平成１８年度　青照館　推薦前期入学試験問題
数学I・数学A(平成17年10月23日)

I. 次の各設問に答えよ。

1) 1〜10までの素数の和はいくらか。 **【1】**

① 16　　② 17　　③ 18　　④ 19

2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+3}$ を求めよ。 **【2】**

① 0　　② -1　　③ 1　　④ 2

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ を簡単にせよ。 **【3】**

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $x+1$　　④ $-x-1$

4) $|x-1|<2$ を解け。 **【4】**

① $-1<x<3$　　② $x<-1,\ 3<x$

③ $-3<x<1$　　④ $x<-3,\ 1<x$

5) $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$ のとき，$f(a+1)$ を求めよ。 **【5】**

① $3a^2 + a + 10$　　② $3a^2 - a + 10$

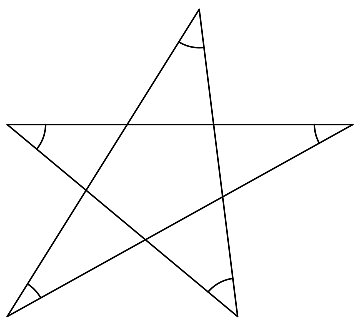
③ $3a^2 + a - 10$　　④ $3a^2 - a - 10$

6) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。 **【6】**

① $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = 2\sqrt{2}$　　② $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = -2\sqrt{2}$

③ $\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = 2\sqrt{2}$　　④ $\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = -2\sqrt{2}$

7) 下図の 5 つの角の和を求めよ。 **【7】**



① 90°

② 120°

③ 150°

④ 180°

II. 放物線 $y = x^2 - x$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。 **【8】**

① $y = x^2 + 7x + 14$　② $y = x^2 + 7x - 14$
③ $y = x^2 - 7x + 14$　④ $y = x^2 - 7x - 14$

III. $f(x) = -x^2 + 4x + 1\ (0 \leq x \leq 5)$ の最大値 max，最小値 min を求めよ。 **【9】**

① $\max 4\ (x = 2)$，$\min -5\ (x = 5)$
② $\max 5\ (x = 2)$，$\min -4\ (x = 5)$
③ $\max 5\ (x = 5)$，$\min -4\ (x = 2)$
④ $\max 4\ (x = 5)$，$\min -5\ (x = 2)$

IV. $x = 3$ は，$x^2 = 3x$ であるための **【10】** である。

① 必要条件　② 十分条件
③ 必要十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

V. 1 から 100 までの整数のうち，2 または 3 で割り切れる数の個数を求めよ。**【11】**

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

VI. $\triangle$ABC において，AB $= 20$，AC $= 2$，S(面積) $= 10$ であるときの $\angle$A は何度か。 **【12】**

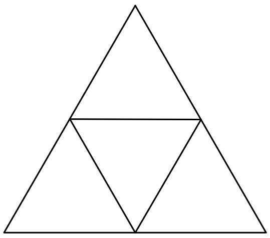
① $\angle\mathrm{A} = 30^\circ,\ 60^\circ$　② $\angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ 120^\circ$

③ $\angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ 150^\circ$　④ $\angle\mathrm{A} = 30^\circ,\ 150^\circ$

VII. $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ の 6 個の数字から異なる 3 個の数字を並べて 3 桁の整数は何個できるか。 **【13】**

① 80　② 90　③ 100　④ 120　⑤ 150

VIII. 赤・黄・青・白の 4 色を用いて下図のような 4 つの正三角形を塗り分けたい。4 色のうち任意の 3 色を用いて隣り合う三角形が異なる色に塗り分けられる方法は何通りあるか。ただし回転して並びが同じになれば同一とみなす。 **【14】**



① 12

② 24

③ 36

④ 48

IX. 1 個のサイコロを投げるとき，出る目の期待値を求めよ。 **【15】**

① 3.2　② 3.3　③ 3.4　④ 3.5　⑤ 3.6

解答例

I. 1) $2+3+5+7=\mathbf{17}$

2)
$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$
$$+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{3-\sqrt{7}}{9-7}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(3-\sqrt{7})}{2}=\frac{3-1}{2}=\mathbf{1}$$

3)
$$\frac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\cfrac{1\cdot x}{\left(1-\cfrac{1}{x}\right)x}}=\frac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}=\frac{1(x-1)}{\left(1-\cfrac{x}{x-1}\right)(x-1)}$$
$$=\frac{x-1}{(x-1)-x}=\frac{x-1}{-1}=\boldsymbol{-x+1}$$

4) $|x-1|<2$ より　　$-2<x-1<2$

各辺に 1 を加えて　　$\boldsymbol{-1<x<3}$

5) $f(x)=3x^2-7x-6$ より
$$\begin{aligned} f(a+1) &= 3(a+1)^2-7(a+1)-6 \\ &= 3(a^2+2a+1)-7a-7-6 \\ &= \boldsymbol{3a^2-a-10} \end{aligned}$$

6) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から
$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より $\sin\theta\geq0$ であるから　「≤，≥はそれぞれ≦，≧と同意」
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

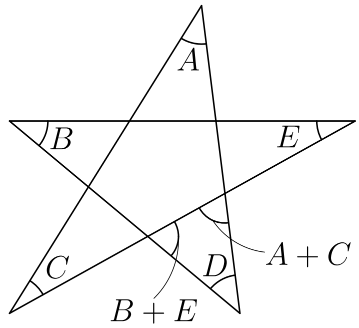
また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

7) 5つの角を A，B，C，D，E とすると，
右の図から

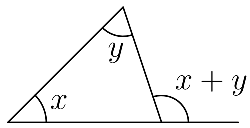
$$(A+C)+(B+E)+D=180^\circ$$

したがって

$$A+B+C+D+E=\mathbf{180^\circ}$$



外角の性質



II. $f(x)=x^2-x$ とおく．$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものは，$y=f(x-3)+2$ であるから

$$\begin{aligned} f(x-3)+2 &= (x-3)^2-(x-3)+2 \\ &= x^2-7x+14 \end{aligned}$$

したがって，求める放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=x^2-7x+14}$

グラフの平行移動

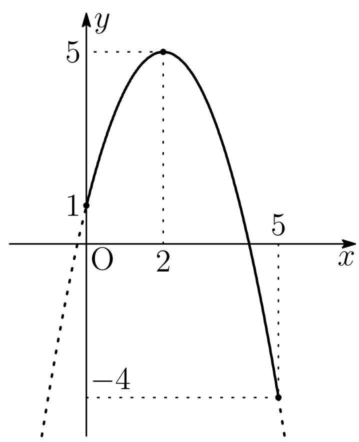
　一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフになる．

III. $-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$ であるから

$$y=-(x-2)^2+5$$

$0\leq x\leq 5$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$\boldsymbol{x=2}$ **で最大値** $\mathbf{5}$ をとり，
$\boldsymbol{x=5}$ **で最小値** $\mathbf{-4}$ をとる．



IV. $x=3$ は，$x^2=3x$ であるための $\boxed{\textbf{十分条件}}$ である。

V. 1 から 100 までの整数のうち，2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とすると，求めるのは $n(A \cup B)$ である．

$$A = \{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 2\cdot50\},\ n(A) = 50$$

$$B = \{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\},\ n(B) = 33$$

$$A \cap B = \{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\},\ n(A \cap B) = 16$$

したがって　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 50 + 33 - 16 = \mathbf{67}$$

VI. $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ より

$$10 = \frac{1}{2}\cdot20\cdot2\sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから　$\angle\mathbf{A} = \mathbf{30^\circ},\ \mathbf{150^\circ}$

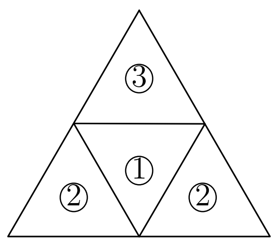
VII. 百の位は 0 以外の 5 通り，十の位と一の位は，百の位の数以外の残りの 5 個から 2 個とって並べる順列 ${}_5\mathrm{P}_2$ であるから

$$5 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 5 \times 5\cdot4 = \mathbf{100}\ (\text{個})$$

VIII. 4ヶ所を 3 色で塗り分けるとき，中央の三角形は他の三角形と異なる色で塗り分け，残りの 3ヶ所を中央と異なる 2 色で塗り分ければよい．

中央の塗り方は　4 (通り)　$\cdots$①
残りの 3ヶ所のうち，同色で 2ヶ所塗る方法は　3 (通り)　$\cdots$②
最後の 1ヶ所の塗り分け方は　2 (通り)　$\cdots$③

したがって　$4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24}$ (通り)



IX. どの目が出る確率も

$$\frac{1}{6}$$

である．

目	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，出る目の期待値は

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
②	③	②	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	④	③	②	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	③	②	④