平成 20 年度　青照館　一般入学試験 (第 6 期) 試験問題
数学 I・数学 A(平成 20 年 3 月 2 日)60 分

I. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を導きなさい。

II. $a+b+c=0$，$abc\neq 0$ のとき

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

の値を求めなさい。

III. 数 km 離れた A 地点と B 地点を，行きは時速 a km，帰りは時速 b km で往復するときの平均時速を，a，b を用いて表しなさい。

IV. 実数 x，y，z について次のことを，それぞれ 1 つの等式で表しなさい。

(1) x，y，z のうち，少なくとも 1 つは 1 に等しい。

(2) x，y，z はどれも 1 に等しい。

(3) x または y は 1 に等しく，かつ z は 1 に等しい。

V. 次の不等式を解きなさい。

(1) $|x+2|<5$

(2) $2x^2-5x-3\leqq 0$

(3) $2x^2-2x-1>0$

(4) $x^2+x+1<0$

VI. a，b，c，d を正の数とするとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つことを用いて

$$a+b+c+d\geqq 4\sqrt[4]{abcd}$$

を証明しなさい。

VII. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ のとき，$x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1$ の値を求めなさい。

解答例

I. $$ax^2+bx+c=0$$

$a\neq 0$ であるから
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えて
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ゆえに
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

よって
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

II. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ より
$a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$ であるから
$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2(bc+ca+ab)}{3abc}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3abc}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

III. 片道 l km とすると，行きに $\frac{l}{a}$ 時間，帰りに $\frac{l}{b}$ 時間かかる．ゆえに，往復 $2l$ km に $\left(\frac{l}{a}+\frac{l}{b}\right)$ 時間要するので，その平均速度は
$$2l\div\left(\frac{l}{a}+\frac{l}{b}\right)=2l\div\frac{l(b+a)}{ab}=\boldsymbol{\frac{2ab}{a+b}}$$

IV. (1) $\boldsymbol{(x-1)(y-1)(z-1)=0}$

(2) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0}$
($|x-1|+|y-1|+|z-1|=0$ なども可)

(3) $\boldsymbol{(x-1)^2(y-1)^2+(z-1)^2=0}$
($|(x-1)(y-1)|+|z-1|=0$ なども可)

V. (1) $-5 < x+2 < 5$ から　$\boldsymbol{-7 < x < 3}$

(2) $(x-3)(2x+1) \leqq 0$ から　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

(3) $2x^2 - 2x - 1 = 0$ を解いて　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

よって，不等式の解は　$\boldsymbol{x < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x}$

(4) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} < 0$ より　**解なし**

VI. $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$，$c+d \geqq 2\sqrt{cd}$ であるから

$$
\begin{aligned}
(a+b)+(c+d) &\geqq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \\
&= 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \\
&\geqq 2 \times 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \\
&= 4\sqrt[4]{abcd}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{a+b+c+d \geqq 4\sqrt[4]{abcd}}$

VII. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$　$\cdots$①

① から　$x + \sqrt{2} = \sqrt{3}$ の両辺を平方すると

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 &= 3 \\
2\sqrt{2}x &= 1 - x^2
\end{aligned}
$$

さらに平方して　$8x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$

整理すると　$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$　$\cdots$②

$x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 2x + 1 = (x^4 - 10x^2 + 1)(x+1) + x$ であるから

これに ①，② を代入して

$$x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 2x + 1 = \boldsymbol{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$