平成19年度　青照館　推薦後期入学試験問題
数学I・数学A(平成18年11月23日)

I. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ を簡単にせよ。 【1】

① $6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$　② $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$
③ $6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$　④ $6-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

II. 次の式の2重根号を外し，簡単にせよ。 【2】

$$\sqrt{14-4\sqrt{6}}$$

① $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$　③ $-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$　④ $-2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

III. $a+b+c=0$，$abc \neq 0$ のとき $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ を求めよ.

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3 【3】

IV. $a, b>0$ のとき $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq \boxed{}$ 【4】

① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

V. $-1<a<1$ のとき $|\,a-1\,|+|\,a+1\,|=\boxed{}$ 【5】

① 2　② $2a$　③ -2　④ $-2a$

VI. $x>2$ は $x^2-2x>0$ であるための$\boxed{}$。 【6】

① 必要十分条件　② 必要条件
③ 十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

VII. $y=2x^2-4kx+k+1$ のグラフが，x 軸と接するときの k の値を求めよ。 【7】

① $k=-\dfrac{1}{2}, -1$　② $k=-\dfrac{1}{2},\ 1$　③ $k=\dfrac{1}{2}, -1$　④ $k=\dfrac{1}{2},\ 1$

VIII. 放物線 $y=-x^2$ を x 軸方向に2，y 軸方向に5だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。 【8】

① $y=-x^2-4x-1$　② $y=-x^2+4x+1$
③ $y=-x^2-4x+1$　④ $y=-x^2+4x-1$

IX. C O L L E G E の 7 文字を並べ替えるとき全部で何通りの並べ方があるか。**【9】**

① 630　② 1260　③ 1680　④ 2520　⑤ 5040

X. 3 本の当たりくじを含む 15 本のくじがある。同時に 3 本引くとき，少なくとも 1 本が当たる確率を求めよ。**【10】**

① $\dfrac{45}{91}$　② $\dfrac{46}{91}$　③ $\dfrac{47}{91}$　④ $\dfrac{48}{91}$　⑤ $\dfrac{49}{91}$

XI. 硬貨 3 枚を投げるとき，裏の出る枚数の期待値はいくらか。**【11】**

① $\dfrac{8}{8}$　② $\dfrac{9}{8}$　③ $\dfrac{10}{8}$　④ $\dfrac{11}{8}$　⑤ $\dfrac{12}{8}$

XII. 1 から 100 までの自然数の中で，4 または 7 で割り切れる数は何個あるか。

① 33　② 36　③ 39　④ 42　**【12】**

XIII. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\tan\theta = -\dfrac{12}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めよ。**【13】**

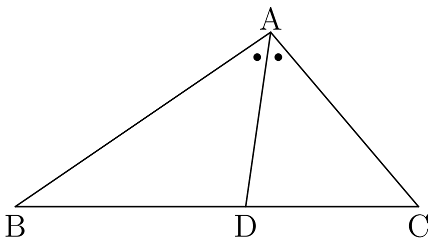
① $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$　② $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$

③ $\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$　④ $\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$

XIV. $\triangle$ABC において，AC $= 5$，$B = 30^\circ$，$C = 45^\circ$ のとき，AB の長さを求めよ。

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $5\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{2}$　**【14】**

XV. 下図で AD が $\angle$A の二等分線であるとき BD の値を求めよ。AB $= 16$，BC $= 21$，CA $= 12$ とする。**【15】**



① 11
② 12
③ 13
④ 14

解答例

I. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = \{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}^2$

$$\begin{aligned} &= 1+2(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \\ &= 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+(5-2\sqrt{6}) \\ &= \mathbf{6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

II. $\sqrt{14-4\sqrt{6}} = \sqrt{14-2\cdot 2\sqrt{6}} = \sqrt{14-2\sqrt{24}} = \sqrt{12}-\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

III. $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$$= \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

$$= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} = \mathbf{-3}$$

IV. $$(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4$$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}} = 4$$

したがって　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4 \geqq 4+4 = \mathbf{8}$

V. $-1<a<1$ のとき　$a-1<0$，$a+1>0$ であるから

$$|\,a-1\,| = -(a-1) = -a+1,\ \ |\,a+1\,| = a+1$$

よって　$|\,a-1\,|+|\,a+1\,| = (-a+1)+(a+1) = \mathbf{2}$

VI. $x>2 \Rightarrow x^2-2x>0$，$x>2 \not\Leftarrow x^2-2x>0$ より　**十分条件**

VII. 2 次関数 $y=2x^2-4kx+k+1$ の係数について

$$D/4 = (-2k)^2-2(k+1) = 2(2k^2-k-1) = 2(2k+1)(k-1)$$

とする．グラフが x 軸と接するための条件は $D=0$ が成り立つことであるから

$(2k+1)(k-1)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{2},\ 1}$

VIII. 放物線 $y=-x^2$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものは

$$y-5=-(x-2)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2+4x+1}$$

IX. L を 2 個，E を 2 個，C，O，G をそれぞれ 1 個の 7 文字を 1 列に並べるから

$$\frac{7!}{2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}=\mathbf{1260}\ \text{(通り)}$$

X. 3 本ともはずれる確率は $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\dfrac{44}{91}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1-\dfrac{44}{91}=\mathbf{\dfrac{47}{91}}$

XI. 裏の出る枚数を X 枚とすると，
次のような表ができる．

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

したがって，求める期待値は

$$0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{12}{8}}$$

(表，表，表)
(表，表，裏)
(表，裏，表)
(裏，表，表)
(表，裏，裏)
(裏，表，裏)
(裏，裏，表)
(裏，裏，裏)

XII. 4 の倍数の集合を A，7 の倍数の集合を B とすると

$$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots,4\cdot25\}$$
$$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots,7\cdot14\}$$
$$A\cap B=\{28\cdot1,\ 28\cdot2,\ 28\cdot3\}$$

これらの集合の要素の個数は，$n(A)=25$，$n(B)=14$，$n(A\cap B)=3$

求める個数は，$n(A\cup B)$ であるから

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ &=25+14-3=\mathbf{36} \qquad \text{(個)}\end{aligned}$$

XIII. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=1\div\left\{1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2\right\}=\frac{25}{169}$$

$\tan\theta<0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta<0$ である．

よって $\quad \cos\theta=-\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\mathbf{-\dfrac{5}{13}}$

また $\quad \sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-\dfrac{12}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\mathbf{\dfrac{12}{13}}$

XIV. 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

ゆえに

$$5\sin 45^\circ = \mathrm{AB}\sin 30^\circ$$
$$5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{AB} \times \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{AB} = \mathbf{5\sqrt{2}}$$

XV. AD は ∠A の二等分線であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{CA} \\ &= 16 : 12 = 4 : 3\end{aligned}$$

よって，線分 BD の長さは

$$\mathrm{BD} = \frac{4}{4+3}\mathrm{BC} = \frac{4}{7} \times 21 = \mathbf{12}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	①	⑤	①
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	②	②	②	③
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
⑤	②	②	③	②

【1】～【10】は各 3 点,【11】～【15】は各 4 点，計 50 点