平成19年度　熊本労災看護専門学校　一般入学試験問題
数学I・数学A(平成19年1月25日)60分

〔問1〕 2次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+3\ (0 \leqq x \leqq 5)$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) 最大値　11　　最小値　1

(2) 最大値　11　　最小値　3

(3) 最大値　13　　最小値　0

(4) 最大値　19　　最小値　0

(5) 最大値　19　　最小値　3

〔問2〕 x 軸と $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，$(1,\ 8)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(1) $y=2x^2+2x-12$

(2) $y=2x^2-2x-12$

(3) $y=-2x^2-2x+12$

(4) $y=-2x^2+2x+12$

(5) $y=-2x^2-2x-12$

〔問3〕 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，x^4+y^4 の値を求めよ。

(1) 98

(2) 100

(3) 102

(4) 112

(5) 116

〔問4〕 2桁の自然数の中で，4でも6でも割り切れない数は何個あるか。

(1) 54

(2) 57

(3) 60

(4) 61

(5) 65

〔問 5〕 さいころを 5 個同時に投げるとき，4 より大きい目が 3 個出る確率を求めよ。

(1) $\dfrac{4}{243}$

(2) $\dfrac{40}{243}$

(3) $\dfrac{52}{243}$

(4) $\dfrac{35}{216}$

(5) $\dfrac{83}{216}$

〔問 6〕 $\triangle$ABC において，AB $=8$，BC $=5$，$\angle$B $=60^\circ$ のとき，AC の長さを求めよ。

(1) 3

(2) 5

(3) 6

(4) 7

(5) 9

〔問 7〕 $\begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ x^2-8x+15 \geqq 0 \end{cases}$ の連立不等式を解け。

(1) $3 \leqq x < 4$

(2) $4 < x \leqq 5$

(3) $2 < x \leqq 5$

(4) $2 \leqq x < 4$

(5) $2 < x \leqq 3$

〔問 8〕 6 人を区別しない 2 つの部屋に入れる方法は何通りあるか。ただしそれぞれの部屋には少なくとも 1 人は入るものとする。

(1) 31

(2) 32

(3) 44

(4) 62

(5) 64

〔問 9〕 $y = x^2 + (a+5)x + 4$ のグラフと x 軸と共有点をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1) $-9 < a < -1$

(2) $-9 \leqq a \leqq -1$

(3) $-1 < a < 9$

(4) $a \leqq -9,\ -1 \leqq a$

(5) $a < -9,\ -1 < a$

〔問 10〕 0，1，2，3，4，5 から異なる 4 つの数字を選んで 4 桁の整数を作る。そのうち，偶数になるものは何個あるか求めよ。

(1) 120

(2) 156

(3) 162

(4) 180

(5) 196

〔問 11〕 $\triangle$ABC において $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ とするとき $\cos A : \cos B : \cos C$ の比を求めよ。

(1) $11 : 7 : 13$

(2) $(-11) : 13 : 7$

(3) $13 : (-11) : 7$

(4) $11 : (-7) : 13$

(5) $13 : 11 : (-7)$

〔問 12〕 $x + y + z = 10$ を満たす 0 以上の整数解 x, y, z の総数を求めよ。

(1) 52

(2) 66

(3) 72

(4) 86

(5) 92

〔問 13〕 $y = 3x^2 - 4x + 7$ のグラフを原点に関して対称移動したグラフの方程式を求めよ。

(1) $y = -3x^2 - 4x - 7$

(2) $y = -3x^2 + 4x + 7$

(3) $y = -3x^2 - 4x + 7$

(4) $y = 3x^2 + 4x - 7$

(5) $y = 3x^2 + 4x + 7$

〔問 14〕 男子 5 人，女子 3 人が 1 列に並ぶとき，女子同士が隣り合わない確率を求めよ。

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{5}{7}$

(3) $\frac{5}{14}$

(4) $\frac{3}{28}$

(5) $\frac{5}{28}$

〔問 15〕 周の長さが 42cm で面積が 80cm^2 以上の長方形を作るには，長方形の 1 辺の長さをどのような範囲にすればよいか求めよ。

(1) 2cm より大きく 4cm 未満

(2) 2cm 以上 4cm 以下

(3) 5cm より大きく 16cm 未満

(4) 5cm 以上 16cm 以下

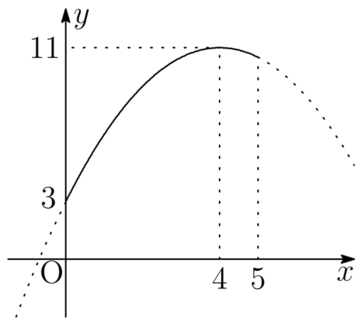
(5) 8cm 以上 10cm 以下

解答例

〔問 1〕 式を変形すると

$$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+11$$

$0 \leqq x \leqq 5$ であるから，
$x=4$ で**最大値 11** をとり，
$x=0$ で**最小値 3** をとる．



〔問 2〕 グラフは x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+3)(x-2)$$

と表される．そのグラフが点 $(1,\ 8)$ を通るから

$$8=a(1+3)(1-2) \qquad \text{これを解くと} \qquad a=-2$$

よって　$y=-2(x+3)(x-2)$

したがって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-2x^2-2x+12}$

〔問 3〕

$$x+y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=2\sqrt{3}$$

$$xy=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$$

であるから

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 1=10$$

ゆえに　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=10^2-2\cdot 1^2=\mathbf{98}$

〔問 4〕 2 桁の自然数全体の集合を U，4 で割り切れる数全体の集合を A，6 で割り切れる数全体の集合を B とすると

$$A=\{4\cdot 3,\ 4\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \cdots,\ 4\cdot 24\}$$

$$B=\{6\cdot 2,\ 6\cdot 3,\ 6\cdot 4,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$$

$$A\cap B=\{12\cdot 1,\ 12\cdot 2,\ 12\cdot 3,\ \cdots,\ 12\cdot 8\}$$

よって　$n(A)=22$，$n(B)=15$，$n(A\cap B)=8$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+15-8=29$

求める個数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ であるから

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B)=90-29=\mathbf{61}\ (\text{個}) \end{aligned}$$

〔問 5〕さいころを 1 回投げるとき，4 より大きい目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
よって，5 個投げて 4 より大きい目が 3 個出る確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-3}=10\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{40}{243}} $$

〔問 6〕余弦定理により

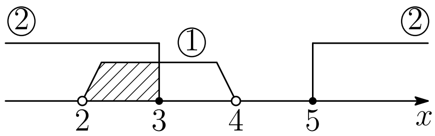
$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B\\&=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos60^\circ\\&=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}\\&=49\end{aligned}$$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　　$\mathbf{AC=7}$

〔問 7〕$\begin{cases}x^2-6x+8<0\\x^2-8x+15\geqq0\end{cases}$

第 1 式から　　$(x-2)(x-4)<0$
これを解くと　　$2<x<4$　$\cdots$①
第 2 式から　　$(x-3)(x-5)\geqq0$
これを解くと　　$x\leqq3,\ 5\leqq x$　$\cdots$②
① と ② の共通範囲を求めて

$\boldsymbol{2<x\leqq3}$



〔問 8〕6 人を 2 つの部屋 A，B に入れる方法は　$2^6=64$
A だけに入る場合と B だけに入る場合を除いて　$64-2=62$
よって，A と B の区別をなくして　　$\dfrac{62}{2!}=\mathbf{31}$ (通り)

〔問 9〕グラフが x 軸と共有点をもつとき，係数について

$(a+5)^2-4\cdot1\cdot4\geqq0$

整理して　　$a^2+10a+9\geqq0$
ゆえに　　$(a+1)(a+9)\geqq0$
よって　　$\boldsymbol{a\leqq-9,\ -1\leqq a}$

〔問 10〕 偶数となるのは，一の位が 0，2，4 の場合である．

［1］<u>1 の位が 0 になる数</u>
他の位には，残りの 5 個の数字から 3 個とって並べるから，
その総数は ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ (個)

［2］<u>1 の位が 2，4 になる数</u>
千の位には，0 以外の 4 通り，百の位と十の位は残りの 4 個の数字から 2 個とって並べるから，その総数は $2 \times 4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 96$ (個)

［1］，［2］より，偶数の個数の総数は　$60 + 96 = \mathbf{156}$ (個)

〔問 11〕 正弦定理により $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ であるから，$a : b : c = 3 : 5 : 7$
よって，正の数 k を用いて，$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$ とおくと

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (7k)^2 - (3k)^2}{2{\cdot}5k{\cdot}7k} = \frac{65k^2}{70k^2} = \frac{13}{14}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(7k)^2 + (3k)^2 - (5k)^2}{2{\cdot}7k{\cdot}3k} = \frac{33k^2}{42k^2} = \frac{11}{14}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2{\cdot}3k{\cdot}5k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\cos A : \cos B : \cos C = \frac{13}{14} : \frac{11}{14} : -\frac{1}{2} = \mathbf{13 : 11 : (-7)}$

〔問 12〕 異なる 3 種類のものから，重複を許して 10 個とる組合せの総数であるから

$$ {}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \mathbf{66} \quad (\text{組}) $$

［例］ チョコ，バニラ，メロンの 3 種類のアイスクリームがたくさんある．これらの中から 5 個のアイスクリームを選ぶとき，何通りの選び方があるか．ただし，含まないアイスクリームがあってもよいものとする．

考え方　2 つの仕切り (|) があれば，3 種類のアイスクリームに分けることができるので，仕切りの左側をチョコ，仕切りと仕切りの間をバニラ，仕切りの右側をメロンとする．たとえば

〇 | 〇〇 | 〇〇　は　チョコ 1 個，バニラ 2 個，メロン 2 個
〇〇〇〇 | | 〇　は　チョコ 4 個，バニラ 0 個，メロン 1 個
〇〇 | 〇〇〇 |　は　チョコ 2 個，バニラ 3 個，メロン 0 個

このように考えると，2 つの | と 5 つの〇の配列の仕方の総数が 3 種類のアイスクリーム 5 個の選び方の総数である．これは同じものを含む順列で，$7 = (3-1)+5$ 個の場所から 5 個の〇の場所を選ぶ組合せの数で

$$ {}_{(3-1)+5}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21 \ (\text{通り}) $$

　一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個を取る組合せの数は，上と同じ考えで，$n-1$ 個の仕切り | と r 個〇の順列の数で，$(n-1)+r$ 個の場所から，r 個の〇の場所を選ぶことであるから

$$ {}_{(n-1)+r}\mathrm{C}_r \quad \text{すなわち} \quad {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

である．このような組合せを**重複組合せ**といい，その数を $\boldsymbol{{}_n\mathrm{H}_r}$ で表す．

重複組合せ

異なる n 個のものから，**重複を許して** r 個とる組合せの数は

$$ \boldsymbol{{}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r} \qquad (\boldsymbol{n < r} \ \textbf{でもよい}) $$

$x+y+z=n$ $(n \geqq 0)$ の負でない整数解の個数は

$$ {}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} $$

〔問 13〕 原点に関する対称移動後のグラフの方程式は

$$-y = 3(-x)^2 - 4(-x) + 7 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -3x^2 - 4x - 7}$$

対称移動

$y = f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動後の方程式は

x 軸 : $-y = f(x)$　　**y 軸 : $y = f(-x)$**　　**原点 : $-y = f(-x)$**

〔問 14〕 男子 5 人と女子 3 人が 1 列に並ぶ方法は　8! (通り)

まず，男子 5 人が 1 列に並ぶ方法は　5! (通り)

6 か所 ($|$) に女子 3 人が 1 人ずつ並ぶ方法は　　| 男 | 男 | 男 | 男 | 男 |

$\quad {}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

よって，女子同士が隣り合わない並び方は　$5! \times {}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

したがって，求める確率は　$\dfrac{5! \times {}_6\mathrm{P}_3}{8!} = \boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$

〔問 15〕 1 辺の長さを x cm とすると，他方の辺の長さは $(21-x)$cm である.

$x > 0$ かつ $21 - x > 0$ から　$0 < x < 21$　$\cdots$①

長方形の面積が 80cm^2 以上であるから

$$x(21-x) \geqq 80$$

整理すると　$x^2 - 21x + 80 \leqq 0$

① に注意して　$\boldsymbol{5 \leqq x \leqq 16}$

(答)

〔問 1〕	**〔問 2〕**	**〔問 3〕**	**〔問 4〕**	**〔問 5〕**
(2)	(3)	(1)	(4)	(2)
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
(4)	(5)	(1)	(4)	(2)
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
(5)	(2)	(1)	(3)	(4)