circ = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
よって，△ABM において

$$\begin{aligned} \cos\angle\mathrm{ABM} &= \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BM}^2 - \mathrm{AM}^2}{2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BM}} \\ &= \frac{6^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2}{2 \times 6 \times 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ゆえに　$\sin\angle\mathrm{ABM} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABM} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BM} \times \sin\angle\mathrm{ABM} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって，正四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABM} \times \mathrm{CD} = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{2} \times 6 = \mathbf{18\sqrt{2}}$$

IV. 「$\sqrt{5}$ は無理数でない」すなわち

「$\sqrt{5}$ は有理数である」

と仮定すると，$\sqrt{5}$ は互いに素である自然数 m，n を用いて

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n} \qquad \cdots ①$$

と表すことができる．

① より　$\sqrt{5}\,n = m$

この両辺を 2 乗すると

$$5n^2 = m^2 \qquad \cdots ②$$

よって，m^2 は 5 の倍数である．

m^2 が 5 の倍数ならば，m も 5 の倍数となる．

m は，ある自然数 k を用いて，$m = 5k$ と表されるから，② に代入して

$$5n^2 = 25k^2$$

すなわち　$n^2 = 5k^2$

よって，n^2 は 5 の倍数となり，n も 5 の倍数となる．

m と n がともに 5 の倍数となることは，m と n が互いに素であることに矛盾する．

したがって，$\sqrt{5}$ は有理数ではなく，無理数である．