平成 20 年度　熊本労災看護専門学校　一般入学試験問題
数学 I・数学 A(平成 20 年 1 月 24 日)60 分

〔問 1〕 △ABC において BC $=17$，CA $=10$，AB $=9$ とするとき内接円の半径を求めよ。

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

〔問 2〕 $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$ を因数分解せよ。

(1) $(3x-y+2)(2x+3y-1)$

(2) $(3x-y-2)(2x-3y+1)$

(3) $(3x+y+2)(2x+3y-1)$

(4) $(3x-y-2)(2x+3y+1)$

(5) $(3x+y-2)(2x-3y+1)$

〔問 3〕 頂点が $(3,\ 2)$ で点 $(4,\ 5)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2-6x+11$

(2) $y=-x^2+6x+2$

(3) $y=2x^2-12x+27$

(4) $y=-3x^2+12x-27$

(5) $y=3x^2-18x+29$

〔問 4〕 $(2x^2+3x-1)^6$ を展開したとき，x^4 の係数を求めよ。

(1) 195

(2) 198

(3) 201

(4) 208

(5) 211

〔問 5〕 $a\cos B - b\cos A = c$ を満たす三角形の形状を求めよ。

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$ の二等辺三角形

(2) $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ の直角三角形

(3) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形

(4) $\angle\mathrm{B} = 90^\circ$ の直角三角形

(5) $\mathrm{AB} = \mathrm{CA}$ で $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形

〔問 6〕 a，b，c，d，e，f の文字が書いてある玉が 1 個ずつあるとき，これらの玉にひもを通し，輪を作る方法は何通りあるか求めよ。

(1) 30

(2) 45

(3) 60

(4) 90

(5) 120

〔問 7〕 $x^2 - 2y^2 + xy + kx + 2y + 4$ が，x，y についての 2 つの 1 次式の積に分解されるとき，k の値を求めよ。

(1) $k = -2,\ 3$

(2) $k = 2, -3$

(3) $k = -4,\ 5$

(4) $k = 4, -5$

(5) $k = 5,\ 6$

〔問 8〕 1800 の正の約数はいくつあるか求めよ。

(1) 24

(2) 26

(3) 28

(4) 32

(5) 36

〔問 9〕 $x+y+z=3$，$xy+yz+zx=1$，$xyz=-2$ のとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。

(1) 6

(2) 12

(3) 18

(4) 24

(5) 30

〔問 10〕 40 人の生徒に，沖縄，北海道，京都のどこに旅行に行きたいか，アンケート調査をしたところ，沖縄 18 人，北海道 12 人，京都 21 人，沖縄と北海道 6 人，沖縄と京都 9 人，北海道と京都 5 人，どこも行きたくない 5 人という結果が得られた。このとき，沖縄，北海道，京都すべてに行きたいと答えた生徒は何人いるか求めよ。

(1) 2

(2) 3

(3) 4

(4) 6

(5) 8

〔問 11〕 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ を求めよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{37}}{5}$

(2) $\pm\dfrac{\sqrt{37}}{5}$

(3) $\pm\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

(4) $\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

(5) $-\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

〔問 12〕 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$b^2 + ab$ の値を求めよ。

(1) $1+\sqrt{2}$

(2) $2+2\sqrt{2}$

(3) $2+6\sqrt{2}$

(4) $3+2\sqrt{2}$

(5) $3+4\sqrt{2}$

〔問 13〕 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，2 次方程式 $x^2 - 2x\sin\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつように θ の範囲を求めよ。

(1) $0^\circ \leqq \theta < 30^\circ$

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$

(3) $0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$

(4) $0^\circ \leqq \theta < 150^\circ$

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$

〔問 14〕 5 枚の 100 円硬貨を投げて，表が出た硬貨の枚数が奇数ならば，その枚数の分だけ賞金としてもらえる。また表が出た枚数が偶数ならば 100 円支払わなければならないとしたとき，賞金の期待値を求めよ。

(1) 50

(2) 75

(3) 100

(4) 125

(5) 150

〔問 15〕 $x^2 - 2ax + 5a - 4 = 0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつように，定数 a の値を求めよ。

(1) $a < 0$

(2) $0 < a < 1$

(3) $1 < a < 2$

(4) $2 < a < 4$

(5) $4 < a$

解答例

〔問 1〕 $2s = 17 + 10 + 9 = 36$ とすると　　$s = 18$

ゆえに，三角形の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S = \sqrt{18(18-17)(18-10)(18-9)} = 36$$

これらを $S = rs$ に代入して

$$36 = r \cdot 18$$

よって　　$r = \mathbf{2}$

〔問 2〕

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 7xy - 3y^2 - x + 7y - 2 \\ = & 6x^2 + (-7y-1)x - (y-2)(3y-1) \\ = & \{3x + (y-2)\}\{2x - (3y-1)\} \\ = & \boldsymbol{(3x + y - 2)(2x - 3y + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & y-2 & \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & -(3y-1) & \longrightarrow & -9y+3 \\ \hline 6 & -(y-2)(3y-1) & & -7y-1 \end{array}$$

〔問 3〕 頂点が $(3,\ 2)$ であるから，求める関数は $y = a(x-3)^2 + 2$ とおける．

このグラフが $(4,\ 5)$ を通るから　　$5 = a + 2$　　ゆえに　$a = 3$

よって　　$y = 3(x-3)^2 + 2$　すなわち　$\boldsymbol{y = 3x^2 - 18x + 29}$

〔問 4〕 $(2x^2 + 3x - 1)^6 = \{2x^2 + 3x + (-1)\}^6$ の一般項は

$$\frac{6!}{a!b!c!}(2x^2)^a(3x)^b(-1)^c = \frac{6! \cdot 2^a \cdot 3^b \cdot (-1)^c}{a!b!c!}x^{2a+b} \quad (a+b+c=6)$$

よって，$a + b + c = 6$，$2a + b = 4$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$(a,\ b,\ c) = (0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$$

したがって，x^4 の係数は

$$\begin{aligned} \frac{6! \cdot 3^4 \cdot (-1)^2}{4!2!} + \frac{6! \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (-1)^3}{1!2!3!} + \frac{6! \cdot 2^2 \cdot (-1)^4}{2!4!} &= 1215 - 1080 + 60 \\ &= \mathbf{195} \end{aligned}$$

〔問 5〕 余弦定理により，与えられた等式は

$$a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

よって　　$\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} - \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = c$

すなわち　　$(c^2 + a^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$

整理して　　$2a^2 - 2b^2 = 2c^2$

ゆえに　　$a^2 = b^2 + c^2$

したがって，$\triangle$ABC は　　**$\angle$A $= 90^\circ$ の直角三角形**

〔問 6〕6 個の数珠(じゅず)順列の個数であるから

$$\frac{(6-1)!}{2}=\frac{5!}{2}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}=\mathbf{60}\ (\text{通り})$$

> n 個の数珠(じゅず)順列は　$\dfrac{(n-1)!}{2}$

〔問 7〕x について整理すると

$$\begin{aligned}
&x^2-2y^2+xy+kx+2y+4\\
=&x^2+(y+k)x-2y^2+2y+4\\
=&x^2+(y+k)x+\left(\frac{y+k}{2}\right)^2-\left(\frac{y+k}{2}\right)^2-2y^2+2y+4\\
=&\left(x+\frac{y+k}{2}\right)^2-\left\{\frac{9}{4}y^2+\left(\frac{k}{2}-2\right)y+\frac{k^2}{4}-4\right\}\\
=&\left(x+\frac{y+k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left\{9y^2+2(k-4)y+k^2-16\right\}
\end{aligned}$$

$9y^2+2(k-4)y+k^2-16$ が平方式であればよいから，y について

$D/4=0$ から　$(k-4)^2-9(k^2-16)=0$

整理して　$k^2+k-20=0$

ゆえに　$(k-4)(k+5)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{k=4,-5}$

解説

$9y^2+2(k-4)x+k^2-16$ が平方式であれば

$$x+\frac{y+k}{2}=A,\ \ 9y^2+2(k-4)x+k^2-16=B^2$$

とおくと (B は y の 1 次式)

$$(\text{与式})=A^2-\frac{1}{4}B^2=\left(A+\frac{1}{2}B\right)\left(A-\frac{1}{2}B\right)$$

$A\pm\dfrac{1}{2}B$ は 1 次式であるから，(与式) は 2 つの 1 次式の積である．

〔問 8〕$1800=2^3\times3^2\times5^2$ であるから，1800 の正の約数は 2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で表される．2^3，3^2，5^2 の正の約数の個数は，それぞれ 4 個，3 個，3 個であるから，求める正の約数の個数は　$4\times3\times3=\mathbf{36}$ (個)

〔問 9〕 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ であるから

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz\\&=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz\\&=3(3^2-3\cdot1)+3\cdot(-2)=\mathbf{12}\end{aligned}$$

〔問 10〕 沖縄に行きたい人の集合を A，北海道に行きたい人の集合を B，京都に行きたい人の集合を C とすると，条件から

$$n(A)=18,\ n(B)=12,\ n(C)=21,$$
$$n(A\cap B)=6,\ n(A\cap C)=9,\ n(B\cap C)=5,$$

$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=5$ であるから

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(\overline{A\cup B\cup C})=40-5=35$$

これらを

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)&\\-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)&\\+n(A\cap B\cap C)&\end{aligned}$$

に代入すると　$35=18+12+21-6-9-5+n(A\cap B\cap C)$

これを解いて　$n(A\cap B\cap C)=\mathbf{4}$

〔問 11〕 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ の両辺を 2 乗すると

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{25}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{9}{25}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする x の 2 次方程式は

$$x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta=0$$

ゆえに　$5x^2-\sqrt{7}x-\dfrac{9}{5}=0$

これを解いて　$x=\dfrac{\sqrt{7}\pm\sqrt{43}}{10}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\sin\theta\geqq0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{43}}{10},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{43}}{10}$$

よって　$\boldsymbol{\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{43}}{5}}$

〔問 12〕 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であるから　$2<2\sqrt{2}<3$

ゆえに　　　$5<3+2\sqrt{2}<6$

したがって　　$a+b=3+2\sqrt{2}$,　$a=5$

上の 2 式から　　$b=2\sqrt{2}-2$

よって　　$b^2+ab=(2\sqrt{2}-2)^2+(2\sqrt{2}-2)\cdot 5$

$$=\mathbf{2+2\sqrt{2}}$$

〔問 13〕 異なる 2 つの実数解をもつ条件は　　$D>0$

したがって　　$(-2\sin\theta)^2-4\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)>0$

整理して　　$2\sin^2\theta+3\cos\theta>0$

$$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta>0$$

ゆえに　　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2<0$

よって　　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)<0$

$\cos\theta-2<0$ より　　$2\cos\theta+1>0$

$$\cos\theta>-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ に注意して　　$\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta<120^\circ}$

〔問 14〕 表が 1 枚の確率は　　${}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{5}{32}$

表が 3 枚の確率は　　${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{10}{32}$

表が 5 枚の確率は　　${}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$

表の枚数が偶数である確率は　　$1-\left(\dfrac{5}{32}+\dfrac{10}{32}+\dfrac{1}{32}\right)=\dfrac{16}{32}$

よって，賞金を X 円とすると，右のような表ができる．したがって，求める期待値は

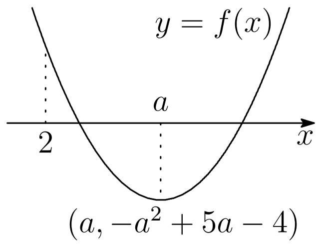
X	100	300	500	-100
確率	$\dfrac{5}{32}$	$\dfrac{10}{32}$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{16}{32}$

$$100\times\frac{5}{32}+300\times\frac{10}{32}+500\times\frac{1}{32}+(-100)\times\frac{16}{32}=\mathbf{75}$$

〔問 15〕 $f(x) = x^2 - 2ax + 5a - 4$ とおくと　$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 5a - 4$

$y = f(x)$ のグラフは，頂点が $(a, -a^2 + 5a - 4)$ で下に凸の放物線であるから

$f(x) = 0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつための条件は



$$\begin{cases} a > 2 & \cdots ① \\ -a^2 + 5a - 4 < 0 & \cdots ② \\ f(2) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

② から　$a^2 - 5a + 4 > 0$

$(a-1)(a-4) > 0$

これを解いて　$a < 1,\ 4 < a$　$\cdots$④

③ から　$2^2 - 2a \cdot 2 + 5a - 4 > 0$

これを解いて　$a > 0$　$\cdots$⑤

①，④，⑤ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{4 < a}$

(答)

〔問 1〕	**〔問 2〕**	**〔問 3〕**	**〔問 4〕**	**〔問 5〕**
(2)	(5)	(5)	(1)	(2)
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
(3)	(4)	(5)	(2)	(3)
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
(4)	(2)	(3)	(2)	(5)