平成21年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部・夜間部一般後期入学試験 (数学I・A) 平成21年2月8日

[A] x の方程式 $x^4-6x^3-x^2+18x+9=0$ について考える。

$x=0$ は解ではなく，$X=x-\dfrac{3}{x}$ についての2次方程式に直すと

$X^2-aX+b=0$ となる。ここで，$a=\boxed{\text{問1}}$，$b=\boxed{\text{問2}}$ である。

よって，もとの4次方程式は異なる実数解を全部で $\boxed{\text{問3}}$ 個もつことがわかり，そのどれよりも大きい最小の整数は $\boxed{\text{問4}}$ である。

問1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	0	1	2	3	4

問4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

[B] x, y の連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=11 \\ x+y-xy=9 \end{cases}$ について考える。

$(x+y,\ xy)=(-\boxed{問5},\ -\boxed{問6})$

または $(\boxed{問7},\ -\boxed{問8})$ であり，異なる解の組 $(x,\ y)$ は全部で $\boxed{問9}$ 組存在，そのうち x が最小のものと最大のものは，それぞれ順に

$(x,\ y)=(-\boxed{問10},\ \boxed{問11})$，$(x,\ y)=(\boxed{問12},-\boxed{問13})$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問5	3	5	7	9	11	13

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問6	4	6	8	10	12	14

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問7	4	6	8	10	12	14

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問8	3	5	7	9	11	13

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問9	2	4	6	8	10	12

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問10	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問11	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問12	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問13	1	2	3	4	5	6

[C] 四角形 ABCD が，$\mathrm{AB} = 9$，$\mathrm{BC} = 10$，$\mathrm{CD} = 6$，$\mathrm{DA} = 5$，$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ をみたす。このとき，$\mathrm{AC} =$ $\boxed{\text{問 14}}$，$\angle\mathrm{ADC} =$ $\boxed{\text{問 15}}$，$\cos\angle\mathrm{BAD} =$ $\boxed{\text{問 16}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	$\sqrt{71}$	9	$\sqrt{91}$	$\sqrt{101}$	$\sqrt{111}$	11

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 15	75°	90°	105°	120°	135°	150°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 16	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$

[D] 正の実数 p に対し，$f(x) = p^2|(x+1)(x-1)| + p|x|$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ とする。

$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき，$-2 \leqq x \leqq -1$ での $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{問 17}}$，

$-1 \leqq x \leqq 1$ での $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{問 18}}$ である。

$\dfrac{1}{2} \leqq p$ のとき，$-2 \leqq x \leqq -1$ での $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{問 19}}$，

$-1 \leqq x \leqq 1$ での $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{問 20}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 17	0	$\frac{1}{2p}$	p	p^2	$p^2 + \frac{1}{4}$	$3p^2 + 2p$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 18	0	$\frac{1}{2p}$	p	p^2	$p^2 + \frac{1}{4}$	$3p^2 + 2p$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	0	$\frac{1}{2p}$	p	p^2	$p^2 + \frac{1}{4}$	$3p^2 + 2p$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	0	$\frac{1}{2p}$	p	p^2	$p^2 + \frac{1}{4}$	$3p^2 + 2p$

[E] 小学生 2 人，中学生 2 人，高校生 3 人の 7 人が一列に並ぶ。このとき，高校生の 3 人が隣り合う並び方は $\boxed{\text{問 21}}$ 通り，小学生の 2 人，中学生の 2 人，高校生の 3 人がそれぞれ隣り合う並び方は $\boxed{\text{問 22}}$ 通りである。また，両端に高校生が並ぶ並び方は $\boxed{\text{問 23}}$ 通りである。

問 21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	72	144	288	360	720	1440

問 22	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	72	144	288	360	720	1440

問 23	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	72	144	288	360	720	1440

[F] 赤球，青球，白球が 1 つずつ入った袋が 5 つある。各々の袋から球を 1 つずつ取り出し，計 5 個の球を取り出すものとする。このとき，赤球 1 つ，青球 2 つ，白球 2 つ取り出す確率は $\boxed{\text{問 24}}$ であり，赤球を 1 つも取り出さない確率は $\boxed{\text{問 25}}$ である。また，取り出す赤球の個数の期待値は $\boxed{\text{問 26}}$ である。

問 24	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{5}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{10}{27}$

問 25	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{8}{243}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$

問 26	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{10}{9}$	$\frac{35}{27}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{27}$	$\frac{20}{9}$

解答例

[A] $x^4-6x^3-x^2+18x+9=0$ について，$x \neq 0$ より両辺を x^2 で割ると

$$x^2-6x-1+\frac{18}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{9}{x^2}-6\left(x-\frac{3}{x}\right)-1=0$$

$x-\dfrac{3}{x}=X$，$x^2+\dfrac{9}{x^2}=\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^2+6=X^2+6$ であるから

$$(X^2+6)-6X-1=0 \quad \text{すなわち} \quad X^2-\mathbf{6}X+\mathbf{5}=0$$

これを解いて　$X=1, 5$

$$x-\frac{3}{x}=1 \quad \text{すなわち} \quad x^2-x-3=0 \text{ の解は} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$
$$x-\frac{3}{x}=5 \quad \text{すなわち} \quad x^2-5x-3=0 \text{ の解は} \quad x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$$

よって，もとの 4 次方程式は，異なる実数解を全部で **4** 個もつ

この方程式の最大の解は $\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$，$\sqrt{36}<\sqrt{37}<\sqrt{49}$ であるから

$$\frac{11}{2}=\frac{5+\sqrt{36}}{2}<\frac{5+\sqrt{37}}{2}<\frac{5+\sqrt{49}}{2}=6$$

したがって，この方程式の実数解のどれよりも大きい最小の整数は **6** である.

(答) 問 1 [6]　問 2 [5]　問 3 [5]　問 4 [3]

[B] $x^2+y^2+3xy=(x+y)^2+xy$ であるから，$x+y=p$，$xy=q$ とおくと

$$\begin{cases} p^2+q=11 \\ p-q=9 \end{cases}$$

q を消去して整理すると　$p^2+p-20=0$

これを解いて　　　$p=-5,\ 4$
ゆえに　　　$(p,\ q)=\boldsymbol{(-5,-14),\ (4,-5)}$

x，y を解とする 2 次方程式は，$t^2-pt+q=0$ であるから

$t^2-(-5)t-14=0$　を解いて　$(x,\ y)=(-7,\ 2),\ (2,-7)$
$t^2-4t-5=0$　　を解いて　$(x,\ y)=(-1,\ 5),\ (5,-1)$

よって，異なる解の組 $(x,\ y)$ は全部で **4** 組存在，そのうち x が最小のものと最大のものは，それぞれ順に $(x,\ y)=\boldsymbol{(-7,\ 2)}$，$(x,\ y)=\boldsymbol{(5,-1)}$ である．

(答) 問 5 [2]　問 6 [6]　問 7 [1]　問 8 [2]　問 9 [2]　問 10 [4]　問 11 [2]
問 12 [2]　問 13 [1]

x，y を解とする t の 2 次方程式は

$(t-x)(t-y)=0$　ゆえに　$t^2-(x+y)t+xy=0$

$x+y=p$，$xy=q$ とおくと　$\boldsymbol{t^2-pt+q=0}$

[C] $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B\\ &= 9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cos 60^\circ\\ &= 91\end{aligned}$$

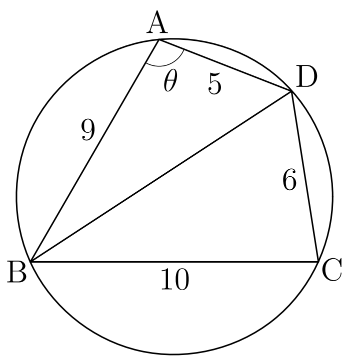
$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathbf{AC}=\boldsymbol{\sqrt{91}}$

$\triangle$ADC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\frac{\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}}=\frac{6^2+5^2-(\sqrt{91})^2}{2\cdot 6\cdot 5}=-\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\angle}\mathbf{ADC}=\mathbf{120^\circ}$

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$ であるから，四角形 ABCD は円に内接する．ゆえに，$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\theta$ となる．



$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 9^2+5^2-2\cdot 9\cdot 5\cos\theta\\ &= 106-90\cos\theta\end{aligned}$$

$\triangle$BCD に余弦定理を適用すると

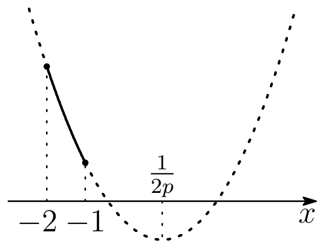
$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 10^2+6^2-2\cdot 10\cdot 6\cos(180-\theta)\\ &= 136-120(-\cos\theta)\\ &= 136+120\cos\theta\end{aligned}$$

よって　$106-90\cos\theta=136+120\cos\theta$　これを解いて　$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{1}{7}}$

(答) 問 14 [3]　問 15 [4]　問 16 [1]

[D] <u>$-2 \leqq x \leqq -1$ において</u>

$(x+1)(x-1) \geqq 0$，$x \leqq 0$ であるから



$$\begin{aligned} f(x) &= p^2|(x+1)(x-1)| + p|x| \\ &= p^2(x+1)(x-1) + p(-x) \\ &= p^2x^2 - px - p^2 \\ &= p^2\left(x - \frac{1}{2p}\right)^2 - p^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$p > 0$ より $\dfrac{1}{2p} > 0$ であるから，最大値 $f(-2) = \boldsymbol{3p^2 + 2p}$

<u>$-1 \leqq x \leqq 1$ において</u>

$f(x) = p^2|x^2 - 1| + p|x|$ であるから $f(-x) = f(x)$ が成り立つ．

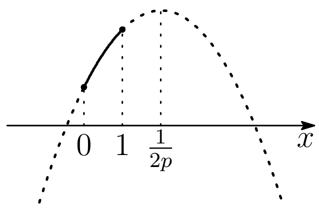
ゆえに $0 \leqq x \leqq 1$ での $f(x)$ の最大値を求めればよい．

$0 \leqq x \leqq 1$ において

$x^2 - 1 \leqq 0$，$x \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= p^2(-x^2+1) + px \\ &= -p^2x^2 + px + p^2 \\ &= -p^2\left(x - \frac{1}{2p}\right)^2 + p^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

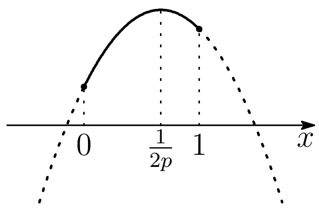
$\boxed{0 < p < \frac{1}{2} \text{ のとき}}$



$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 < \dfrac{1}{2p}$ であるから

最大値 $f(1) = \boldsymbol{p}$

$\boxed{\frac{1}{2} \leqq p \text{ のとき}}$



$\dfrac{1}{2} \leqq p$ のとき，$0 < \dfrac{1}{2p} \leqq 1$ であるから

最大値 $f\left(\frac{1}{2p}\right) = \boldsymbol{p^2 + \frac{1}{4}}$

(答) 問 17 [6]　問 18 [3]　問 19 [6]　問 20 [5]

[E] (高校生 3 人が隣り合う並び方)

高校生ひとまとめと残り 4 人の並び方は　$5!$ (通り)

高校生 3 人が隣り合う並び方は　$3!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は，積の法則により

$$5! \times 3! = \mathbf{720} \text{ (通り)}$$

(小学生の 2 人，中学生の 2 人，高校生の 3 人がそれぞれ隣り合う並び方)

小学生，中学生，高校生をそれぞれひとまとめとした並び方は　$3!$ (通り)

小学生 2 人が隣り合う並び方は　$2!$ (通り)

中学生 2 人が隣り合う並び方は　$2!$ (通り)

高校生 3 人が隣り合う並び方は　$3!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は，積の法則により

$$3! \times 2! \times 2! \times 3! = \mathbf{144} \text{ (通り)}$$

(両端に高校生 3 人が並ぶ並び方)

両端の高校生 2 人の並び方は　${}_3\mathrm{P}_2$ (通り)

間に並ぶ残り 5 人の並び方は　$5!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は，積の法則により

$${}_3\mathrm{P}_2 \times 5! = \mathbf{720} \text{ (通り)}$$

(答) 問 21 [5]　問 22 [2]　問 23 [5]

[F] (赤球 1 つ，青球 2 つ，白球 2 つ取り出す確率)

$$\frac{5!}{1!2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{81}}$$

(赤球を 1 つも取り出さない確率)

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{243}}$$

(赤球の個数の期待値)

$$\sum_{k=0}^{5} k \times {}_5\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-k} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \qquad \longleftarrow \sum_{k=0}^{n} k \times {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} = np$$

(答) 問 24 [2]　問 25 [4]　問 26 [4]