平成１８年度　熊本労災看護専門学校　一般入学試験問題
数学I・数学A(平成18年1月26日)60分

〔問1〕 2次方程式 $x^2+2kx+2k-1=0$ が重解をもつように定数 k の値と重解を求めよ.

(1) $k=1,\ x=-1$

(2) $k=1,\ x=1$

(3) $k=-1,\ x=-1$

(4) $k=-1,\ x=1$

(5) $k=\pm1,\ x=-1$

〔問2〕 軸が $x=3$ で，2点 $(0,\ 13)$，$(5,\ 8)$ を通る放物線の方程式を求めよ.

(1) $y=x^2+6x+13$

(2) $y=x^2-6x+13$

(3) $y=x^2-6x-13$

(4) $y=2x^2+6x+13$

(5) $y=2x^2-6x+13$

〔問3〕 連立不等式 $\begin{cases} 6x-5 \leqq 4x+9 \\ x+9 \leqq 4x+3 \end{cases}$ を解け.

(1) $x \geqq 7,\ x \leqq 2$

(2) $x \geqq 7,\ x \leqq -2$

(3) $x \leqq -7,\ x \geqq 2$

(4) $-2 \leqq x \leqq 7$

(5) $2 \leqq x \leqq 7$

〔問4〕 2次不等式 $-3x^2+ax+b>0$ の x の範囲が $1<x<3$ であるとき，定数 a, b を求めよ.

(1) $a=12,\ b=-9$

(2) $a=12,\ b=9$

(3) $a=-12,\ b=-9$

(4) $a=-12,\ b=9$

(5) $a=-4,\ b=3$

〔問 5〕 2 次関数 $y = 2x^2 + ax + 5$ の最小値が 3 のとき，定数 a の値をすべて求めよ.

(1) $a = \pm 4$

(2) $a = 4$

(3) $a = -4$

(4) $a = \pm 2$

(5) $a = \pm 3$

〔問 6〕 $x + y = 3$，$xy = 1$ のとき，$x^5 + y^5$ の値を求めよ.

(1) 168

(2) 123

(3) 165

(4) 158

(5) 162

〔問 7〕 $(3x - 2y)^5$ の展開式において，x^3y^2 の項の係数を求めよ.

(1) 108

(2) 216

(3) 540

(4) 1080

(5) 2160

〔問 8〕 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\sin^3\theta - \cos^3\theta$ の値を求めよ.

(1) $2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

〔問 9〕 θ が鋭角で $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin(180^\circ - \theta)$ の値を求めよ．

(1) $-\dfrac{5}{12}$

(2) $-\dfrac{5}{13}$

(3) $-\dfrac{12}{13}$

(4) $\dfrac{5}{12}$

(5) $\dfrac{5}{13}$

〔問 10〕 $\triangle$ABC において，AB $= 8$，AC $= 5$，$\angle$A $= 60^\circ$ のとき，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ．

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

(3) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(5) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

〔問 11〕 1 から 100 までの整数で約数が 3 個のものをすべて合計したものをものを求めよ．

(1) 87

(2) 88

(3) 184

(4) 385

(5) 770

〔問 12〕 a，b，c，d の 4 個のお菓子すべてを A，B，C の 3 人の子供に分けるとき，お菓子をもらわない子供がいないように分ける場合の分け方は何通りあるか求めよ．

(1) 81

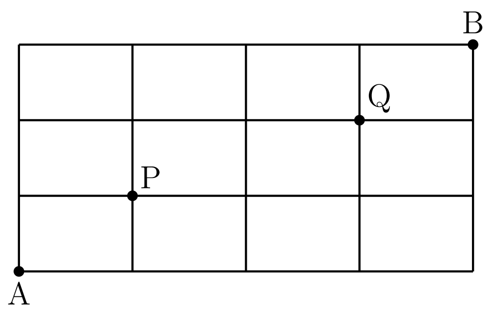
(2) 42

(3) 36

(4) 18

(5) 16

〔問 13〕 A から B への最短経路の中で，P または Q を通るのは，何通りか求めよ．



(1) 40

(2) 28

(3) 20

(4) 18

(5) 12

〔問 14〕 事象 A，B に対して，$P(A)=\dfrac{1}{6}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{2}{5}$ のとき，A と B がともに起こる確率を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{5}$

(3) $\dfrac{2}{5}$

(4) $\dfrac{1}{10}$

(5) $\dfrac{9}{10}$

〔問 15〕 100 円硬貨を 5 回投げるとき，少なくとも 2 回表が出る確率を求めよ.

(1) $\frac{13}{16}$

(2) $\frac{31}{32}$

(3) $\frac{27}{32}$

(4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{25}{32}$

解答例

〔問 1〕 重解をもつための条件は，係数について

$$\begin{aligned}(2k)^2-4{\cdot}1(2k-1)&=0\\4k^2-8k+4&=0\\k^2-2k+1&=0\end{aligned}$$

これを解いて　$\boldsymbol{k=1}$

重解は　$x=-\dfrac{2k}{2{\cdot}1}=-k$　したがって　$\boldsymbol{x=-1}$

〔問 2〕 直線 $x=3$ を軸とするから，求める放物線の方程式は

$$y=a(x-3)^2+q$$

とおける．この放物線が 2 点 $(0,\ 13)$，$(5,\ 8)$ を通るから

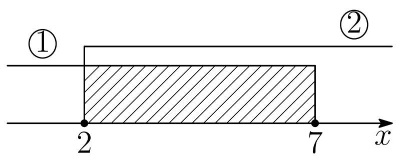
$9a+q=13$，$4a+q=8$　　これを解くと　$a=1$，$q=4$

よって　　$y=(x-3)^2+4$　すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-6x+13}$

〔問 3〕 $6x-5\leqq 4x+9$ から　$x\leqq 7$　$\cdots$①

$x+9\leqq 4x+3$ から　$x\geqq 2$　$\cdots$②

① と ② の共通部分を求めて　$\boldsymbol{2\leqq x\leqq 7}$



〔問 4〕 $1<x<3\cdots$① を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x-1)(x-3)<0$　すなわち　$x^2-4x+3<0$

① を解とする 2 次不等式で，x^2 の係数が -3 であるものは

$$-3x^2+12x-9>0$$

したがって，$\boldsymbol{a=12}$，$\boldsymbol{b=-9}$

〔問 5〕 2 次関数 $y=2x^2+ax+5$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}2x^2+ax+5&=2\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+5\\&=2\left\{\left(x+\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2\right\}+5\\&=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+5\end{aligned}$$

この関数の最小値が 3 であるから

$-\dfrac{a^2}{8}+5=3$　　これを解いて　$\boldsymbol{a=\pm 4}$

〔問 6〕 $$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2{\cdot}1=7$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3{\cdot}1{\cdot}3=18$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(x^3+y^3)&=7\times 18\\ x^5+y^5+(xy)^2(x+y)&=126\\ x^5+y^5+1^2\times 3&=126\\ \boldsymbol{x^5+y^5}&\boldsymbol{=123}\end{aligned}$$

〔問 7〕 $(3x-2y)^5$ の展開式の一般項

$${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(-2y)^r={}_5\mathrm{C}_r3^{5-r}(-2)^rx^{5-r}y^r$$

において $r=2$ として　${}_5\mathrm{C}_2 3^3(-2)^2=\mathbf{1080}$

〔問 8〕 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=2$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$$\begin{aligned}\sin^3\theta-\cos^3\theta&=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\\&=\sqrt{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

〔問 9〕 $$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

したがって　$\sin(180^\circ-\theta)=\boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$

〔問 10〕 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 5^2 + 8^2 - 2{\cdot}5{\cdot}8\cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 2{\cdot}5{\cdot}8{\cdot}\frac{1}{2} = 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$a = 7$

正弦定理により　　$2R = \dfrac{a}{\sin A}$

したがって　　$R = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{\sin 60^\circ}$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

〔問 11〕 約数の個数が 3 個である数は合成数 (素数でない数) であり，3 個以上の素数の積は約数の個数が 3 個を越える．したがって，約数の個数が 3 個である数は 2 個の素数の積であることが必要条件である．

a，b を素数とすると，合成数 ab の約数の個数は次のとおりである．

［1］ $a \neq b$ のとき
　ab は 1，a，b，ab の 4 個の約数をもつ．

［2］ $a = b$ のとき
　すなわち，a^2 は 1，a，a^2 の 3 個の約数をもつ．

1 から 100 までの整数で約数が 3 個ある合成数は 2^2，3^2，5^2，7^2 であり，

これらの和は　　$2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = \mathbf{87}$

〔問 12〕 1 人だけ 2 個もらい，他の 2 人は 1 個ずつもらう場合である．

A が 2 個もらう場合は　　${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 12$ (通り)

B，C がそれぞれ 2 個もらう場合も同様であるから

$$12 \times 3 = \mathbf{36} \ \text{(通り)}$$

〔問 13〕 P を通る行き方は　$\dfrac{2!}{1!1!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = 20$　(通り)

Q を通る行き方は　$\dfrac{5!}{3!2!} \times \dfrac{2!}{1!1!} = 20$　(通り)

P，Q をともに通る行き方は　$\dfrac{2!}{1!1!} \times \dfrac{3!}{2!1!} \times \dfrac{2!}{1!1!} = 12$　(通り)

よって，P または Q を通る行き方は　$20 + 20 - 12 = \mathbf{28}$　(通り)

〔問 14〕 A と B がともに起こる確率は　$P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ であるから

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

したがって　$P(A \cap B) = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

〔問 15〕 5 回とも裏が出る確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$

1 回だけ表が出る確率は　${}_5\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{32}$

したがって，少なくとも 2 回表が出る確率は

$$1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32}\right) = \mathbf{\frac{13}{16}}$$

(答)

〔問 1〕	〔問 2〕	〔問 3〕	〔問 4〕	〔問 5〕
(1)	(2)	(5)	(1)	(1)
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
(2)	(4)	(4)	(5)	(2)
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
(1)	(3)	(2)	(4)	(1)