平成19年度　青照館　一般入学試験B日程　試験問題
数学I・数学A(平成19年2月11日)60分

I. 次の数列の$\boxed{}$に適する数を選べ。 【1】

$14,\ 15,\ 17,\ 20,\ 24,\ 29,\ \boxed{},\ \cdots$

① 32　② 33　③ 34　④ 35　⑤ 36

II. 次の各問いに答えよ。

1) $a < 5$ のとき $\sqrt{a^2 - 10a + 25}$ を簡単にせよ. 【2】

① $a + 5$　② $a - 5$　③ $-a + 5$　④ $-a - 5$

2) $a + b + c = 0$ のとき $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ を求めよ。 【3】

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

3) $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。 【4】

① 5　② $5 + 2\sqrt{3}$　③ 1　④ $1 + 2\sqrt{3}$

4) $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式の$\boxed{}$を埋めよ。 【5】

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geqq \boxed{}$$

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

5) $|\,a - 2\,| + |\,a + 1\,| = 3$ となる a の値の範囲を求めよ。 【6】

① $1 \leqq a \leqq 2$　② $-1 \leqq a \leqq 2$　③ $-2 \leqq a \leqq 1$　④ $-2 \leqq a \leqq -1$

6) 不等式 $x^2 + kx + 3k - 8 > 0$ の解がすべての数であるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。 【7】

① $4 < k < 8$　② $-8 < k < 4$　③ $-4 < k < 8$　④ $-8 < k < -4$

7) $x = y$ は，$x^2 - y^2 = 0$ であるための$\boxed{}$。 【8】

① 必要条件である　② 十分条件である
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でない

8) 次の等式が x についての恒等式になるように定数 a, b, c の値を求めよ。**【9】**

$$ax^2+bx+3=(x-1)(x+1)+c(x+2)^2$$

① $a=2,\ b=4,\ c=1$　② $a=2,\ b=-4,\ c=-1$
③ $a=-2,\ b=4,\ c=-1$　④ $a=-2,\ b=-4,\ c=1$

9) a, b, c は5で割ると余りがそれぞれ1, 2, 3となる正の整数である。$a+2b+3c$ を5で割ると余りはいくらか。**【10】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

III. 次の2次関数の問いに答えよ。

1) $y=x^2+bx+c$ のグラフは，点 $(-2,\ 1)$ を通り x 軸に接するという。b, c の値を求めよ。**【11】**

① $\begin{cases} b=2 \\ c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=6 \\ c=9 \end{cases}$　② $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-6 \\ c=9 \end{cases}$

③ $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=6 \\ c=9 \end{cases}$　④ $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=6 \\ c=-9 \end{cases}$

2) 放物線 $y=x^2-2x+3$ と原点に関して対称な放物線を求めよ。**【12】**

① $y=x^2-2x-3$　② $y=x^2-2x+3$
③ $y=-x^2-2x+3$　④ $y=-x^2-2x-3$

3) $x+3y=k$ のとき，x^2+y^2 の Min(最小値) は4である。定数 k の値を求めよ。**【13】**

① $k=-\sqrt{10}$　② $k=-2\sqrt{10}$　③ $k=\pm 2\sqrt{10}$　④ $k=\pm\sqrt{10}$

IV. 次の三角不等式を解け。**【14】**

$$1 \leqq \sqrt{3}\tan\theta \leqq \sqrt{3} \qquad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

① $30^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$　② $30^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$　③ $30^\circ \leqq \theta \leqq 75^\circ$
④ $45^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$　⑤ $45^\circ \leqq \theta \leqq 75^\circ$

V. △ABC について次の値を求めよ。

1) $b=2\sqrt{3}$, $c=6$, $\angle\mathrm{B}=30^\circ$ のとき △ABC の面積を求めよ。**【15】**

① $3\sqrt{3}$　② $3\sqrt{3},\ 6\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $6\sqrt{3},\ 9\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{3},\ 9\sqrt{3}$

2) 半径 1 の円に内接する △ABC において $\angle A = 60^\circ$，$\angle B = 45^\circ$ とする。

i) BC の長さを求めよ。 【16】

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

ii) CA の長さを求めよ。 【17】

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

iii) △ABC の面積を求めよ。 【18】

① $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}$　② $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　④ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

VI. 1 個のサイコロを 3 回投げるとき，目の和が 7 となるのは何通りあるか。

① 6　② 9　③ 12　④ 15 【19】

VII. 1 個のサイコロを 4 回投げるとき，奇数の目が 2 回出る確率を求めよ。 【20】

① $\dfrac{2}{8}$　② $\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{4}{8}$　④ $\dfrac{5}{8}$

VIII. 6 人を 3 組に分けるとき 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。 【21】

① 15　② 20　③ 30　④ 60　⑤ 90

IX. 1 から 100 までの整数について次の問いに答えよ。

1) 2，3，5 のどれかで割り切れる数は何個あるか。 【22】

① 71　② 72　③ 73　④ 74　⑤ 75

2) 2 でも，3 でも，5 でも割り切れない数は何個あるか。 【23】

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

X. 箱の中に数字 1 を記入したカード 1 枚，数字 2 を記入したカード 2 枚，数字 3 を記入したカード 3 枚の合計 6 枚のカードが入っている。この箱の中から 3 枚のカードを同時に取り出すとき，それぞれのカードに記入されている数字の和を X とする。

1) $X = 7$ となる確率を求めよ。 【24】

① $\dfrac{1}{10}$　② $\dfrac{2}{10}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{4}{10}$　⑤ $\dfrac{5}{10}$

2) X の期待値を求めよ。 【25】

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

解答例

I. $14\underline{+1}=15$, $15\underline{+2}=17$, $17\underline{+3}=20$, $20\underline{+4}=24$, $24\underline{+5}=29$, $29\underline{+6}=35$

したがって $\boxed{}=\mathbf{35}$

II. 1) $\sqrt{a^2-10a+25}=\sqrt{(a-5)^2}=|\,a-5\,|$

$a<5$ のとき $a-5<0$ であるから $|\,a-5\,|=-(a-5)=-a+5$

したがって $\sqrt{a^2-10a+25}=\boldsymbol{-a+5}$

2) $a+b+c=0$ のとき，$c=-(a+b)$ であるから

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\
=&a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3+3(a+b)\{b-(a+b)\}\{-(a+b)+a\}\\
=&a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\
=&a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2\\
=&\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

3) $6\sqrt{3}=2{\cdot}3\sqrt{3}=2\sqrt{27}$，$4\sqrt{3}=2{\cdot}2\sqrt{3}=2\sqrt{12}$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\\
=&\sqrt{12+2\sqrt{27}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}\\
=&\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9{\cdot}3}}+\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4{\cdot}3}}\\
=&(\sqrt{9}+\sqrt{3})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\
=&3+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=\mathbf{5}
\end{aligned}
$$

4) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=\left(ab+\dfrac{4}{ab}\right)+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均，相乗平均の関係により

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab{\cdot}\frac{4}{ab}}=4$$

したがって

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=\left(ab+\frac{4}{ab}\right)+5\geqq 4+5=\mathbf{9}$$

5) ［1］$a < -1$ のとき，$|\,a-2\,| = -a+2$，$|\,a+1\,| = -a-1$ であるから

$$|\,a-2\,| + |\,a+1\,| = (-a+2)+(-a-1) = -2a+1$$

［2］$-1 \leqq a < 2$ のとき，$|\,a-2\,| = -a+2$，$|\,a+1\,| = a+1$ であるから

$$|\,a-2\,| + |\,a+1\,| = (-a+2)+(a+1) = 3$$

［3］$2 \leqq a$ のとき，$|\,a-2\,| = a-2$，$|a+1| = a+1$ であるから

$$|\,a-2\,| + |\,a+1\,| = (a-2)+(a+1) = 2a-1$$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 2}$

6) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D = k^2 - 4\cdot 1(3k-8) = k^2 - 12k + 32$$

とする．2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよい．

$$k^2 - 12k + 32 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{4 < k < 8}$$

7) $x = y \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$,

$x = y \nLeftarrow x^2 - y^2 = 0$

よって，**十分条件**.

8) 等式の右辺を整理すると

$$ax^2 + bx + 3 = (1+c)x^2 + 4cx + (4c-1)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a = 1+c,\ \ b = 4c,\ \ 3 = 4c-1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 4,\ c = 1}$

9) a，b，c は整数 k_1，k_2，k_3 を用いて

$$a = 5k_1+1,\ \ b = 5k_2+2,\ \ c = 5k_3+3$$

とかけるので

$$a+2b+3c = (5k_1+1)+2(5k_2+2)+3(5k_3+3) = 5(k_1+k_2+k_3+2)+4$$

$k_1+k_2+k_3+2$ は整数であるから，求める**余りは 4** である．

III. 1) 放物線の方程式は，$y=(x-p)^2$ とおける．これが点 $(-2,\ 1)$ を通るから

$$1=(-2-p)^2 \quad これを解いて \quad p=-1,-3$$

したがって

$p=-1$ のとき　$y=(x+1)^2$　すなわち　$y=x^2+2x+1$

$p=-3$ のとき　$y=(x+3)^2$　すなわち　$y=x^2+6x+9$

よって　　$\boldsymbol{(b,\ c)=(2,\ 1),\ (6,\ 9)}$

2) 放物線 $y=x^2-2x+3$ を原点に関して対称移動をすると

$$-y=(-x)^2-2(-x)+3 \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=-x^2-2x-3}$$

3) $x=k-3y$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (k-3y)^2+y^2 \\ &= 10y^2-6ky+k^2 \\ &= 10\left(y-\frac{3k}{10}\right)^2+\frac{k^2}{10} \end{aligned}$$

したがって　　$\dfrac{k^2}{10}=4$　これを解いて　$\boldsymbol{k=\pm 2\sqrt{10}}$

IV. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq \tan\theta \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{30^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ}$

V. 1) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　　$2\sqrt{3}\sin C=6\sin 30^\circ$

$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　　　　　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$ であるから

$$C=60^\circ \text{ のとき } \quad A=90^\circ, \qquad C=120^\circ \text{ のとき } \quad A=30^\circ$$

したがって　$A=90^\circ$ のとき　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6\sin 90^\circ=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

$A=30^\circ$ のとき　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6\sin 30^\circ=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

2)　i) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

ゆえに　$\mathrm{BC} = a = 2{\cdot}1 \sin 60^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

ii) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

ゆえに　$\mathrm{CA} = b = 2{\cdot}1 \sin 45^\circ = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

iii) 第 1 余弦定理により　$c = b\cos A + a\cos B$

ゆえに　$c = \sqrt{2}\cos 60^\circ + \sqrt{3}\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}{\cdot}\sqrt{2}{\cdot}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+3}{4}}$

VI. 目の和が 7 となるのは，次の **15 通り**

$(1,1,5)$，$(1,2,4)$，$(1,3,3)$，$(1,4,2)$，$(1,5,1)$，

$(2,1,4)$，$(2,2,3)$，$(2,3,2)$，$(2,4,1)$，

$(3,1,3)$，$(3,2,2)$，$(3,3,1)$，

$(4,1,2)$，$(4,2,1)$，

$(5,1,1)$

VII. ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{4-2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

VIII. 6 人を A，B，C の 3 つの組に，2 人ずつ分ける方法は

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6{\cdot}5}{2{\cdot}1} \times \frac{4{\cdot}3}{2{\cdot}1} = 90\ (\text{通り})$$

この分け方で，A，B，C の区別をなくせばよいから

$$\frac{90}{3!} = \mathbf{15}\ (\text{通り})$$

IX. 1 から 100 までの整数全体の集合を U とし，U の部分集合で，2 で割り切れる数全体の集合を A，3 で割り切れる数全体の集合を B，5 で割り切れる数全体の集合を C とすると

$$
\begin{aligned}
A &= \{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 2\cdot50\}, & n(A) &= 50\\
B &= \{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}, & n(B) &= 33\\
C &= \{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot20\}, & n(C) &= 20\\
A\cap B &= \{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}, & n(A\cap B) &= 16\\
B\cap C &= \{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}, & n(B\cap C) &= 6\\
C\cap A &= \{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ 10\cdot3,\ \cdots,\ 10\cdot10\}, & n(C\cap A) &= 10\\
A\cap B\cap C &= \{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3\}, & n(A\cap B\cap C) &= 3
\end{aligned}
$$

1) 求める数は，$n(A\cup B\cup C)$ であるから

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C)\\
&\qquad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\
&\qquad\quad +n(A\cap B\cap C)\\
&= 50+33+20-16-6-10+3=\mathbf{74}
\end{aligned}
$$

2) 求める数は，$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ であるから

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) &= n(\overline{A\cup B\cup C})\\
&= n(U)-n(A\cup B\cup C)\\
&= 100-74=\mathbf{26}
\end{aligned}
$$

X. 6 枚のカードから 3 枚取り出す組合せの総数は　${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (通り)

$X = 5$ となるのは　$\{1, 2, 2\}$ の組合せで，$1 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 1$ (通り)
$X = 6$ となるのは　$\{1, 2, 3\}$ の組合せで，$1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 6$ (通り)
$X = 7$ となるのは　$\{1, 3, 3\}$ の組合せで，$1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 1 \times 3 = 3$ (通り)
$\{2, 2, 3\}$ の組合せで，${}_2\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 1 \times 3 = 3$ (通り)
$X = 8$ となるのは　$\{2, 3, 3\}$ の組合せで，${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 2 \times 3 = 6$ (通り)
$X = 9$ となるのは　$\{3, 3, 3\}$ の組合せで，${}_3\mathrm{C}_3 = 1$ (通り)

1) $X = 7$ となる確率は　$\dfrac{3+3}{20} = \mathbf{\dfrac{3}{10}}$

2)

X	5	6	7	8	9	計
確率	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

したがって，X の期待値は

$$5 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{6}{20} + 7 \times \frac{6}{20} + 8 \times \frac{6}{20} + 9 \times \frac{1}{20} = \mathbf{7}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	③	③	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	②	①	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	③	①	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	②	②	④	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	④	②	③	②