平成 21 年度　熊本労災看護専門学校　一般入学試験問題
数学 I・数学 A(平成 21 年 1 月 22 日)60 分

〔問 1〕 $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，$x^3 + y^3$ の値を求めよ。

(1) $2\sqrt{5} + 3$

(2) $-2\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{5}$

(4) $5\sqrt{5}$

(5) $2\sqrt{5} - 3$

〔問 2〕 $9x^2 - 4y^2 + 4y - 1$ を因数分解せよ。

(1) $(3x - 2y + 1)(3x + 2y - 1)$

(2) $(3x - 2y - 1)(3x + 2y + 1)$

(3) $(3x - 4y + 1)(3x + y - 1)$

(4) $(9x - 2y + 1)(x + 2y - 1)$

(5) $(3x - 2y - 1)^2$

〔問 3〕 連立不等式 $\begin{cases} 8x - 20 < 3x + 25 \\ 2x - 7 < 6x + 13 \end{cases}$ を解け。

(1) $x < 9$

(2) $-5 < x < 9$

(3) $x < -5$

(4) $x > 9$

(5) $x > -5$

〔問 4〕 方程式 $|\,2x - 1\,| + |\,3 - x\,| = x + 4$ を解け。

(1) $x = 0$

(2) $x = 4$

(3) $x = 0$，$x = -4$

(4) $x = 0$，$x = 4$

(5) 解はない

〔問 5〕 2 つの x の方程式 $kx^2+2x+2k-1=0$ と $x^2+kx+k=0$ がともに実数解を持つような k の値の範囲を求めよ。

(1) $k \leqq 0,\ 4 \leqq k$

(2) $-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 0$

(3) $-\dfrac{1}{2} < k < 0$

(4) $-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 4$

(5) $k < -\dfrac{1}{2},\ 0 < k$

〔問 6〕 右の図は，ある 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。a，b，c の符号を答えよ。

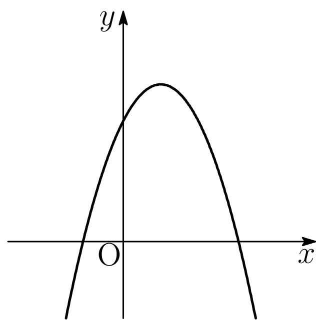
(1) $a>0,\ b>0,\ c>0$

(2) $a<0,\ b<0,\ c<0$

(3) $a<0,\ b<0,\ c>0$

(4) $a<0,\ b>0,\ c>0$

(5) $a>0,\ b<0,\ c<0$



〔問 7〕 グラフの頂点の x 座標が -2，y 切片が 3 であるような 2 次関数の中で，y の最小値が 1 であるとき，この 2 次関数の式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x+3$

(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$

(3) $y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

(4) $y=\dfrac{1}{2}x^2+4x+3$

(5) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+3$

〔問 8〕 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + y = 5$ のとき，$3x^2 + 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) 最大値 75，最小値 50

(2) 最大値 50，最小値 30

(3) 最大値 75，最小値 30

(4) 最大値 75，最小値はない

(5) 最大値はない，最小値 30

〔問 9〕 右のような半径が 12cm，中心角が 90° の扇形を直線 ℓ を軸に 90° 回転させてできた立体の表面積を求めよ。

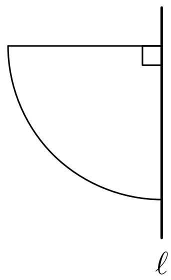
(1) $180\pi\,\mathrm{cm}^2$

(2) $252\pi\,\mathrm{cm}^2$

(3) $216\pi\,\mathrm{cm}^2$

(4) $72\pi\,\mathrm{cm}^2$

(5) $108\pi\,\mathrm{cm}^2$



〔問 10〕 θ が鈍角で $\tan\theta = -\dfrac{12}{5}$ のとき，$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ の値を求めよ。

(1) $\dfrac{26}{5}$

(2) $-\dfrac{13}{6}$

(3) $-\dfrac{5}{6}$

(4) $-\dfrac{26}{5}$

(5) $\dfrac{13}{6}$

〔問 11〕 $\cos 26^\circ = a$ のとき，$\tan 116^\circ$ の値を求めよ。

(1) $\sqrt{1-a^2}$

(2) $\dfrac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

(4) $-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

(5) $-\dfrac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$

〔問 12〕 鈍角三角形 ABC で $\mathrm{AB} = 1+\sqrt{3}$，$\mathrm{BC} = 2$，$\angle\mathrm{A} = 45^\circ$ のとき，AC の長さと $\angle\mathrm{B}$ の大きさを求めよ。

(1) $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$

(2) $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{B} = 30^\circ$

(3) $\mathrm{AC} = \sqrt{6}$，$\angle\mathrm{B} = 75^\circ$

(4) $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{B} = 75^\circ$

(5) $\mathrm{AC} = \sqrt{6}$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$

〔問 13〕 1 から 500 までの自然数の中で 2，5，7 のどれでも割り切れない数の個数を求めよ。

(1) 79

(2) 171

(3) 329

(4) 322

(5) 178

〔問 14〕 男子 4 人と女子 5 人のあわせて 9 人を，男女混合の 3 人ずつの 3 つのグループに分けるとき，何通りの分け方があるか。

(1) 180 通り

(2) 360 通り

(3) 480 通り

(4) 240 通り

(5) 120 通り

〔問 15〕 A と B の 2 人が試合をして，どちらかが先に 4 勝した方を優勝とする。A が B に勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であり，引き分けはないとして，A が 4 勝 3 敗で優勝する確率を求めよ。

(1) $\frac{1}{16}$

(2) $\frac{1}{128}$

(3) $\frac{35}{128}$

(4) $\frac{5}{64}$

(5) $\frac{5}{32}$

解答例

〔問 1〕 $x+y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}$，$xy=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{5-1}{4}=1$

よって　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{5}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

〔問 2〕 $9x^2-4y^2+4y-1=(3x)^2-(2y-1)^2$

$=\{3x+(2y-1)\}\{3x-(2y-1)\}$

$=\boldsymbol{(3x+2y-1)(3x-2y+1)}$

〔問 3〕 第 1 式から　$8x-3x<25+20$

ゆえに　$x<9$　$\cdots$①

第 2 式から　$2x-6x<13+7$

ゆえに　$x>-5$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-5<x<9}$

〔問 4〕 ［1］ $x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$|\,2x-1\,|=-2x+1$，$|\,3-x\,|=3-x$ であるから

方程式は　$(-2x+1)+(3-x)=x+4$

これを解くと　$x=0$

これは，$x<\dfrac{1}{2}$ を満たすから，解である．

［2］ $\dfrac{1}{2}\leqq x<3$ のとき　$|\,2x-1\,|=2x-1$，$|\,3-x\,|=3-x$ であるから

方程式は　$(2x-1)+(3-x)=x+4$

このとき，解はない．

［3］ $3\leqq x$ のとき　$|\,2x-1\,|=2x-1$，$|\,3-x\,|=x-3$ であるから

方程式は　$(2x-1)+(x-3)=x+4$

これを解くと　$x=4$

これは，$3\leqq x$ を満たすから，解である．

以上から，方程式の解は　$\boldsymbol{x=0,\ 4}$

〔**問 5**〕第 1 式について $D/4 \geqq 0$ であるから

$$1^2 - k(2k-1) \geqq 0$$

整理して　$2k^2 - k - 1 \leqq 0$

$$(k-1)(2k+1) \leqq 0$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$　$\cdots$ ①

第 2 式について $D \geqq 0$ であるから

$$k^2 - 4{\cdot}1{\cdot}k \geqq 0$$

$$k(k-4) \geqq 0$$

ゆえに　$k \leqq 0,\ 4 \leqq k$　$\cdots$ ②

①，② の共通範囲を求めて　$-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 0$

とくに，第 1 式の 2 次の係数 k が 0 のとき，2 つの方程式は

$$2x - 1 = 0,\ \ x^2 = 0$$

となり，これらは実数解をもつ．これに注意して，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq k \leqq 0}$$

〔**問 6**〕放物線が上に凸なので　$\boldsymbol{a < 0}$

頂点の x 座標は $x = -\dfrac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\dfrac{b}{2a} > 0$

$a < 0$ より　$\boldsymbol{b > 0}$

放物線の y 軸の交点の y 座標が正であるから　$\boldsymbol{c > 0}$

〔**問 7**〕頂点の座標が $(-2,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数を

$$y = a(x+2)^2 + 1$$

とおける．これが点 $(0,\ 3)$ を通るので

$$3 = a(0+2)^2 + 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{1}{2}$$

よって　$y = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 + 1$　すなわち　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3}$

〔問 8〕 $x+y=5$ より　$y=5-x\cdots$ ①

$y \geqq 0$ であるから　　$5-x \geqq 0$

$x \geqq 0$ との共通範囲を求めて　$0 \leqq x \leqq 5$　$\cdots$ ②

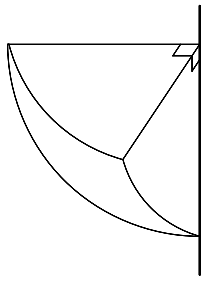
① より　$3x^2+2y^2 = 3x^2+2(5-x)^2$

$$= 5x^2-20x+50$$

$$= 5(x-2)^2+30$$

② において，上式は $x=5$ で**最大値 75**，$x=2$ で**最小値 30** をとる．

〔問 9〕 半径 12cm の球の表面積の $\dfrac{1}{8}$ および半径 12cm の円の面積の $\dfrac{3}{4}$ の和であるから



$$4\pi \cdot 12^2 \times \frac{1}{8} + \pi \cdot 12^2 \times \frac{3}{4} = \boldsymbol{180\pi}$$

〔問 10〕 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$$= \frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin\theta} \quad \cdots ①$$

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = 1 \div \left\{1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2\right\} = \frac{25}{169}$$

θ は鈍角より，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -\dfrac{12}{5} \times \left(-\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{12}{13}$　$\cdots$ ②

①，② より　$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2 \div \dfrac{12}{13} = \boldsymbol{\dfrac{13}{6}}$

〔問 11〕

$$\tan 116^\circ = \tan(180^\circ - 64^\circ) = -\tan 64^\circ$$
$$= -\tan(90^\circ - 26^\circ) = -\frac{1}{\tan 26^\circ} = -\frac{\cos 26^\circ}{\sin 26^\circ}$$

$\cos 26^\circ = a$ のとき　$\sin 26^\circ = \sqrt{1-a^2}$ であるから

$$\tan 116^\circ = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \boldsymbol{-\frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}}$$

〔問 12〕 $a=2$，$b=\mathrm{AC}$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=45^\circ$ を余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

に適用すると

$$2^2 = b^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2b(1+\sqrt{3})\cos 45^\circ$$

整理すると　$b^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{6})b + \sqrt{2}\sqrt{6} = 0$

ゆえに　$(b-\sqrt{2})(b-\sqrt{6}) = 0$

よって　$b = \sqrt{2},\ \sqrt{6}$

$b=\sqrt{2}$ ならば $b<a$ より，$B<A$ となり $C>90^\circ$

これは，△ABC が鋭角三角形であることに反する．

したがって　$\boldsymbol{b = \sqrt{6}}$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$2\sin B = \sqrt{6}\sin 45^\circ$$

ゆえに　$\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B は鋭角であるから　$\boldsymbol{B = 60^\circ}$

〔問 13〕 1 から 500 までの自然数の集合を U とし，U の部分集合で，2 で割り切れる数の集合を A，5 で割り切れる数の集合を B，7 で割り切れる数の集合を C とすると

$$\begin{aligned}
A &= \{2{\cdot}1,\ 2{\cdot}2,\ 2{\cdot}3,\ \cdots,\ 2{\cdot}250\} \\
B &= \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}100\} \\
C &= \{7{\cdot}1,\ 7{\cdot}2,\ 7{\cdot}3,\ \cdots,\ 7{\cdot}71\} \\
A \cap B &= \{10{\cdot}1,\ 10{\cdot}2,\ 10{\cdot}3,\ \cdots,\ 10{\cdot}50\} \\
B \cap C &= \{35{\cdot}1,\ 35{\cdot}2,\ 35{\cdot}3,\ \cdots,\ 35{\cdot}14\} \\
C \cap A &= \{14{\cdot}1,\ 14{\cdot}2,\ 14{\cdot}3,\ \cdots,\ 14{\cdot}35\} \\
A \cap B \cap C &= \{70{\cdot}1,\ 70{\cdot}2,\ 70{\cdot}3,\ \cdots,\ 70{\cdot}7\}
\end{aligned}$$

これから

$n(U) = 500$，$n(A) = 250$，$n(B) = 100$，$n(C) = 71$，
$n(A \cap B) = 50$，$n(B \cap C) = 14$，$n(C \cap A) = 35$，
$n(A \cap B \cap C) = 7$

求めるのは $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ であるから

$$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n(\overline{A \cup B \cup C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$$

ここで

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\
&\qquad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\
&\qquad + n(A \cap B \cap C) \\
&= 250 + 100 + 71 - 50 - 14 - 35 + 7 = 329
\end{aligned}$$

したがって

$$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 500 - 329 = \mathbf{171}$$

〔問 14〕 男女混合の 3 つのグループに分けるので，男子 4 人は 2 人，1 人，1 人の 3 つのグループに，女子 5 人は 2 人，2 人，1 人の 3 つのグループに分けることになる．

男子 4 人の分け方は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1}{2!} = 6$ (通り)

女子 5 人の分け方は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2}{2!} = 15$ (通り)

その各々について，男子 2 と女子 1 人で 1 グループを構成し，男子 1 人と女子 2 人の 2 グループの構成の仕方は 2 通りある．

よって，求める分け方の総数は

$$6 \times 15 \times 2 = \mathbf{180} \text{ (通り)}$$

〔問 15〕 3 勝 3 敗の後，A が勝つ確率であるから

$${}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{32}}$$

(答)

〔問 1〕	**〔問 2〕**	**〔問 3〕**	**〔問 4〕**	**〔問 5〕**
3	1	2	4	2
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
4	5	3	1	5
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
5	5	2	1	5