平成 20 年度　青照館　一般入学試験 (第 4 期) 試験問題
数学 I・数学 A(平成 20 年 1 月 13 日)60 分

I. 次の各式を因数分解せよ。

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(2) $(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16$

(3) $x^2y+x^2+x-xy^2-y^2-y$

II. 次の式の二重根号をはずしなさい。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

III. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}$ の値を求めよ。

IV. 次の不等式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+3>x-1 & \cdots ① \\ x-5 \geqq 4-\dfrac{2}{3}x & \cdots ② \end{cases}$

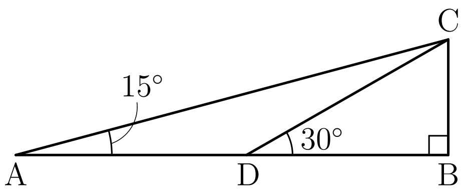
(2) $|x+2|<5$

V. 実数 a，b，c が $a+b+c \geqq 0$ を満たすとき，

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$$

が成り立つことを証明しなさい。

VI. 下の図を利用して，$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ の値をそれぞれ求めよ.
解答は無理数のままでよい。



VII. REHABILI という単語に使われている文字について，次のものを求めよ。

(1) この 8 文字全部を用いてできる順列の数。

(2) このうち 4 文字を使ってできる組合せの数。

(3) このうち 4 文字を使ってできる順列の数。

解答例

I. (1) (特定の文字に着目する．ここでは a に注目した．)

$$
\begin{aligned}
& a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) \\
=& -(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2 \\
=& -(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c) \\
=& -(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\
=& -(b-c)(a-b)(a-c) \\
=& \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

(2) (平方差をつくる)

$$
\begin{aligned}
& (x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16 \\
=& (x^2-y^2)^2-8\{(x^2-y^2)+2y^2\}+16 \\
=& (x^2-y^2)-8(x^2-y^2)+16-16y^2 \\
=& \{(x^2-y^2)-4\}^2-(4y)^2 \\
=& \{(x^2-y^2-4)+4y\}\{(x^2-y^2-4)-4y\} \\
=& \{x^2-(y^2-4y+4)\}\{x^2-(y^2+4y+4)\} \\
=& \{x^2-(y-2)^2\}\{x^2-(y+2)^2\} \\
=& \{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}\{x+(y+2)\}\{x-(y+2)\} \\
=& \boldsymbol{(x+y-2)(x-y+2)(x+y+2)(x-y-2)}
\end{aligned}
$$

(3) (次数の等しい項でまとめる)

$$
\begin{aligned}
& x^2y+x^2+x-xy^2-y^2-y \\
=& x^2y-xy^2+x^2-y^2+x-y \\
=& xy(x-y)+(x+y)(x-y)+(x-y) \\
=& (x-y)\{xy+(x+y)+1\} \\
=& \boldsymbol{(x-y)(x+1)(y+1)}
\end{aligned}
$$

II. (1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}$

(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

III. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{19-2\sqrt{48}}=\sqrt{16}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

ゆえに　$a+b=4-\sqrt{3}\cdots$①

$-2<-\sqrt{3}<-1$ であるから，$2<4-\sqrt{3}<3$　よって　$a=2$

これを ① に代入して　$b=2-\sqrt{3}$

したがって　

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b} &= \frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{4-\sqrt{3}} \\
&= 2+\sqrt{3}+\frac{4+\sqrt{3}}{13} \\
&= \boldsymbol{\frac{30+14\sqrt{3}}{13}}
\end{aligned}
$$

IV. (1) ① から　$x<8$　$\cdots$③

② から　$x \geqq \dfrac{27}{5}$　$\cdots$④

③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{27}{5} \leqq x < 8}$

(2) $-5<x+2<5$ から　$\boldsymbol{-7<x<3}$

V. 等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

が成り立つ.

また，a，b が実数であるとき

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

したがって，上の 2 式から a，b，c が実数のとき

$a+b+c \geqq 0$ を満たすとき，$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ が成り立つ.

VI. $\mathrm{BC}=1$ とするとき，$\mathrm{DB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CD}=2$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形であるから　$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=2$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=2+\sqrt{3}$

さらに　$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

したがって　$\sin 15^\circ=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos 15^\circ=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

VII. (1) $\dfrac{8!}{2!} = \mathbf{2160}$ (通り)

(2) ［1］I 以外の 6 文字から 4 文字を用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15 \text{ (通り)} $$

［2］I を 1 文字と，I 以外の 6 文字から 3 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20 \text{ (通り)} $$

［3］I を 2 文字と，I 以外の 6 文字から 2 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15 \text{ (通り)} $$

よって　$15 + 20 + 15 = \mathbf{50}$ (通り)

(3) ［1］I 以外の 6 文字から 4 文字を用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_4 \times 4! = 15 \times 24 = 360 \text{ (通り)} $$

［2］I を 1 文字と，I 以外の 6 文字から 3 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \times 4! = 20 \times 24 = 480 \text{ (通り)} $$

［3］I を 2 文字と，I 以外の 6 文字から 2 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!} = 15 \times 12 = 180 \text{ (通り)} $$

よって　$360 + 480 + 180 = \mathbf{1020}$ (通り)