平成19年度　青照館　一般入学試験A日程　試験問題
数学I・数学A(平成18年12月23日)60分

I. 次の数列の$\boxed{}$に適する数を選べ。 【1】

$5,\ 7,\ 11,\ \boxed{},\ 25,\ 35,\ \cdots$

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

II. 次の各問いに答えよ。

1) $x < 3$ のとき $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ を簡単にせよ. 【2】

① $x + 3$　② $-x + 3$　③ $x - 3$　④ $-x - 3$

2) $a + b + c = 0$ のとき $(b + c)(c + a)(a + b) + abc$ を求めよ。 【3】

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

3) 二重根号 $\sqrt{29 - 3\sqrt{80}}$ を簡単にせよ。 【4】

① $2\sqrt{5} - 3$　② $-2\sqrt{5} - 3$　③ $3 - 2\sqrt{5}$　④ $3 + 2\sqrt{5}$

4) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ のとき 【5】

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right) \geqq \boxed{}$$

① 3　② 4　③ 6　④ 8

5) $|\,x\,| + |\,x - 1\,| = 2$ を満たす x の値を求めよ。 【6】

① $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$　② $x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$　③ $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$　④ $x = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

6) 不等式 $x^2 - (m + 1)x + 4 > 0$ が常に成り立つように，m の値の範囲を求めよ。 【7】

① $-5 < m < 3$　② $-3 < m < 5$　③ $3 < m < 5$　④ $-5 < m < -3$

7) $xy > 0$ は $x > 0,\ y > 0$ であるための$\boxed{}$。 【8】

① 十分条件である　② 必要条件である
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

8) 次の等式が x についての恒等式になるように定数 a，b，c の値を求めよ。**【9】**

$$a(x-2)^2 + b(x+3) + c = x^2 - x - 2$$

① $a=1,\ b=-3,\ c=-15$　② $a=-1,\ b=3,\ c=-15$
③ $a=1,\ b=3,\ c=-15$　④ $a=-1,\ b=-3,\ c=-15$

9) 正の整数 n を 7 で割ったときの余りが 4 ならば，n^2 を 7 で割ったときの余りを求めよ。**【10】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

III. 次の 2 次関数について答えよ。

1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，2 点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ を通り x 軸に接するという。a，b，c の値を求めよ。**【11】**

① $a=4,\ b=4,\ c=1$　② $a=-4,\ b=4,\ c=1$
③ $a=4,\ b=-4,\ c=1$　④ $a=-4,\ b=-4,\ c=1$

2) $y = x^2 - 2x - 3$ の放物線を x 軸に関して対称にしたものを求めよ。**【12】**

① $y=-x^2+2x+3$　② $y=-x^2-2x-3$
③ $y=-x^2+2x-3$　④ $y=-x^2-2x+3$

3) $x + y = 4$ のとき，$x^2 + y^2$ の Min(最小値) を求めよ。**【13】**

① 4　② 6　③ 8　④ 10

IV. 次の三角方程式を解け。**【14】**

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

① $\theta = 45^\circ$　② $\theta = 135^\circ$　③ $\theta = 45^\circ,\ 135^\circ$
④ $\theta = 60^\circ$　⑤ $\theta = 120^\circ$　⑥ $\theta = 60^\circ,\ 120^\circ$

V. △ABC について次の値を求めよ。

1) $b=\sqrt{37}$，$c=4$，$\angle\mathrm{B}=120^\circ$ のとき a の長さ **【15】**

① 7　② 3　③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{7}$

2) $a=\sqrt{5}$，$b=3$，$c=\sqrt{14}$ のとき $\angle\mathrm{C}$ の大きさ **【16】**

① 30°　② 60°　③ 90°　④ 120°

3) $b=5$，$c=8$，△ABC の面積が $10\sqrt{3}$ のとき ∠A の大きさ **【17】**

① 30°，60°　② 60°，90°　③ 30°，120°　④ 60°，120°

VI. 異なる 3 個のサイコロを同時に投げるとき，3 個とも異なる目が出るのは何通りあるか。 **【18】**

① 60　② 90　③ 120　④ 150

VII. 赤，白，青，黄，緑の 5 種類の旗がある。同じ色を何度使ってもよいとき，旗 3 枚を使って何通りの手旗信号ができるか。 **【19】**

① 60　② 125　③ 205　④ 250　⑤ 405

VIII. 色が相異なる 8 個のビー玉で腕輪を作るとき何通りできるか。 **【20】**

① 1260　② 2520　③ 5040　④ 20160

IX. A，B が全体集合 U の部分集合でその要素の数が，$n(U)=90$，$n(A)=51$，$n(B)=34$，$n(A\cup B)=70$ のとき，次の各集合の要素の個数を求めよ。

1) $\overline{A}\cap B$ **【21】**

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

2) $\overline{A}\cup B$ **【22】**

① 54　② 55　③ 56　④ 57　⑤ 58

X. 3 個の赤球と 2 個の白球が箱に入っている。この箱の中から同時に 2 個の球を取り出す。

1) 2 球とも赤球である確率を求めよ。 **【23】**

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{2}{10}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{4}{10}$

2) 2 球とも白球である確率を求めよ。 **【24】**

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{2}{10}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{4}{10}$

3) 1 球が赤で，1 球が白である確率を求めよ。 **【25】**

① $\frac{4}{10}$　② $\frac{5}{10}$　③ $\frac{6}{10}$　④ $\frac{7}{10}$

解答例

I. $5\underline{+2}=7$, $7\underline{+4}=11$, $11\underline{+6}=17$, $17\underline{+8}=25$, $25\underline{+10}=35$

したがって $\boxed{}=\mathbf{17}$

II. 1) $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|\,x-3\,|$

$x<3$ のとき $x-3<0$ であるから $|\,x-3\,|=-(x-3)=-x+3$

したがって $\sqrt{x^2-6x+9}=\boldsymbol{-x+3}$

2) $a+b+c=0$ のとき，$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

$$\begin{aligned}(b+c)(c+a)(a+b)+abc&=(-a)(-b)(-c)+abc\\&=-abc+abc=\mathbf{0}\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\sqrt{29-3\sqrt{80}}&=\sqrt{29-3\cdot 2\sqrt{20}}=\sqrt{29-2\cdot 3\sqrt{20}}\\&=\sqrt{29-2\sqrt{180}}=\sqrt{(20+9)-2\sqrt{20\cdot 9}}\\&=\sqrt{20}-\sqrt{9}=\mathbf{2\sqrt{5}-3}\end{aligned}$$

4) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\right)+2$$

$\dfrac{a^2}{bc}>0$，$\dfrac{bc}{a^2}>0$，$\dfrac{b^2}{ca}>0$，$\dfrac{ca}{b^2}>0$，$\dfrac{c^2}{ab}>0$，$\dfrac{ab}{c^2}>0$ であるから,

相加平均，相乗平均の関係により

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{bc}{a^2}}=2$$

$$\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{ca}{b^2}}=2$$

$$\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\geqq 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}\cdot\frac{ab}{c^2}}=2$$

上の 3 式について，同時に等号が成り立つのは,

$$\frac{a^2}{bc}=\frac{bc}{a^2},\ \frac{b^2}{ca}=\frac{ca}{b^2},\ \frac{c^2}{ab}=\frac{ab}{c^2}\quad \text{すなわち}\quad a=b=c$$

のときである．したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)&=\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\right)+2\\&\geqq 2+2+2+2=\mathbf{8}\end{aligned}$$

5) ［1］$x<0$ のとき，$|\,x\,|=-x$，$|\,x-1\,|=-x+1$ であるから
方程式は　$-x+(-x+1)=2$
これを解いて　$x=-\dfrac{1}{2}$
これは，$x<0$ を満たすから，解である．
［2］$0\leqq x<1$ のとき，$|\,x\,|=x$，$|\,x-1\,|=-x+1$ であるから
方程式は　$x+(-x+1)=2$
このとき，左辺は 1 となり，不適である．
［3］$1\leqq x$ のとき，$|\,x\,|=x$，$|\,x-1\,|=x-1$ であるから
方程式は　$x+(x-1)=2$
これを解いて　$x=\dfrac{3}{2}$
これは，$1\leqq x$ を満たすから，解である．
したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}}$

6) 与えられた 2 次不等式の係数について

$$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot1\cdot4=m^2+2m-15$$

とする．2 次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ が成り立てばよい．

$$m^2+2m-15<0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{-5<m<3}$$

7) $xy>0 \not\Rightarrow x>0,\ y>0,$
$xy>0 \Leftarrow x>0,\ y>0$
よって，**必要条件**.

8) 等式の左辺を整理すると

$$ax^2+(-4a+b)x+(4a+3b+c)=x^2-x-2$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a=1,\ -4a+b=-1,\ 4a+3b+c=-2$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-15}$

9) n は整数 k を用いて，$n=7k+4$ とかけるので

$$n^2=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+8k+2)+2$$

$7k^2+8k+2$ は整数であるから，求める**余りは 2** である．

III. 1) 2 点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ の y 座標が等しいので，放物線の軸はこの 2 点を結ぶ垂直二等分線であるから，軸の方程式は　$x=-\dfrac{1}{2}$

また，放物線は x 軸に接するので

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

とかける．これが点 $(0,\ 1)$ を通るから

$$1=a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad a=4$$

よって，放物線の方程式は

$$y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad y=4x^2+4x+1$$

したがって　$\boldsymbol{a=4,\ b=4,\ c=1}$

2) 放物線 $y=x^2-2x-3$ を x 軸に関して対称移動をすると

$$-y=x^2-2x-3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2+2x+3}$$

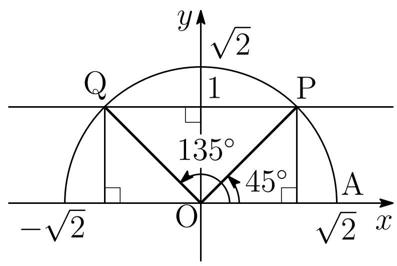
3) $y=4-x$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(4-x)^2 \\ &= 2x^2-8x+16 \\ &= 2(x-2)^2+8 \end{aligned}$$

よって，$x=2$，$y=2$ のとき x^2+y^2 は**最小値 8** をとる．

IV. 半径 $\sqrt{2}$ の半円上で，y 座標が 1 である点は 2 つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ と $\angle\mathrm{AOQ}$ である．

よって　$\boldsymbol{\theta=45^\circ,\ 135^\circ}$



V. 1) 余弦定理により　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

ゆえに　$(\sqrt{37})^2=4^2+a^2-2{\cdot}4{\cdot}a\cos 120^\circ$

$$37=16+a^2-2{\cdot}4{\cdot}a{\cdot}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理して　$a^2+4a-21=0$

$$(a+7)(a-3)=0$$

$a>0$ より　$\boldsymbol{a=3}$

2) 余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{5})^2+3^2-(\sqrt{14})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 3} = 0$$

よって，$\cos C = 0$ を満たす C は　**$C = 90°$**

3) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ であるから

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin A \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす A は　**$A = 60°$，$120°$**

VI. ${}_6\mathrm{P}_3 = 6\cdot 5\cdot 4 = \mathbf{120}$ (通り)

VII. $5^3 = \mathbf{125}$ (通り)

VIII. $\dfrac{(8-1)!}{2} = \mathbf{2520}$ (通り)　$\leftarrow$ 数珠順列 $= \dfrac{\text{円順列}}{2}$

IX. $n(A) = 51$，$n(B) = 34$，$n(A\cup B) = 70$ を $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ に代入して　$n(A\cap B) = 15$

したがって

	B	$\overline{B}$	合計
A	15		51
$\overline{A}$			
合計	34		90

上の表を完成させると

	B	$\overline{B}$	合計
A	15	36	51
$\overline{A}$	19	20	39
合計	34	56	90

1) 上の表から　$n(\overline{A}\cap B) = \mathbf{19}$

2) 上の表から　$n(\overline{A}\cup B) = 19+20+15 = \mathbf{54}$

X. 1) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$

2) $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

3) 求める確率は 1) と 2) の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
③	②	③	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	②	③	③
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
①	①	③	③	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	④	③	②	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
⑤	①	③	①	③