平成１８年度　青照館　一般入学試験 C 日程　試験問題
数学 I・数学 A(平成 18 年 3 月 21 日)60 分

I. 次の各設問に答えよ。

1) $a+b+c=0$ のとき $a^2-b^2+ac-bc$ の値を求めよ。 **【1】**

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

2) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ を簡単にせよ。 **【2】**

① $\sqrt{10}-\sqrt{2}$　② $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$　④ $\sqrt{2}-\sqrt{10}$

3) $0<x<1$ のとき $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}$ を簡単にせよ。 **【3】**

① 1　② -3　③ 3　④ -1　⑤ $2x+1$

4) $x=1+\sqrt{3}$ のとき x^3-2x^2-x+2 の値を求めよ。 **【4】**

① $\sqrt{3}-3$　② $\sqrt{3}+3$　③ $\sqrt{3}-2$　④ $\sqrt{3}+2$

5) $a>0,\ b>0$ のとき $(a+b)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq$ $\boxed{\textbf{【5】}}$

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ 2　④ 4

6) $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ で $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \boxed{\textbf{【6】}}$

① $9+4\sqrt{5}$　② $9-4\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{5}-9$　④ $-4\sqrt{5}-9$

$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ で $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \boxed{\textbf{【7】}}$

① $9+4\sqrt{5}$　② $9-4\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{5}-9$　④ $-4\sqrt{5}-9$

7) n が自然数のとき，n^3+5n は $\boxed{\textbf{【8】}}$ の倍数である。

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

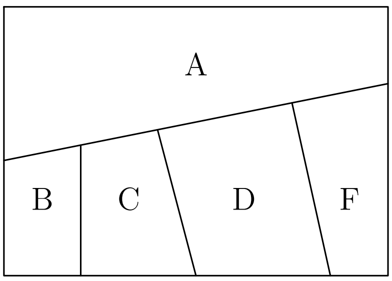
8) $x=y$ は $(x-y)^2=0$ であるための $\boxed{\textbf{【9】}}$ 。

① 十分条件である　② 必要条件である
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

9) どのような a に対しても $(1+2a)x+(2-a)y-5=0$ が成り立つときの x, y を求めよ。 **【10】**

① $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$　② $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$　③ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$　④ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

10) 下図の A，B，C，D，E の 5 つの部分に，赤・青・黄・茶・緑のうち何色かを用いて色分けしたい。隣り合う部分には異なる色を用いるとすれば，色分けの仕方は何通りあると考えられるか。 **【11】**



① 180
② 240
③ 360
④ 480
⑤ 540

II. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき，$f(\theta) = \cos^2\theta - 4\sin\theta + 7$ の最大値 (max)，最小値 (min) を求めよ。 **【12】**

① $\begin{cases} \text{max } 12 \\ \text{min } \ \ 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} \text{max } \ 12 \\ \text{min } -3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} \text{max } \ \ 8 \\ \text{min } -3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} \text{max } 8 \\ \text{min } 3 \end{cases}$

III. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解が $-2 < x < 1$ となるとき，定数 a，b，c を最も簡単な整数で表せ。 **【13】**

① $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

IV. 1) 放物線 $y = x^2 + (a+1)x + 2$ と直線 $y = 2x + 1$ が共有点をもたないための定数 a の範囲を求めよ。 **【14】**

① $a < -1,\ 3 < a$ ② $-1 < a < 3$
③ $-3 < a < 1$ ④ $a < -3,\ 1 < a$

2) x 軸と $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 切片が -3 である放物線の方程式を求めよ。
【15】

① $y = -x^2 + 4x - 3$ ② $y = -x^2 + 4x + 3$
③ $y = -x^2 - 4x + 3$ ④ $y = -x^2 - 4x - 3$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 8\}$，$A \cap B = \{3\}$，
$\overline{A} \cap B = \{1, 2, 5\}$ のとき，$A \cup B =$ $\boxed{\textbf{【16】}}$

① $\{4, 8\}$ ② $\{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$
③ $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ④ $\{3\}$ ⑤ $\{1, 2, 5\}$

VI. $(3x^2 - 2)^7$ の展開式における x^2 の係数を求めよ. **【17】**

① 1340 ② 1342 ③ 1344 ④ 1346

VII. 3辺の長さが，AB $=6$，BC $=4$，CA $=5$ である $\triangle$ABC について各設問に答えよ。

1) $\cos A =$ $\boxed{\textbf{【18】}}$

① $\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{8}$

2) $\triangle$ABC の面積 $S =$ $\boxed{\textbf{【19】}}$

① $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{7}}{2}$ ④ $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

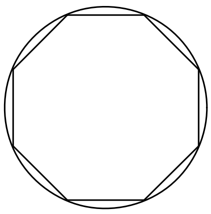
3) $\triangle$ABC の内接円の半径 $r =$ $\boxed{\textbf{【20】}}$

① $\sqrt{7}$ ② $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

4) $\triangle$ABC の外接円の半径 $R =$ $\boxed{\textbf{【21】}}$

① $\sqrt{7}$ ② $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ ③ $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$ ④ $\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$

VIII. 1つの円周上に8個の点がある。



1) 8個の点を頂点とする八角形の対角線はいくつあるか。 **【22】**

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

2) これらの点を頂点とする三角形は何個できるか。 **【23】**

① 28 ② 36 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

IX. 白球2個，赤球3個，青球5個が入っている袋がある。

この袋の中から同時に4個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ。

1) 白球1個，赤球1個，青球2個である確率 **【24】**

① $\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{3}{7}$ ④ $\dfrac{4}{7}$

2) 白球，赤球，青球がそれぞれ少なくとも1個含まれる確率 **【25】**

① $\dfrac{101}{210}$ ② $\dfrac{102}{210}$ ③ $\dfrac{103}{210}$ ④ $\dfrac{104}{210}$ ⑤ $\dfrac{105}{210}$

解答例

I. 1) $c = -(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + ac - bc &= a^2 - b^2 + c(a-b) \\ &= a^2 - b^2 - (a+b)(a-b) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2) $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}}$

3) $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$
$= |x+2| - |x-1|$

$0 < x < 1$ の各辺に 2 を加えて　$2 < x+2 < 3$
$x+2 > 0$ であるから　$|x+2| = x+2$

$0 < x < 1$ の各辺から 1 を引いて　$-1 < x-1 < 0$
$x-1 < 0$ であるから　$|x-1| = -(x-1) = -x+1$

したがって　$|x+2| - |x-1| = (x+2) - (-x+1) = 2x+1$
よって　$\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-2x+1} = \boldsymbol{2x+1}$

4) $x = 1+\sqrt{3}$ から　$x-1 = \sqrt{3}$
両辺を平方して　$x^2 - 2x + 1 = 3$
すなわち　$x^2 = 2x+2$

したがって
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x \cdot x^2 - 2x^2 - x + 2 \\ &= x(2x+2) - 2(2x+2) - x + 2 \\ &= 2x^2 - 3x - 2 \\ &= 2(2x+2) - 3x - 2 = x+2 \\ &= (1+\sqrt{3}) + 2 = \boldsymbol{3+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

5) $$(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$，$b>0$，$\dfrac{1}{b}>0$ であるから，
相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2,\quad b+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2,$$

上式において等号が成り立つのは，それぞれ

$$a=\frac{1}{a},\quad 1=\frac{1}{b}\qquad \text{すなわち}\quad a=1,\ b=1$$

のときである．したがって

$$(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqq 2+2=\mathbf{4}$$

が成り立つ．ただし，等号が成り立つのは，$a=b=1$ のときである．

6) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき　$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ゆえに　$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\mathbf{9-4\sqrt{5}}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ゆえに　$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\mathbf{9+4\sqrt{5}}$$

7) $$n^3+5n=(n^3-n)+6n=(n-1)n(n+1)+6n$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 数の積であるから $2\times3=6$ の倍数である．
したがって，$n^3+5n=(n-1)n(n+1)+6n$ は $\mathbf{6}$ の倍数である．

8) $x=y$ は $(x-y)^2=0$ であるための **必要十分条件である**。

9) 与えられた等式は a についての恒等式であり，これを a について整理すると

$$(2x-y)a+(x+2y-5)=0$$

よって　$2x-y=0,\ x+2y-5=0$　　これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$

10) A，B，C，D，E を塗り分けるとき，3 色以上用いなければならない.
異なる 5 色で塗り分け方るとき

$$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120\quad(\text{通り})$$

異なる 4 色で塗り分けるとき，B と D を同色，B と E を同色，C と E を同色塗り分ける場合であり，ともに ${}_5\mathrm{P}_4=120$ 通りであるから

$$120\times3=360\ (\text{通り})$$

異なる 3 色で塗り分けるとき，B と D を同色かつ C と E を同色に塗り分ける場合であるから

$${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60\ (\text{通り})$$

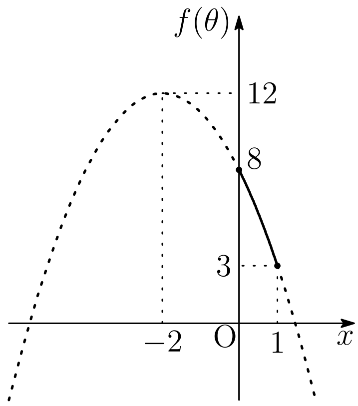
したがって，求める塗り分け方の総数は　$120+360+60=\mathbf{540}$ (通り)

II.
$$\begin{aligned}&\cos^2\theta-4\sin\theta+7\\=&(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+7\\=&-\sin^2\theta-4\sin\theta+8\end{aligned}$$

$\sin\theta=x$ とおくと，$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より
$0\leq x\leq1$

$$f(\theta)=-x^2-4x+8$$

よって　$f(\theta)=-(x+2)^2+12$



したがって　$x=0$　すなわち　$\theta=0^\circ,\ 180^\circ$ のとき**最大値 8** をとり，
$x=1$　すなわち　$\theta=90^\circ$ のとき**最小値 3** をとる.

III. $-2<x<1$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+2)(x-1)<0$$

すなわち　$x^2+x-2<0$

両辺に -1 をかけて　$-x^2-x+2>0$

したがって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=-1,\ c=2}$

IV. 1) $y=x^2+(a+1)x+2$ と $y=2x+1$ から y を消去して整理すると

$$x^2+(a-1)x+1=0$$

放物線と直線が共有点をもたないとき，係数について

$$(a-1)^2-4\cdot1\cdot1<0$$

整理して　$a^2-2a-3<0$

左辺を因数分解して　$(a+1)(a-3)<0$

したがって　$\boldsymbol{-1<a<3}$

2) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,-3)$ を通るから

$$0=a+b+c \quad \cdots ①$$

$$0=9a+3b+c \quad \cdots ②$$

$$-3=c \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入して　$a+b=3$ $\quad\cdots$ ④

③ を ② に代入して　$9a+3b=3$

すなわち　$3a+b=1$ $\quad\cdots$ ⑤

④，⑤ を解くと　$a=-1$，$b=4$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-x^2+4x-3}$

V. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,8\}$ であるから，$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ より

$$\boldsymbol{A\cup B=\{1,2,3,5,6,7,9\}}$$

VI. 一般項 ${}_7\mathrm{C}_r(3x^2)^{7-r}(-2)^r$ において，$2(7-r)=2$ より $r=6$ であるから

求める係数は　${}_7\mathrm{C}_6\times3\times(-2)^6=7\times3\times64=\mathbf{1344}$

VII. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(5^2+6^2-4^2}{2{\cdot}5{\cdot}6} = \frac{45}{60} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

(2) $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

したがって　$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}6 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) $2s = 4+5+6$ とすると　$s = \frac{15}{2}$

$S = rs$ により　$\frac{15\sqrt{7}}{4} = r \times \frac{15}{2}$

これを解いて　$\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{7}}{2}}$

(4) 正弦定理により　$\frac{4}{\sin A} = 2R$

したがって　$R = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sin A}$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{7}}$$

VIII. (1) 8 個の頂点から 2 個を選び，その 2 点を結んで得られる線分の本数は

$${}_8\mathrm{C}_2 = 28 \text{ (本)}$$

このうち，8 本が辺であるから，求める対角線の本数は

$$28 - 8 = \mathbf{20} \text{ (本)}$$

(2) 8 個の頂点から 3 個を選び，その 3 点を結んで得られるから

$${}_8\mathrm{C}_3 = \mathbf{56} \text{ (本)}$$

IX. (1) 白球 1 個，赤球 1 個，青球 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

(2) 白球 2 個，赤球 1 個，青球 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \frac{1}{14}$$

白球 1 個，赤球 2 個，青球 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \frac{1}{7}$$

したがって，求める確率は，(1) および上の結果から

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
③	②	⑤	②	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	③	③	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
⑤	④	④	②	①
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	③	②	④	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
②	①	⑤	②	⑤

【3】は選択肢に該当する答がなかったので，選択肢を編集した．