平成１８年度　青照館　一般入学試験Ｂ日程　試験問題
数学Ｉ・数学Ａ(平成 18 年 2 月 11 日)60 分

I. 次の各設問に答えよ。

1) $a+b+1=0,\ ab \neq 0$ のとき $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}$ の値を求めよ。 **【1】**

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

2) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$ を簡単にせよ。 **【2】**

① $\sqrt{10}-\sqrt{6}$　② $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$　④ $\sqrt{6}-\sqrt{10}$

3) $-1 \leq a \leq 2$ のとき $2|a+1|+|2a-5|$ を簡単にせよ。 **【3】**

① -3　② 7　③ -7　④ 3

4) $x=\sqrt{3}-1$ のとき x^3+2x^2-2x+5 の値を求めよ。 **【4】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4　⑥ 5

5) $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \geq$ **【5】**

① 1　② $\dfrac{1}{3}$　③ 3　④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ 6

6) $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ であるとき

$\cos\theta =$ 【6】

① $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan(\theta - 90^\circ) =$ 【7】

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

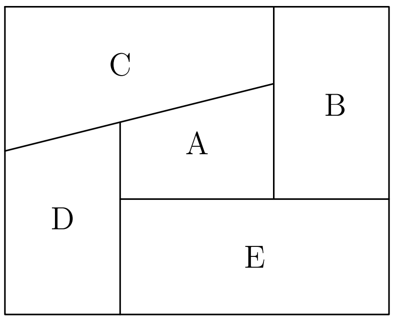
7) 奇数の平方から 1 を引けば 【8】 の倍数である。

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

8) $x < 3$ は $x^2 - x - 6 < 0$ であるための 【9】 。

① 十分条件である ② 必要条件である
③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

9) 絵の具を使って，A，B，C，D，E を塗り分けるとき，全ての色が異なる場合は何通りあるか。 【10】



① 12
② 24
③ 48
④ 60
⑤ 120

10) $(k+1)x + (k+2)y - 3k - 4 = 0$ がどのような k の値に対しても成り立つときの x，y の値を求めよ。 【11】

① $x = 1$，$y = 2$ ② $x = -2$，$y = 1$
③ $x = 2$，$y = 1$ ④ $x = 1$，$y = -2$

II. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき，$f(\theta) = \sin^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2$ の最大値 (max) を求め，そのときの θ の値も求めよ。 **【12】**

① max $\dfrac{4}{15}$, $\theta = 30^\circ$　　② max $\dfrac{15}{4}$, $\theta = 60^\circ$

③ max $\dfrac{4}{15}$, $\theta = 120^\circ$　　④ max $\dfrac{15}{4}$, $\theta = 150^\circ$

III. 2 次不等式 $ax^2 + 4x - 4 < 0$ の解が $-2 < x < \dfrac{2}{3}$ になるように定数 a の値を求めよ。 **【13】**

① $a = 3$　　② $a = -3$　　③ $a = 4$　　④ $a = -4$

IV. 1) 放物線 $y = kx^2 + 9x + k - 4$ と直線 $y = x + 2$ の共有点がないとき，実数 k の値の範囲を求めよ。 **【14】**

① $-2 < k < 8$　　② $-8 < k < 2$

③ $k < -2,\ 8 < k$　　④ $k < -8,\ 2 < k$

2) x 軸と $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と $(0, -6)$ で交わる放物線の方程式を求めよ。 **【15】**

① $y = -2x^2 - 8x - 6$　　② $y = -2x^2 + 8x - 6$

③ $y = -2x^2 - 8x + 6$　　④ $y = -2x^2 + 8x + 6$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とし，$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B = \{2, 5, 8\}$ とするとき，$\overline{A} \cup \overline{B} =$ **【16】**

① $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$　　② $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$　　③ $\{5\}$

④ $\{4, 6\}$　　⑤ $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

VI. $(2a + b)^8$ の展開式における a^5b^3 の項の係数を求めよ. **【17】**

① 1790　　② 1792　　③ 1794　　④ 1796

VII. $\triangle$ABC において $a=7$，$b=4\sqrt{2}$，$c=5$ のとき，次の値を求めよ。

1) $\cos A=$ $\boxed{\textbf{【18】}}$

① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$　④ $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

2) $\triangle$ABC の面積 $S=$ $\boxed{\textbf{【19】}}$

① 10　② 12　③ 14　④ 16

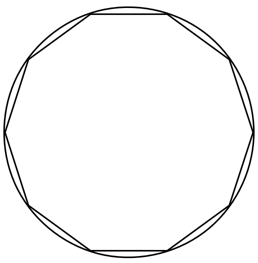
3) $\triangle$ABC の内接円の半径 $r=$ $\boxed{\textbf{【20】}}$

① $3+\sqrt{2}$　② $3-\sqrt{2}$　③ $2+\sqrt{3}$　④ $2-\sqrt{3}$

4) $\triangle$ABC の外接円の半径 $R=$ $\boxed{\textbf{【21】}}$

① $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　② $5\sqrt{2}$　③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　④ $2\sqrt{2}$

VIII. 円周上に 10 点が置かれている正十角形がある。



1) 正 10 角形の対角線は何本引けるか。 **【22】**

① 30　② 35　③ 40　④ 45

2) 直角三角形は全部で何個できるか。 **【23】**

① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

IX. 3 個のサイコロを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。ただし，約分しないものとする。

1) 目の和が 7 以下となる確率 **【24】**

① $\dfrac{32}{216}$　② $\dfrac{33}{216}$　③ $\dfrac{34}{216}$　④ $\dfrac{35}{216}$

2) 少なくとも 1 つのサイコロの目が 1 または 3 である確率 **【25】**

① $\dfrac{18}{27}$　② $\dfrac{19}{27}$　③ $\dfrac{20}{27}$　④ $\dfrac{21}{27}$

解答例

I. 1) $b=-a-1$ であるから

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=\frac{a}{(-a-1)+1}+\frac{-a-1}{a+1}$$
$$=\frac{a}{-a}+\frac{-(a+1)}{a+1}=-1+(-1)=\mathbf{-2}$$

2) $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}$

3) $-1\leq a\leq 2\cdots$ ① の各辺に1を加えて　$0\leq a+1\leq 3$

$a+1\geq 0$ であるから　$|a+1|=a+1$

① の各辺に2をかけて　$-2\leq 2a\leq 4$

上式の各辺から5を引いて　$-7\leq 2a-5\leq -1$

$2a-5\leq 0$ であるから　$|2a-5|=-(2a-5)$

したがって　$2|a+1|+|2a-5|=2(a+1)-(2a-5)=\mathbf{7}$

4) $x=\sqrt{3}-1$ から　$x+1=\sqrt{3}$

両辺を平方して　$x^2+2x+1=3$

すなわち　$x^2+2x-2=0$

したがって　$x^3+2x^2-2x+5=x(x^2+2x-2)+5$

$$=x\times 0+5=\mathbf{5}$$

5) $$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{b}{c}>0$，$\dfrac{c}{b}>0$，$\dfrac{c}{a}>0$，$\dfrac{a}{c}>0$ であるから，

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2,\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2,\quad \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2$$

上式において等号が成り立つのは，それぞれ

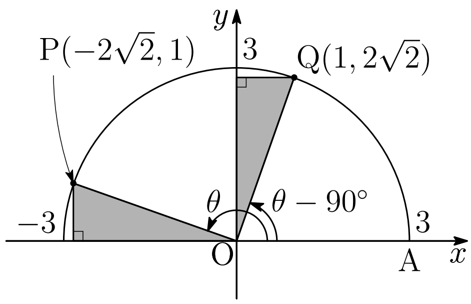
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a},\ \frac{b}{c}=\frac{c}{b},\ \frac{c}{a}=\frac{a}{c}\quad \text{すなわち}\quad a=b,\ b=c,\ c=a$$

のときである．したがって

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqq 2+2+2=\mathbf{6}$$

が成り立つ．ただし，等号が成り立つのは，$a=b=c$ のときである．

6) 右の図で，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とする．



$$\sin\theta=\frac{1}{3}\ (90^\circ<\theta<180^\circ)$$

より，半円の半径を $r=3$ にとると，P$(x,\ y)$ の座標は

$$x<0,\ y=1,\ x^2+y^2=3^2$$

これを解いて　$x=-2\sqrt{2}$

したがって　P$(-2\sqrt{2},\ 1)$　よって　$\cos\theta=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\angle\mathrm{AOQ}=\theta-90^\circ$ となる点を Q とすると，Q$(1,2\sqrt{2})$

よって　$\tan(\theta-90^\circ)=\dfrac{2\sqrt{2}}{1}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

7) n を整数とすると，$2n+1$ は奇数であるから，奇数の平方から 1 を引くと

$$(2n+1)^2-1=4n^2+4n=4n(n+1)$$

$n(n+1)$ は連続する 2 数の積であるから 2 の倍数である．
したがって，$4n(n+1)$ は $4\times2=\mathbf{8}$ の倍数である．

8) $x<3$ は $x^2-x-6<0$ であるための $\boxed{\textbf{必要条件である}}$。

9) A，B，C，D，E を異なる 5 色で塗り分ける方法の総数は

$$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{120}\quad(\text{通り})$$

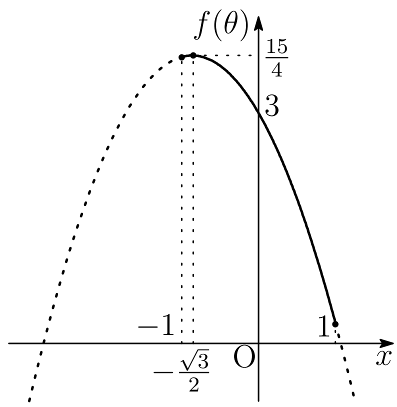
10) 与えられた等式は k についての恒等式であり，これを k について整理すると

$$(x+y-3)k+(x+2y-4)=0$$

よって　$x+y-3=0,\ x+2y-4=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=2,\ y=1}$

II.

$$\sin^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+2$$
$$=(1-\cos^2\theta)-\sqrt{3}\cos\theta+2$$
$$=-\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+3$$



$\cos\theta=x$ とおくと，$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より
$-1\leq x\leq1$

$$f(\theta)=-x^2-\sqrt{3}x+3$$

よって　$f(\theta)=-\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}$

したがって　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=150^\circ}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{15}{4}}$ をとる．

III. $-2 < x < \dfrac{2}{3}$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right) < 0$$

両辺に 3 をかけて　$(x+2)(3x-2) < 0$

すなわち　$3x^2 + 4x - 4 < 0$

したがって，求める a の値は　$\boldsymbol{a = 3}$

IV. 1) $y = kx^2 + 9x + k - 4$ と $y = x + 2$ から y を消去して整理すると

$$kx^2 + 8x + k - 6 = 0$$

放物線と直線が共有点をもたないとき，係数について

$$8^2 - 4k(k-6) < 0$$

整理して　$-4k^2 + 24k + 64 < 0$

両辺を -4 で割って　$k^2 - 6k - 16 > 0$

左辺を因数分解して　$(k+2)(k-8) > 0$

$k \neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{k < -2,\ 8 < k}$

2) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．

グラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0, -6)$ を通るから

$0 = a + b + c$　$\cdots$ ①

$0 = 9a + 3b + c$　$\cdots$ ②

$-6 = c$　$\cdots$ ③

③ を ① に代入して　$a + b = 6$　$\cdots$ ④

③ を ② に代入して　$9a + 3b = 6$

すなわち　$3a + b = 2$　$\cdots$ ⑤

④，⑤ を解くと　$a = -2$，$b = 8$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 6}$

V. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B = \{2, 5, 8\}$ であるから

$$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\},\ \overline{B} = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

したがって　$\boldsymbol{\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}}$

VI. 一般項 ${}_8\mathrm{C}_r(2a)^{8-r}b^r$ において，$r=3$ であるから

求める係数は　　${}_8\mathrm{C}_3\times 2^5 = 56\times 32 = \mathbf{1792}$

VII. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(4\sqrt{2})^2+5^2-7^2}{2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{10}}$$

(2) $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

したがって　$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5\times\frac{7\sqrt{2}}{10} = \mathbf{14}$

(3) $2s = 7+4\sqrt{2}+5$ とすると　$s = 6+2\sqrt{2}$

$S = rs$ により　　$14 = r(6+2\sqrt{2})$

これを解いて　　$r = \frac{14}{6+2\sqrt{2}} = \frac{7}{3+\sqrt{2}} = \boldsymbol{3-\sqrt{2}}$

(4) 正弦定理により　　$\frac{7}{\sin A} = 2R$

したがって　　
$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\times\frac{7}{\sin A} \\ &= \frac{1}{2}\times 7\div\frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

VIII. (1) 10 個の頂点から 2 個を選び，その 2 点を結んで得られる線分の本数は

${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ (本)

このうち，10 本が辺であるから，求める対角線の本数は

$45-10 = \mathbf{35}$ (本)

(2) 直角三角形は，直径を斜辺とする三角形であるから，1 つの直径に対する頂点の選び方は 8 通りある．直径の選び方は 5 通りあるから，積の法則により

$8\times 5 = \mathbf{40}$ (個)

IX. (1) 目の和が 3 になるのは　$\{1,1,1\}$ の 1 通り
目の和が 4 になるのは　$\{2,1,1\}$ の 3 通り
目の和が 5 になるのは　$\{3,1,1\}$ の 3 通り，$\{2,2,1\}$ の 3 通り
目の和が 6 になるのは　$\{4,1,1\}$ の 3 通り，$\{3,2,1\}$ の 6 通り，$\{2,2,2\}$ の 1 通り
目の和が 7 になるのは　$\{5,1,1\}$ の 3 通り，$\{4,2,1\}$ の 6 通り，$\{3,3,1\}$ の 3 通り，$\{3,2,2\}$ の 3 通り

したがって，目の和が 7 以下であるのは

$$1+3+3+3+3+6+1+3+6+3+3=35\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$\dfrac{35}{6^3}=\mathbf{\dfrac{35}{216}}$

(2) 1，3 の目が出ない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

少なくとも一つのサイコロが，1 または 3 の目である確率は

$$1-\frac{8}{27}=\mathbf{\frac{19}{27}}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	②	⑥	⑤
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
①	⑤	③	②	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	①	③	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
②	②	④	③	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	②	③	④	②

相加平均と相乗平均

2 数 a，b に対して，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という．
また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という．
$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$$

であるから　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b$ のときである．

したがって，次のことがいえる．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである．

← この不等式は
$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
の形で使うことが多い．

相加平均と相乗平均の大小関係を不等式の証明に利用してみよう．

例題　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2$$

[**証明**]　$a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

[証終]

[注意]　$a>0$ かつ $a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a=1$ のときに等号が成り立つ．