

平成19年度 青照館 一般入学試験 C日程 試験問題
 数学I・数学A(平成19年3月21日)60分

I. 次の数列の□に適する数を選べ。 【1】

40, 37, 33, 28, 22, 15, □, …

- ① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

II. 次の各問いに答えよ。

1) $\alpha < 4$ のとき $\sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16}$ を簡単にせよ。 【2】

- ① $-\alpha - 4$ ② $-\alpha + 4$ ③ $\alpha - 4$ ④ $\alpha + 4$

2) $a + b + c = 0$ のとき $a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab)$ の値を求めよ。 【3】

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3) 二重根号 $\sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$ を簡単にせよ。 【4】

- ① $\sqrt{2} - 3$ ② $3 - \sqrt{2}$ ③ $-3 - \sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2} + 3$

4) $a, b, c > 0$ のとき 【5】

$$(b + c)(c + a)(a + b) \geq \square$$

- ① $2abc$ ② $3abc$ ③ $4abc$ ④ $8abc$ ⑤ $10abc$

5) 方程式 $x + 2|x + 3| = 0$ を解け。 【6】

- ① $x = 2, 6$ ② $x = -2, 6$ ③ $x = -6, 2$ ④ $x = -6, -2$

6) x についての不等式 $x^2 + (k - 2)x + k + 1 > 0$ の解が、実数全体になるような定数 k の値の範囲を求めよ。 【7】

- ① $0 < k < 8$ ② $-8 < k < 0$ ③ $k < 0, 8 < k$ ④ $-8 < k, 0 < k$

7) $a = b = 0$ は、 $a^2 + b^2 = 0$ であるための□。 【8】

- ① 十分条件である ② 必要条件である
 ③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

8) 次の等式が x についての恒等式となるように a, b, c の値を定めよ。 【9】

$$4x^2 + 3x + 2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

- ① $a = 4, b = 11, c = 9$ ② $a = -4, b = 11, c = -9$
 ③ $a = 4, b = -11, c = 9$ ④ $a = -4, b = 11, c = -9$

9) n を正の整数とする。 n を 5 で割った余りが 3 のとき, n^2 を 5 で割ったときの余りを求めよ。 【10】

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

III. 次の 2 次関数の問いに答えよ。

1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と 2 点 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ で交わり, 点 $(1, -4)$ を通るという。 a, b, c の値を求めよ。 【11】

- ① $a = 2, b = 2, c = -4$ ② $a = 2, b = -2, c = -4$
 ③ $a = 2, b = -2, c = 4$ ④ $a = 2, b = 2, c = 4$

2) 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ を y 軸に関して対称な放物線を求めよ。 【12】

- ① $y = x^2 + 2x + 3$ ② $y = x^2 + 2x - 3$
 ③ $y = x^2 - 2x + 3$ ④ $y = x^2 - 2x - 3$

3) $x + 3y = 1$ のとき, $x^2 + y^2$ の Min(最小値) を求めよ。 【13】

- ① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{3}{10}$

IV. 次の三角不等式を解け。 【14】

$$\tan \theta < -1 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

- ① $90^\circ < \theta < 150^\circ$ ② $90^\circ < \theta < 135^\circ$
 ③ $135^\circ < \theta < 150^\circ$ ④ $135^\circ < \theta < 180^\circ$

V. $\triangle ABC$ について次の値を求めよ。

1) $\angle A = 45^\circ$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{3}$ のとき a の長さ 【15】

- ① $4\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2}$

2) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 + \sqrt{3}$ のとき $\angle A$ の大きさ 【16】

- ① 30° ② 45° ③ 60° ④ 90°

3) $b = 2$, $c = 1$, $\cos A = \frac{1}{4}$ のとき $\triangle ABC$ の面積を求めよ。 【17】

- ① $\sqrt{15}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{6}$

VI. 3個のサイコロを同時に投げるとき, 3個の目の積が偶数になる確率を求めよ。

- ① $\frac{4}{8}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{6}{8}$ ④ $\frac{7}{8}$ 【18】

VII. 1枚の硬貨を5回投げるとき, ちょうど3回表が出る確率を求めよ。 【19】

- ① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{6}{16}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{8}{16}$

VIII. 赤玉4個, 青玉3個, 白玉2個がある。この中から8個取り出して1列に並べる方法は何通りあるか。 【20】

- ① 700 ② 840 ③ 980 ④ 1260 ⑤ 2560

IX. A, B が全体集合 U の部分集合でその要素の個数が $n(U) = 100$, $n(A) = 65$, $n(B) = 40$, $n(A \cap B) = 15$ のとき, 次の各集合の要素の個数を求めよ。

1) $\overline{A} \cap \overline{B}$ 【21】

- ① 10 ② 25 ③ 35 ④ 50

2) $\overline{A} \cup B$ 【22】

- ① 25 ② 35 ③ 50 ④ 55

X. 10本のくじがあり, 1等1本, 2等2本の当たりくじが入っている。今3本のくじを同時に引くものとする。

1) 1等が当たる確率を求めよ。 【23】

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{10}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{4}{10}$

2) 1等1本, 2等1本が当たる確率を求めよ。 【24】

- ① $\frac{6}{60}$ ② $\frac{7}{60}$ ③ $\frac{8}{60}$ ④ $\frac{9}{60}$ ⑤ $\frac{10}{60}$

3) 3本ともハズレの確率を求めよ。 【25】

- ① $\frac{6}{24}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{8}{24}$ ④ $\frac{9}{24}$

解答例

I. $40 - \underline{3} = 37$, $37 - \underline{4} = 33$, $33 - \underline{5} = 28$, $28 - \underline{6} = 22$, $22 - \underline{7} = 15$, $15 - \underline{8} = 7$

したがって $\square = 7$

II. 1) $\sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16} = \sqrt{(\alpha - 4)^2} = |\alpha - 4|$

$\alpha < 4$ のとき $\alpha - 4 < 0$ であるから $|\alpha - 4| = -(\alpha - 4) = -\alpha + 4$

したがって $\sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16} = -\alpha + 4$

2) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a^2 + 2ab + b^2) + 2ca + 2bc + c^2$
 $= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$
 $= \{(a + b) + c\}^2 = (a + b + c)^2$

したがって $a + b + c = 0$ のとき $a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) = 0$

3) $\sqrt{11 - 3\sqrt{8}} = \sqrt{11 - 3 \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{11 - 2 \cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{18}}$
 $= \sqrt{(9 + 2) - 2\sqrt{9 \cdot 2}} = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$

4) $a, b, c > 0$ であるから, 相加平均, 相乗平均の関係により

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}, a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

したがって

$$(b + c)(c + a)(a + b) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$$

5) [1] $x \geq -3$ のとき, $|x + 3| = x + 3$ であるから

方程式は $x + 2(x + 3) = 0$

これを解いて $x = -2$

これは, $x \geq -3$ を満たすから, 解である.

[2] $x < -3$ のとき, $|x + 3| = -x - 3$ であるから

方程式は $x + 2(-x - 3) = 0$

これを解いて $x = -6$

これは, $x < -3$ を満たすから, 解である.

したがって, 求める解は $x = -2, -6$

6) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D = (k - 2)^2 - 4 \cdot 1(k + 1) = k^2 - 8k$$

とする. 2 次不等式の x^2 の係数が正であるから, $D < 0$ が成り立てばよい.

$$k^2 - 8k < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < k < 8$$

$$7) a = b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0,$$

$$a = b = 0 \Leftarrow a^2 + b^2 = 0$$

よって, 必要十分条件.

8) 等式の左辺を整理すると

$$4x^2 + 3x + 2 = ax^2 + (-2a + b)x + (a - b + c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$4 = a, 3 = -2a + b, 2 = a - b + c$$

これを解いて $a = 4, b = 11, c = 9$

9) n は整数 k を用いて

$$n = 5k + 3$$

とかけるので

$$n^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$$

$5k^2 + 6k + 1$ は整数であるから, 求める余りは4である.

III. 1) x 軸と2点 $(-1, 0), (2, 0)$ で交わるので, 放物線の方程式は,

$$y = a(x + 1)(x - 2)$$

とおける. これが点 $(1, -4)$ を通るから

$$-4 = a(1 + 1)(1 - 2) \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

したがって $y = 2(x + 1)(x - 2)$ すなわち $y = 2x^2 - 2x - 4$

よって $a = 2, b = -2, c = -4$

2) 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ を y 軸に関して対称移動をすると

$$y = (-x)^2 - 2(-x) - 3 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 2x - 3$$

3) $x = 1 - 3y$ であるから

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 - 3y)^2 + y^2 \\ &= 10y^2 - 6y + 1 \\ &= 10 \left(y - \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

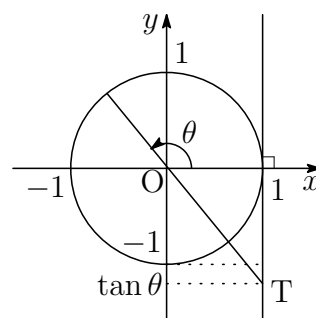
よって, $y = \frac{3}{10}, x = \frac{1}{10}$ のとき最小値 $\frac{1}{10}$ をとる.

IV. 右の図のように，角 θ の動径と直線 $x = 1$ の交点 T の y 座標が $\tan \theta$ であるから， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において

$$\tan \theta < -1$$

を満たす θ の値の範囲は

$$90^\circ < \theta < 135^\circ$$



V. 1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3} \cos 45^\circ \\ &= (8 - 4\sqrt{3}) + 12 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 8 - 4\sqrt{3} + 12 - 4(3 - \sqrt{3}) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = 2\sqrt{2}$$

2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 3\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} = \frac{18 + 6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{6(3 + \sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を満たす } A \text{ は } A = 45^\circ$$

$$3) \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

VI. 3個のサイコロの目の積が奇数になるのは，3個とも奇数の目でその確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{求める確率は, この余事象の確率であるから } 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{VII. } {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{16}$$

VIII. 赤玉 3 個，青玉 3 個，白玉 2 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560 \text{ (通り)}$$

赤玉 4 個，青玉 2 個，白玉 2 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420 \text{ (通り)}$$

赤玉 4 個，青玉 3 個，白玉 1 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{4!3!1!} = 280 \text{ (通り)}$$

よって $560 + 420 + 280 = 1260$ (通り)

IX. 与えられた条件から

	B	\overline{B}	合計
A	15		65
\overline{A}			
合計	40		100

上の表を完成させると

	B	\overline{B}	合計
A	15	50	65
\overline{A}	25	10	35
合計	40	60	100

1) 上の表から $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 10$

2) 上の表から $n(\overline{A} \cup \overline{B}) = 25 + 10 + 15 = 50$

X. 1) 1等1本と残りの9本から2本引く確率であるから

$$\frac{1 \times {}_9C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$$

2) 1等1本, 2等1本, はずれ1本を引く確率であるから

$$\frac{1 \times {}_2C_1 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \times 2 \times 7}{120} = \frac{7}{60}$$

3) 7本のはずれから3本引く確率であるから

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	②	③	②	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
④	①	③	①	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
②	②	③	②	③
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
②	②	④	①	④
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	③	③	②	②