平成19年度　青照館　推薦前期入学試験問題
数学I・数学A(平成18年10月22日)

I. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$ を簡単にせよ。 【1】

① $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$　② $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$
③ $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$　④ $10-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$

II. 次の式の2重根号を外し，簡単にせよ。 【2】

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

① $\sqrt{5}+2$　② $\sqrt{5}-2$　③ $2-\sqrt{5}$　④ $-\sqrt{5}-2$

III. $xyz=1$ のとき $\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}+\dfrac{1}{1+x+xy}$ を求めよ。 【3】

① 0　② 1　③ 2　④ 3

IV. $a,b,c,d>0$ のとき $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) \geqq \boxed{}$ 【4】

① 1　② 2　③ 3　④ 4

V. $2<x<3$ のとき $\sqrt{(2-x)^2}-|\,x-3\,|=\boxed{}$ 【5】

① $2x+5$　② $2x-5$　③ $-2x+5$　④ $-2x-5$

VI. $x<1$ は $x^2-3x+2>0$ であるための $\boxed{}$。 【6】

① 必要十分条件　② 必要条件
③ 十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

VII. $y=x^2+(k+3)x+4k$ のグラフが，x 軸と接するときの k の値を求めよ。 【7】

① $k=-1,-9$　② $k=-1,\ 9$　③ $k=1,-9$　④ $k=1,\ 9$

VIII. 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。 【8】

① $y=2x^2+8x+11$　② $y=2x^2+8x-11$
③ $y=2x^2-8x+11$　④ $y=2x^2-8x-11$

IX. A R I A K E の 6 文字を並べ替えるとき全部で何通りの並べ方があるか。【**9**】

① 90　② 180　③ 360　④ 540　⑤ 720

X. くじが 10 本あり，このうち 4 本が当たりくじである．このくじから同時に 3 本引くとき，少なくとも 1 本が当たる確率を求めよ。【**10**】

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{2}{6}$　③ $\frac{3}{6}$　④ $\frac{4}{6}$　⑤ $\frac{5}{6}$

XI. 1 から 8 の目のある正八面体のサイコロを投げるとき出る目の期待値はいくらか。【**11**】

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{8}{2}$　③ $\frac{9}{2}$　④ $\frac{10}{2}$　⑤ $\frac{11}{2}$

XII. 1 から 100 までの自然数の中で，3 または 5 で割り切れる数は何個あるか。

① 41　② 47　③ 53　④ 59　【**12**】

XIII. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\tan\theta = -\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めよ。【**13**】

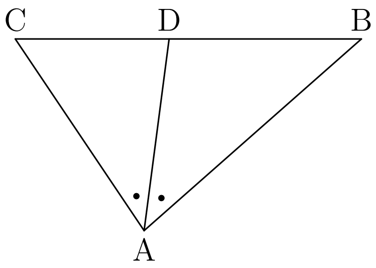
① $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

XIV. $\triangle$ABC において，$A = 45^\circ$，$C = 105^\circ$，$b = 3$ のとき，a の値を求めよ。【**14**】

① $3\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$

XV. 下図で AD が ∠A の二等分線であるとき BD の値を求めよ。AB = 15，BC = 18，CA = 12 とする。【**15**】



① 10
② 11
③ 12
④ 13

解答例

I. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}^2$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$$

$$=(5+2\sqrt{6})-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5$$

$$=\boldsymbol{10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}$$

II. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2{\cdot}2\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$

III. $$\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}+\frac{1}{1+x+xy}$$

$$=\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y(1+z+zx)}+\frac{yz}{yz(1+x+xy)}$$

$$=\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y+yz+xyz}+\frac{yz}{yz+xyz+xyz{\cdot}y}$$

$$=\frac{1}{1+y+z}+\frac{y}{y+yz+1}+\frac{yz}{yz+1+y}=\frac{1+y+yz}{1+y+yz}=\boldsymbol{1}$$

IV. $$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}+2$$

$\dfrac{bc}{ad}>0$，$\dfrac{ad}{bc}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}\geqq 2\sqrt{\frac{bc}{ad}{\cdot}\frac{ad}{bc}}=2$$

したがって　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc}+2\geqq 2+2=\boldsymbol{4}$

V. $$\sqrt{(2-x)^2}-|\,x-3\,|=|\,2-x\,|-|\,x-3\,|$$

$2<x<3$ のとき　$2-x<0$，$x-3<0$ であるから

$$|\,2-x\,|=-(2-x)=x-2,\ |\,x-3\,|=-(x-3)=-x+3$$

よって　$\sqrt{(2-x)^2}-|\,x-3\,|=|\,2-x\,|-|\,x-3\,|$

$$=x-2-(-x+3)=\boldsymbol{2x-5}$$

VI. $x<1\Rightarrow x^2-3x+2>0$，$x<1\not\Leftarrow x^2-3x+2>0$ より　**十分条件**

VII. 2次関数 $y=x^2+(k+3)x+4k$ の係数について

$$D=(k+3)^2-4{\cdot}1{\cdot}4k=k^2-10k+9=(k-1)(k-9)$$

とする．グラフが x 軸と接するための条件は $D=0$ が成り立つことであるから

$(k-1)(k-9)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{k=1,\ 9}$

VIII. 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y-3=2(x+2)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x^2+8x+11}$$

IX. A を 2 個，R，I，K，E をそれぞれ 1 個の 6 文字を 1 列に並べるから

$$\frac{6!}{2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=\mathbf{360}\ \text{(通り)}$$

X. 3 本ともはずれる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{6}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1-\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

XI. どの目が出る確率も $\dfrac{1}{8}$ である．

目	1	2	3	4	5	6	7	8	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，出る目の期待値は

$$1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{8}=\frac{36}{8}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

XII. 3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると

$$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,3\cdot33\}$$

$$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,5\cdot20\}$$

$$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}$$

これらの集合の要素の個数は，$n(A)=33$，$n(B)=20$，$n(A\cap B)=6$

求める個数は，$n(A\cup B)$ であるから

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ &=33+20-6=\mathbf{47} \qquad \text{(個)}\end{aligned}$$

XIII. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-\sqrt{2})^2}=\frac{1}{3}$$

$\tan\theta<0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta<0$ である．

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

XIV. $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

ゆえに

$$a \sin 30^\circ = 3 \sin 45^\circ$$
$$a \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a = \mathbf{3\sqrt{2}}$$

XV. AD は ∠A の二等分線であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD : DC} &= \mathrm{AB : CA} \\ &= 15 : 12 = 5 : 4\end{aligned}$$

よって，線分 BD の長さは

$$\mathrm{BD} = \frac{5}{5+4}\mathrm{BC} = \frac{5}{9} \times 18 = \mathbf{10}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	②	④	②
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	④	①	③	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	②	②	③	①

【1】～【10】は各 3 点,【11】～【15】は各 4 点，計 50 点