平成１８年度　青照館　一般入学試験 A 日程　試験問題
数学 I・数学 A(平成 17 年 12 月 23 日)60 分

I. 次の各設問に答えよ。

1) コンピュータで bit(ビット) とは，2 進法の 1 桁を意味している。8bit は何通りの情報量を表していると考えられるか。 **【1】**

① 32　② 64　③ 128　④ 256　⑤ 512

2) $\dfrac{4a^2-1}{a^2-1} \div \dfrac{2a+1}{a-1}$ を簡単にせよ。 **【2】**

① $\dfrac{2a-1}{a-1}$　② $\dfrac{2a+1}{a+1}$　③ $\dfrac{2a-1}{a+1}$　④ $\dfrac{2a+1}{a-1}$

3) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ を簡単にせよ。 **【3】**

① $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　② $\sqrt{2}-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{3}-2$　④ $3-\sqrt{2}$

4) $|5-x|=3$ を解け。 **【4】**

① $x=2$　② $x=8$　③ $x=2,\ 8$　④ $x=-2,-8$

5) $|x-2|<1$ の範囲を求めよ。 **【5】**

① $x<1,\ 3<x$　② $1<x<3$　③ $x<-1,\ 3<x$　④ $-1<x<3$

6) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。 **【6】**

① $\dfrac{16}{25}$　② $-\dfrac{16}{25}$　③ $\dfrac{8}{25}$　④ $-\dfrac{8}{25}$

7) 直線 $y = \sqrt{3}\,x + 2$ と x 軸のなす角は何度か。 **【7】**

① 15°　② 30°　③ 45°　④ 60°　⑤ 75°

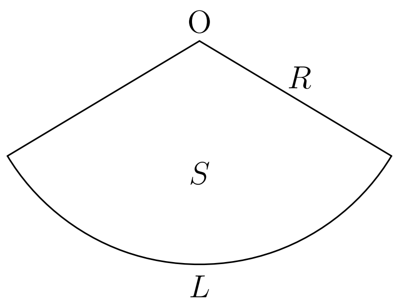
8) $ab > 0$ は $a > 0,\ b > 0$ であるための $\boxed{\textbf{【8】}}$ である。

① 必要条件　② 十分条件
③ 必要十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

9) $3 \leq a \leq 5$，$2 \leq b \leq 3$ のとき $3a - 2b$ の変域はどれか。 **【9】**

① $3 \leq 3a - 2b \leq 9$　② $3 \leq 3a - 2b \leq 11$
③ $5 \leq 3a - 2b \leq 9$　④ $5 \leq 3a - 2b \leq 11$
⑤ $3 \leq 3a - 2b \leq 5$

10) 下図の扇形の面積 S はいくらか。 **【10】**



(半径 $R = 6$，弧 $L = 12\pi$)

① 24π　② 36π　③ 48π
④ 60π　⑤ 72π

II. 次の 2 次関数について答えよ。

1) $y = x^2 - 2x + a$ $(-2 \leq x \leq 2)$ の最大値が 8 のとき a の値を求めよ。 **【11】**

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

2) x 軸と $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と $(0, -6)$ で交わる放物線の方程式を求めよ。 **【12】**

① $y = -x^2 - 8x - 6$　② $y = -2x^2 - 8x - 6$
③ $y = -2x^2 + 8x - 6$　④ $y = -x^2 + 8x - 6$

III. $a + b + c = 1$，$a^2 + b^2 + c^2 = 3$ のとき，$ab + bc + ca =$ **【13】** である。

① 2　② -2　③ 0　④ 1　⑤ -1

IV. 2 つの解が $3 \pm \sqrt{5}$ のとき，2 次方程式を ①〜⑨ から選び完成せよ。

$$x^2 - \boxed{\textbf{【14】}}\,x + \boxed{\textbf{【15】}} = 0$$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5
⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9

V. △ABC において，a，b，c を頂点 A，B，C に対応する三角形の 3 辺とする。

1) $b = 3$，$c = 3\sqrt{3}$，$B = 30^\circ$ のとき，C，a を求めよ. **【16】**

① $C = 60^\circ$ のとき $a = 6$　② $C = 120^\circ$ のとき $a = 3$

③ $\begin{cases} C = 60^\circ \text{ のとき } a = 6 \\ C = 120^\circ \text{ のとき } a = 3 \end{cases}$　④ $\begin{cases} C = 60^\circ \text{ のとき } a = 3 \\ C = 120^\circ \text{ のとき } a = 6 \end{cases}$

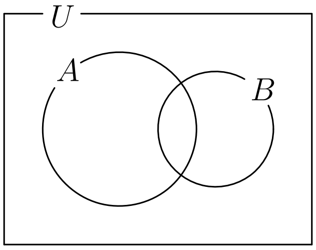
2) △ABC で，AB $= 2\sqrt{2}$，AC $= 6$，∠A $= 45^\circ$ のとき，BC を求めよ。 **【17】**

① $2\sqrt{5}$　② $3\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{5}$　④ $5\sqrt{5}$

3) △ABC において $a = 5$，$b = 3$，$c = 6$ のとき △ABC の面積を求めよ。 **【18】**

① $\sqrt{14}$　② $2\sqrt{14}$　③ $3\sqrt{14}$　④ $4\sqrt{14}$

VI. 学生 80 人に調査をしたところ，英語の得意な者 54 人，数学の得意な者 38 人，どちらも得意でない者は 15 人であった。



1) 英語または数学が得意な者は $\boxed{\textbf{【19】}}$ 人である。

① 64　② 65　③ 66　④ 67　⑤ 68

2) 英語，数学どちらも得意な者は $\boxed{\textbf{【20】}}$ 人である。

① 24　② 25　③ 26　④ 27　⑤ 28

3) 数学だけ得意な者は $\boxed{\textbf{【21】}}$ 人である。

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

4) 英語と数学のどちらか一方のみが得意でない者は $\boxed{\textbf{【22】}}$ 人である。

① 35　② 36　③ 37　④ 38　⑤ 39

VII. A，B，C が，同じ問題を解こうとしている。3 人の問題を解くことのできる確率はそれぞれ，$\frac{3}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{3}$ である。

1) 3 人とも解くことのできる確率を求めよ。 **【23】**

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\frac{3}{20}$　④ $\frac{1}{5}$

2) 少なくとも 1 人は解くことのできる確率を求めよ。 **【24】**

① $\frac{11}{15}$　② $\frac{4}{5}$　③ $\frac{13}{15}$　④ $\frac{14}{15}$

3) 2 人だけが解くことのできる確率を求めよ。 **【25】**

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{9}{20}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{11}{20}$　⑤ $\frac{3}{5}$

解答例

I. 1) 2個から8個とる重複順列であるから　$2^8 = \mathbf{256}$ (通り)

2) $\dfrac{4a^2-1}{a^2-1} \div \dfrac{2a+1}{a-1} = \dfrac{(2a+1)(2a-1)}{(a+1)(a-1)} \times \dfrac{a-1}{2a+1} = \boldsymbol{\dfrac{2a-1}{a+1}}$

3) $\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3 \cdot 2}} = \boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

4) $|5-x| = 3$ より　　$5-x = \pm 3$

これを解いて　　$\boldsymbol{x = 2,\ 8}$

5) $|x-2| < 1$ より　　$-1 < x-2 < 1$

各辺に2を加えて　　$\boldsymbol{1 < x < 3}$

6) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

よって　　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{9}{25}$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{-\dfrac{8}{25}}$

7) 直線と x 軸とのなす角を θ とすると

$\tan\theta = \sqrt{3}$　　これを解いて　　$\theta = \mathbf{60°}$

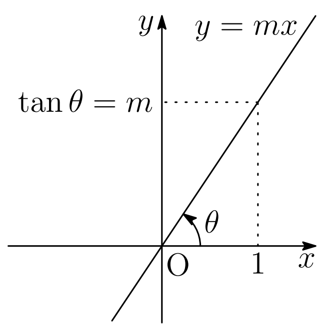
直線の傾き m と x 軸の正の部分となす角 θ

右の図のように，x 軸の正の部分から直線 $y = mx$ まで測った角を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{m}{1} = m$$

一般に，直線 $y = mx + n$ の x 軸の正の部分となす角が θ であるとき

$$\boldsymbol{m = \tan\theta}$$



8) $ab > 0$ は $a > 0,\ b > 0$ であるための $\boxed{\textbf{必要条件}}$ である。

9) $3 \leq a \leq 5$ より　$9 \leq 3a \leq 15$　$\cdots$①
$2 \leq b \leq 3$ より　$-6 \leq -2b \leq -4$　$\cdots$②
①，② より　$9 + (-6) \leq 3a + (-2b) \leq 15 + (-4)$
すなわち　$\boldsymbol{3 \leq 3a - 2b \leq 11}$

「$\leq$，$\geq$ はそれぞれ $\leqq$，$\geqq$ と同意」

10) $S = \dfrac{1}{2}LR = \dfrac{1}{2} \times 12\pi \times 6 = \boldsymbol{36\pi}$

II. 1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + a \\ &= (x-1)^2 - 1 + a \end{aligned}$$

$y = x^2 - 2x + a\ (-2 \leq x \leq 2)$ は $x = -2$ のとき最大値 8 をとるので

$8 = (-2)^2 - 2\cdot(-2) + a$　すなわち　$\boldsymbol{a = 0}$

2) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.
グラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0, -6)$ を通るから

$$0 = a + b + c \quad \cdots ①$$
$$0 = 9a + 3b + c \quad \cdots ②$$
$$-6 = c \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入して　$a + b = 6$　$\cdots$④
③ を ② に代入して　$9a + 3b = 6$
すなわち　$3a + b = 2$　$\cdots$⑤
④，⑤ を解くと　$a = -2$，$b = 8$
よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 6}$

III. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ であるから，
これに $a + b + c = 1$，$a^2 + b^2 + c^2 = 3$ を代入すると

$$1^2 = 3 + 2(ab + bc + ca)$$

したがって　$\boldsymbol{ab + bc + ca = -1}$

IV. $(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6$, $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=4$ であるから
$3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　　$\boldsymbol{x^2-6x+4=0}$

$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ を解とする 2 次方程式

2 数 α, β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)=0}$$

すなわち　$\boldsymbol{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$

V. (1) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}$

$3\sin C=3\sqrt{3}\sin 30^\circ$

したがって　$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす C は　$C=60^\circ$, 120°

$\boldsymbol{C=60^\circ}$ のとき

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

よって　$\dfrac{a}{\sin 90^\circ}=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}$

$a=\dfrac{3\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$

したがって　$a=3\times 1\div\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{6}$

$\boldsymbol{C=120^\circ}$ のとき

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

よって　$A=B$ であるから　$a=b$ より　$a=\boldsymbol{3}$

(2) BC の長さ a は，余弦定理により

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\\ &= 6^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2{\cdot}6{\cdot}2\sqrt{2}\cos 45^\circ\\ &= 36 + 8 - 2{\cdot}6{\cdot}2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 20\end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 2\sqrt{5}}$

(3) $2s = 5 + 3 + 6 = 14$ とすると　$s = 7$

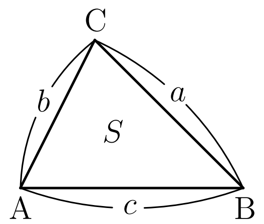
ゆえに，求める面積を S とすると

$$S = \sqrt{7(7-5)(7-3)(7-6)} = \sqrt{7{\cdot}2{\cdot}4{\cdot}1} = \mathbf{2\sqrt{14}}$$

ヘロンの公式

$2s = a + b + c$ のとき，面積 S は

$$\boldsymbol{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$



VI. 学生全体の集合を U，英語が得意な人の集合を A，数学が得意な人の集合を B とする．どちらも得意でない人の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ であるから

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ により　　$n(\overline{A \cup B}) = 15$

(1) 英語または数学が得意な学生の人数 $n(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(U) - n(\overline{A \cup B})\\ &= 80 - 15 = \mathbf{65}\quad (人)\end{aligned}$$

(2) 英語，数学どちらも得意な学生の人数 $n(A \cap B)$ は

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ により

$$65 = 54 + 38 - n(A \cap B)$$

すなわち　　$n(A \cap B) = \mathbf{27}$　(人)

(3) 数学だけ得意な学生の人数は

$$n(B) - n(A \cap B) = 38 - 27 = \mathbf{11}\quad (人)$$

(4) 英語と数学のどちらか一方のみが得意な学生の人数は

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 27 = \mathbf{38}\quad (人)$$

VII. (1) 3 人とも解く確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{3}{20}}$$

(2) 3 人とも解けない確率は

$$\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$$

したがって，少なくとも 1 人は解くことができる確率は

$$1-\frac{1}{15}=\mathbf{\frac{14}{15}}$$

(3) 問題を解く 2 人が，A と B，A と C，B と C の場合がある．

A，B だけが解く確率は $\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{10}$

A，C だけが解く確率は $\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{20}$

B，C だけが解く確率は $\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}=\mathbf{\frac{9}{20}}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	③	①	③	②
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
④	④	①	②	②
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	③	⑤	⑥	④
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	①	②	②	④
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
③	④	③	④	②

2重根号

根号を2重なるに含む式について考えてみよう．

たとえば，$\sqrt{3}+\sqrt{2}>0$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2},\quad \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

である．ここで

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)+2\sqrt{3\cdot2}$$
$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=(3+2)-2\sqrt{3\cdot2}$$

であるから，次のことが成り立つ．

$$\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\cdot2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

一般に，次のことが成り立つ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

2重根号

$$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$a>b$ のとき　$$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

例 (1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{2^2\cdot3}}=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot3}}$
$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

練習 次の2重根号をはずせ．

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　　(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$　　(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

［解］ (1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\cdot2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{3^2\cdot3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$