平成 20 年度　青照館　一般入学試験 (第 5 期) 試験問題
数学 I・数学 A(平成 20 年 2 月 17 日)60 分

I. $P(n) = \dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^n}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)}$

について，$P(0)$，$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$ を簡単にしなさい。

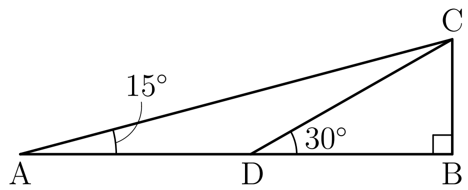
II. $P = ax + by + cz$ について，次のことが成り立つとき，a，b，c の条件を求めよ.
「$x - 2y + z = 0$ かつ $2x + y - 2z = 0$ を満たす x，y，z に対して，
つねに $P = 0$ となる。」

III. 実数 a，b，c が $a + b + c \geqq 0$ を満たすとき，

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$$

が成り立つことを証明しなさい。

IV. 下の図を利用して，$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ の値をそれぞれ求めよ.
解答は無理数のままでよい。



解答例

I. $P(n)=\dfrac{-a^n(b-c)-b^n(c-a)-c^n(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ であるから

$$Q(n)=-a^n(b-c)-b^n(c-a)-c^n(a-b) \qquad \cdots(*)$$

とおくと

$$P(n)=\frac{Q(n)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \qquad \cdots(**)$$

$Q(n)$ は a，b，c に関する $(n+1)$ 次の対称式である．

$Q(n)$ において $a=b$ を代入すると，$Q(n)=0$ となるので，$Q(n)$ は $a-b$ を因数にもつ．$Q(n)$ は対称式であるから，さらに $b-c$，$c-a$ を因数にもつ．

[0] $n=0$ のとき $Q(n)$ は 1 次式であるから　$Q(0)=0$

$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(0)=0}$

[1] $n=1$ のとき $Q(n)$ は 2 次式であるから　$Q(1)=0$

$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(1)=0}$

[2] $n=2$ のとき $Q(n)$ は 3 次式であるから，$Q(2)$ は定数 k を用いて

$$Q(2)=k(a-b)(b-c)(c-a)$$

と表される．これと $(*)$ の a^2 の係数を比較して，$k=1$ を得る．

$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(2)=1}$

[3] $n=3$ のとき $Q(n)$ は 4 次式であるから，$Q(3)$ は定数 l を用いて

$$Q(3)=l(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

と表される．これと $(*)$ の a^3 の係数を比較して，$l=1$ を得る．

$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(3)=a+b+c}$

[4] $n=4$ のとき $Q(n)$ は 5 次式であるから，$Q(4)$ は定数 m_1，m_2 を用いて

$$Q(4)=(a-b)(b-c)(c-a)\{m_1(a^2+b^2+c^2)+m_2(ab+bc+ca)\}$$

と表される．これと $(*)$ の a^4 の係数を比較して，$m_1=1$ を得る．

$a=2$，$b=1$，$c=0$ を上式に代入すると　$-14=-2(5m_1+2m_2)$

$m_1=1$ をこれに代入して　$m_2=1$

$(**)$ により　　$P(4)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$　($n=4$ は参考まで)

II. $x-2y+z=0$，$2x+y-2z=0$ から　$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$

これを t とおいて，P に代入すると　$P=(3a+4b+5c)t$

つねに $P=0$ であるためには　　$\boldsymbol{3a+4b+5c=0}$

III. 等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

が成り立つ.

また，a，b が実数であるとき

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

したがって，上の 2 式から a，b，c が実数のとき

$a+b+c \geqq 0$ を満たすとき，$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ が成り立つ.

IV. $\mathrm{BC}=1$ とするとき，$\mathrm{DB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CD}=2$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形であるから　$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=2$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=2+\sqrt{3}$

さらに　$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

したがって　$\sin 15^\circ=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos 15^\circ=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$