平成21年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部・夜間部一般前期入学試験 (数学 I・A) 平成20年12月20日

[A] x の方程式 $x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$ について考える。
$x=0$ は解ではなく，$X=x+\dfrac{2}{x}$ についての2次方程式に直すと
$X^2-aX+b=0$ となる。ここで $a=$ $\boxed{\text{問1}}$，$b=$ $\boxed{\text{問2}}$ である。
よって，もとの4次方程式は異なる実数解を全部で $\boxed{\text{問3}}$ 個もつことがわかり，その和は $\boxed{\text{問4}}$ である。

問1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	0	1	2	3	4

問4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

[B] 実数 x について 2 つの不等式 $|x-6|<3 \cdots$ ①，$|x-k|<5 \cdots$ ② を考える。
①，② をともに満たす x が存在するような定数 k の範囲は

$\boxed{\text{問 5}} < k < \boxed{\text{問 6}}$ であり，

①，② をともに満たす整数 x がちょうど 3 個であるような定数 k の範囲は

$\boxed{\text{問 7}} < k \leqq \boxed{\text{問 8}}$ または $\boxed{\text{問 9}} \leqq k < \boxed{\text{問 10}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 5	-10	-8	-6	-4	-2	0

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 6	4	6	8	10	12	14

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	0	1	2	3	4	5

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	10	11	12	13	14	15

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	11	12	13	14	15	16

[C] 四角形 ABCD が，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$，$\mathrm{DA}=2$，$\angle\mathrm{A}=30^\circ$，$\angle\mathrm{B}=165^\circ$，$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ をみたす。このとき，$\mathrm{BD}=$ $\boxed{問 11}$，$\angle\mathrm{ABD}=$ $\boxed{問 12}$，四角形 ABCD の面積は $\boxed{問 13}$ である。

問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}+1$

問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	75°	90°	105°	120°	135°	150°

問 13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{2\sqrt{3}-2}{4}$	$\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{2}-1}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{3}-2}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{3}-1}{4}$

[D] 2 次関数 $y=-x^2+6x-5$ $(1\leqq x\leqq 4)$ のグラフにおいて，$x=1,\ 4$ に対応する点をそれぞれ A，B とし，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がこの曲線上を動くものとする。
$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が 3 であるような p は $\boxed{問 14}$ または $\boxed{問 15}$ であり，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が最大となる p は $\boxed{問 16}$ である。
また，$\triangle\mathrm{PAB}$ が $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ の二等辺三角形であるとき，q は $\boxed{問 17}$ である。

問 14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{7}{4}$	2	$\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{5}{2}$

問 15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{11}{4}$	3	$\dfrac{13}{4}$	$\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{15}{4}$

問 16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{7}{4}$	2	$\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{5}{2}$

問 17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{19}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

[E] 赤，青，白のカードがそれぞれ5枚ずつあり，各色のカードには1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれている。この15枚の中から3枚のカードを選ぶ。このとき，カードの色に関係なく連続した数字のカードからなる3枚の選び方は 問18 通り，カードの数字に関係なく同じ色のカードからなる3枚の選び方は 問19 通りである。また，3枚のうち2枚だけが同じ数字になる選び方は 問20 通りである。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問18	9	15	27	45	81	135

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問19	10	15	30	45	60	75

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問20	120	150	180	210	240	270

[F] サイコロをふり，1または2の目が出たら勝ち，それ以外の目が出たら負け，というゲームをする。このとき，3回目に初めて勝つ確率は 問21 ，3回投げて2勝1敗となる確率は 問22 である。また，勝ちまたは負けが3回になるまでゲームを続けるとき，4回でも終わらない確率は 問23 ，4回目で終了する確率は 問24 である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問21	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{9}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問22	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{9}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問23	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{9}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問24	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{4}{9}$

解答例

[A] $x^4-4x^3+7x^2-8x+4=0$ について，$x \neq 0$ より両辺を x^2 で割ると

$$x^2-4x+7-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{4}{x^2}-4\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0$$

$x+\dfrac{2}{x}=X$，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-4=X^2-4$ であるから

$$(X^2-4)-4X+7=0 \quad \text{すなわち} \quad X^2-\mathbf{4}X+\mathbf{3}=0$$

これを解いて　$X=1,3$

$$x+\frac{2}{x}=1 \quad \text{すなわち} \quad x^2-x+2=0 \text{ は実数解をもたない}$$
$$x+\frac{2}{x}=3 \quad \text{すなわち} \quad x^2-3x+2=0 \text{ の解は} \quad x=1,\ 2$$

よって，もとの 4 次方程式は異なる実数解を **2** 個もち，

その和は　　$1+2=\mathbf{3}$

(答) 問 1 [5]　問 2 [4]　問 3 [3]　問 4 [4]

[B] $|x-6|<3 \cdots$ ① を解いて　$3<x<9$

$|x-k|<5 \cdots$ ② を解いて　$k-5<x<k+5$

①，② をともに満たす x が存在するとき (図 1)

$3<k+5$　かつ　$k-5<9$　これを解いて　$\boldsymbol{-2<k<14}$

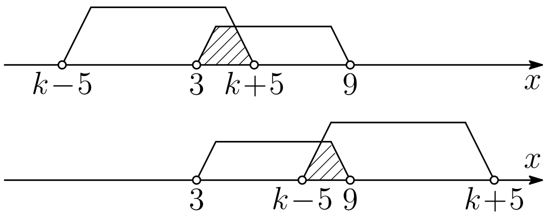


図 1: ともに満たす x が存在する

①，② をともに満たす整数 x がちょうど 3 個存在するとき

それらの整数は $\{4,\ 5,\ 6\}$ または $\{6,\ 7,\ 8\}$ であるから (図 2)

$6<k+5 \leqq 7$　または　$5 \leqq k-5<6$

ゆえに　$\boldsymbol{1<k \leqq 2}$　**または**　$\boldsymbol{10 \leqq k<11}$

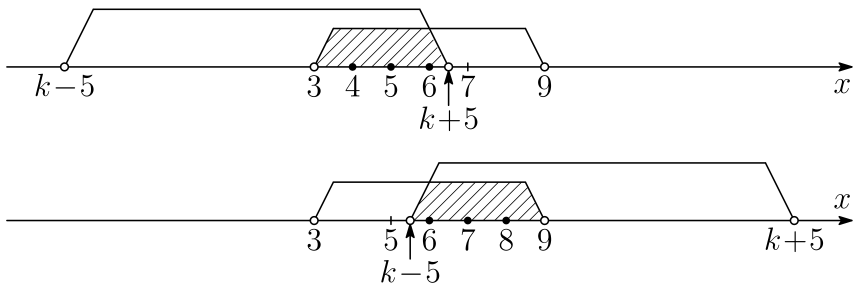
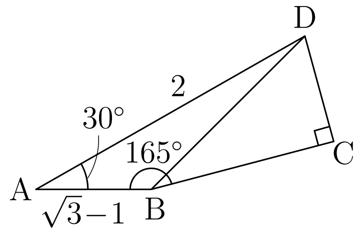


図 2: ともに満たす整数 x がちょうど 3 個存在する

(答) 問 5 [5]　問 6 [6]　問 7 [2]　問 8 [2]　問 7 [1]　問 8 [1]

[C] $\triangle$DAB に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{DA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\ &= 2^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cos 30^\circ\\ &= 4+(4-2\sqrt{3})-2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 2\end{aligned}$$

BD >0 であるから　$\mathbf{BD}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

また　$\cos\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-\mathrm{DA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABD}=135^\circ}$

$\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{B}-\angle\mathrm{ABD}=165^\circ-135^\circ=30^\circ$ であるから

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}\cos\angle\mathrm{DBC}=\sqrt{2}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathrm{CD}=\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{DBC}=\sqrt{2}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

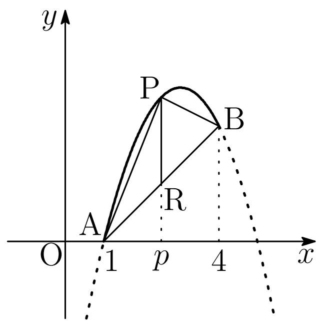
よって，四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\sin A+\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}-1)\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}-2}{4}}\end{aligned}$$

(答) 問 11 [3]　問 12 [5]　問 13 [5]

[D] 放物線 $y=-x^2+6x-5$ の $x=1,\ 4,\ p$ に対応する点が A，B，P であるから

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(4,\ 3),$$
$$q=-p^2+6p-5 \quad \cdots ①$$



2 点 A，B を通る直線の方程式は

$$y=x-1$$

$x=p$ に対応する直線上の点を R をとすると

$$\mathrm{R}(p,\ p-1)$$

ゆえに，PR の長さは

$$\mathrm{PR}=(-p^2+6p-5)-(p-1)=-p^2+5p-4$$

したがって，△PAB の面積は

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\times(4-1)=\frac{3}{2}(-p^2+5p-4) \quad \cdots ②$$

△PAB の面積が 3 であるとき

$$\frac{3}{2}(-p^2+5p-4)=3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{p=2,\ 3}$$

② から　$\triangle\mathrm{PAB}=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{27}{8}$

よって，△PAB の面積が最大となる p は　$\boldsymbol{p=\dfrac{5}{2}}$

また，PA = PB のとき，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2$ であるから

$$(p-1)^2+q^2=(p-4)^2+(q-3)^2$$

整理して　$q=-p+4 \quad \cdots ③$

①，③ から，q を消去すると　$p^2-7p+9=0$

$1\leqq p\leqq 4$ に注意して解くと　$p=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$

これを ③ に代入して　$\boldsymbol{q=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}}$

(答) 問 14 [4]　問 15 [3]　問 16 [6]　問 17 [2]

[E] (カードの色に関係なく連続した数字からなる 3 枚の選び方)

連続した数字の組合せは $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$ の 3 通りであり，

その各々の数字について，カードの色の選び方は 3^3 通りある．

よって，積の法則により　$3 \times 3^3 = 3 \times 27 = \mathbf{81}$ (通り)

(カードの数字に関係なく同じ色のカードからなる 3 枚の選び方)

同じ色のカードの選び方は，赤，青，白の 3 通りであり，

その各々の色について，カードの数字の選び方は ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りある．

よって，積の法則により　$3 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 3 \times 10 = \mathbf{30}$ (通り)

(3 枚のうち 2 枚だけが同じ数字なる選び方)

2 枚だけが同じ数字なる選び方は　${}_5\mathrm{P}_2 = 20$ (通り)

その各々について，カードの色の選び方は　${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 3 \times 3 = 9$ (通り)

よって，積の法則により　$20 \times 9 = \mathbf{180}$ (通り)

(答) 問 18 [5]　問 19 [3]　問 20 [3]

[F] (3 回目で初めて勝つ確率)

順番に負，負，勝となる確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{27}}$$

(3 回投げて 2 勝 1 敗となる確率)

$${}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

［勝ちまたは負けが 3 回になるまでゲームを続けるとき］

(4 回でも終わらない確率)

4 回投げて 2 勝 2 敗となる確率であるから

$${}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{8}{27}}$$

(4 回目で終了する確率)

3 回目まで 2 勝 1 で 4 回目に勝つか，3 回目までに 1 勝 2 敗で 4 回目に負ける確率であるから

$${}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{10}{27}}$$

(答) 問 21 [2]　問 22 [3]　問 23 [4]　問 24 [5]