平成20年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部・夜間部一般前期入学試験 (数学I・A) 平成19年12月22日

[A] x の方程式 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$ について，$x=0$ は解ではなく，$X=x+\dfrac{1}{x}$ についての方程式に書き直すと $X^2+pX+q=0$ となる。
ここで $p=$ $\boxed{\text{問1}}$，$q=$ $\boxed{\text{問2}}$ である。また，もとの方程式の実数解について，それを越えない最大の整数の値は $\boxed{\text{問3}}$ または $\boxed{\text{問4}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問1	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問2	-1	-2	-3	-4	-5	-6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問3	-1	0	1	2	3	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問4	-7	-6	-5	-4	-3	-2

[B] 2次関数 $f(x)=x^2-4x+6$ の $a \leqq x \leqq a+2$ における最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とし，$g(a)=\dfrac{M(a)+m(a)}{2}$ とする。このとき $g(0)=$ $\boxed{\text{問5}}$，$g(1)=$ $\boxed{\text{問6}}$ であり，$g(a)=a^2-2a+4$ となるような a の値の範囲は $a \leqq$ $\boxed{\text{問7}}$ または $\boxed{\text{問8}}$ $\leqq a$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問5	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問6	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問7	-3	-2	-1	0	1	2

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問8	-2	-1	0	1	2	3

[C] x の方程式 $|9-x^2| = x+k$ の実数解について考える。
ちょうど 1 個の実数解をもつような k の値は $\boxed{\text{問 9}}$ で，そのときの解は $x = \boxed{\text{問 10}}$ である。
ちょうど 3 個の実数解をもつような k の値は $\boxed{\text{問 11}}$ または $\boxed{\text{問 12}}$ で，$k = \boxed{\text{問 11}}$ のときの 3 解の積は $\boxed{\text{問 13}}$ である。
ただし，$\boxed{\text{問 11}} < \boxed{\text{問 12}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	-9	-6	-3	3	6	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	-9	-6	-3	3	6	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 11	-9	-6	-3	3	6	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 12	$\frac{37}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{41}{4}$	$\frac{43}{4}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{47}{4}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 13	-36	-24	-12	12	24	36

[D] (1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = \boxed{問 14}$，$\tan^3\theta + \dfrac{1}{\tan^3\theta}$ $\boxed{問 15}$ である。

(2) 四角形 ABCD において，
$\mathrm{AB} = \sqrt{3} - 1$，$\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{2}$，$\mathrm{DA} = 2$，$\angle\mathrm{A} = 120^\circ$ であるとき，
BD の長さは $\boxed{問 16}$，四角形 ABCD の面積は $\boxed{問 17}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	$-\dfrac{3}{5}$	$-\dfrac{2}{5}$	$-\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 15	$-\dfrac{65}{2}$	$-\dfrac{65}{4}$	$-\dfrac{65}{8}$	$\dfrac{65}{8}$	$\dfrac{65}{4}$	$\dfrac{65}{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 16	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}+1$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 17	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{3}{2}$

[E] 1，2，3，4，5，6，7 から異なる 5 個の数字を取って並べ 5 桁の整数をつくる。このような数は全部で $\boxed{\text{問 }18}$ 通りでき，このうち千の位と一の位の数字がともに偶数であるものは $\boxed{\text{問 }19}$ 通り，また 4 の倍数は $\boxed{\text{問 }20}$ 通りである。

問 18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1260	1440	1800	1960	2100	2520

問 19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	240	360	480	600	720	840

問 20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	240	360	480	600	720	840

[F] 3 個のサイコロを同時に投げて，出た目を a，b，c とする。
$T=(a-2)(b-2)(c-2)$ とおくとき，$T=0$ となる確率は $\boxed{\text{問 }21}$，
$T>0$ となる確率は $\boxed{\text{問 }22}$，$T>2$ となる確率は $\boxed{\text{問 }23}$ である。

問 22	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{41}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{71}{216}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{101}{216}$	$\frac{121}{216}$

問 23	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{19}{54}$	$\frac{23}{54}$	$\frac{25}{54}$	$\frac{29}{54}$	$\frac{31}{54}$	$\frac{35}{54}$

問 24	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$

解答例

[A] $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0\cdots$ ① について，$x \neq 0$ より両辺を x^2 で割ると

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=X$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=X^2-2$ であるから

$$(X^2-2)+2X-1=0 \quad \text{すなわち} \quad X^2+\mathbf{2}X\mathbf{-3}=0$$

これを解いて　$X=1,\,-3$

$x+\dfrac{1}{x}=1$　すなわち　$x^2-x+1=0$ は実数解をもたない.

$x+\dfrac{1}{x}=-3$　すなわち　$x^2+3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$$-\frac{1}{2}=\frac{-3+\sqrt{4}}{2}<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<\frac{-3+\sqrt{9}}{2}=0$$
$$-3=\frac{-3-\sqrt{9}}{2}<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<\frac{-3-\sqrt{4}}{2}=-\frac{5}{2}$$

よって，① の実数解で，それを越えない最大の整数は　$\mathbf{-1,\ -3}$

(答) 問 1 [2]　問 2 [3]　問 3 [1]　問 4 [5]

[B] $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x=2$ である．$a \leqq x \leqq a+2$ の中央は　$x=a+1$

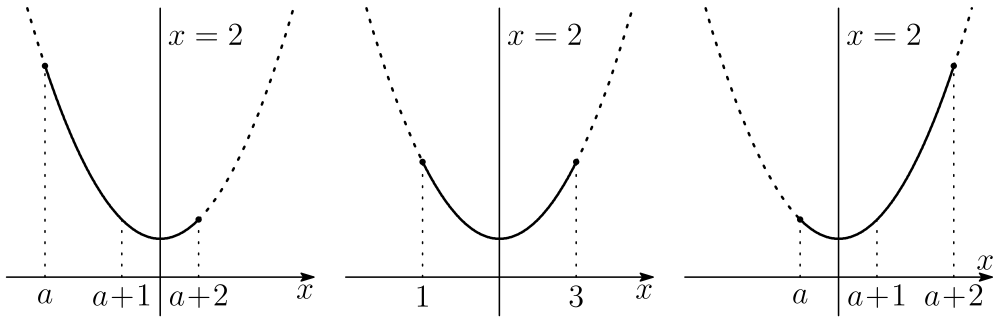
最大値 $M(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］$a+1<2$　すなわち　$a<1$ のとき
　$x=a$ で最大値をとるから　$M(a)=f(a)=a^2-4a+6$

［2］$a+1=2$　すなわち　$a=1$ のとき
　$x=1,\ 3$ で最大値をとるから　$M(a)=f(1)=f(3)=3$

［3］$2<a+1$　すなわち　$1<a$ のとき
　$x=a+2$ で最大値をとるから　$M(a)=f(a+2)=a^2+2$

［1］$a<1$ のとき　［2］$a=1$ のとき　［3］$1<a$ のとき



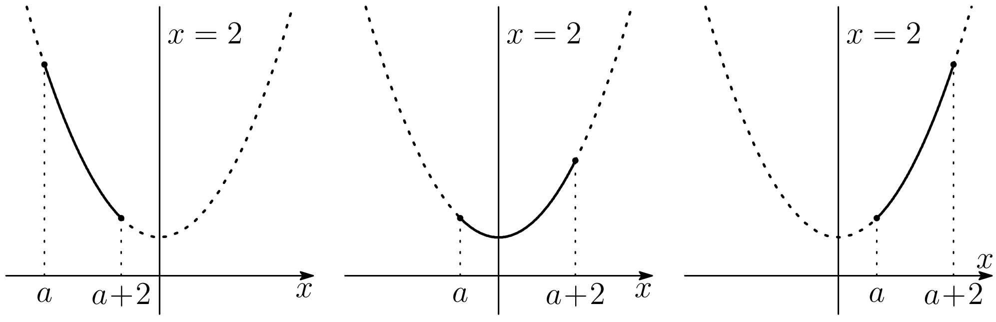
最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］$a+2<2$　すなわち　$a<0$ のとき
　$x=a+2$ で最小値をとるから　$m(a)=f(a+2)=a^2+2$

［2］$a \leqq 2 \leqq a+2$　すなわち　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
　$x=2$ で最小値をとるから　$m(a)=f(2)=2$

［3］$2<a$ のとき
　$x=a$ で最小値をとるから　$m(a)=f(a)=a^2-4a+6$

［1］$a<0$ のとき　［2］$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　［3］$2<a$ のとき



$g(a) = \dfrac{M(a)+m(a)}{2}$ であるから

$a<0$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2-4a+6)+(a^2+2)}{2} = a^2-2a+4$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2-4a+6)+2}{2} = \dfrac{1}{2}a^2-2a+4$

$1 \leqq a < 2$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2+2)+2}{2} = \dfrac{1}{2}a^2+2$

$2 \leqq a$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2+2)+(a^2-4a+6)}{2} = a^2-2a+4$

したがって，$g(0) = \mathbf{4}$，$g(1) = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$

また，$g(a) = a^2-2a+4$ となる a の値の範囲は　$a \leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{2} \leqq a$

(答) 問5 [6]　問6 [3]　問7 [4]　問8 [5]

[C] 方程式 $|9-x^2| = x+k$ の実数解の個数は，曲線 $y=|9-x^2|$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数である．

ちょうど1個の実数解をもつのは，直線が点 $(3,\ 0)$ を通るときであるから (図:1)

$0=3+k$　すなわち　$k=\mathbf{-3}$，このときの解は　$\mathbf{3}$

ちょうど3個の実数解をもつのは，直線が点 $(-3,\ 0)$ を通るか，$-3<x<3$ において曲線と直線が接する (方程式は重解をもつ) ときである (図:2).

直線が点 $(-3,\ 0)$ を通るとき　$0=-3+k$　すなわち　$k=\mathbf{3}$

$|9-x^2| = x+k$　$(-3<x<3)$ が重解をもつとき，方程式 $x^2+x+k-9=0$ の係数について

$1^2-4\cdot1(k-9)=0$　すなわち　$k=\mathbf{\dfrac{37}{4}}$

また，$k=3$ のとき，方程式 $|9-x^2| = x+3 \cdots ①$ の解は

［1］$9-x^2 \geqq 0$　すなわち　$-3 \leqq x \leqq 3$ のとき
　$9-x^2 = x+3$ を解いて　$x=-3,\ 2$

［2］$9-x^2 < 0$　すなわち　$x<-3,\ 3<x$ のとき
　$-(9-x^2) = x+3$ を解いて　$x=4$

したがって，方程式 ① を解いて　$x=-3,\ 2,\ 4$

よって，これらの解の積は　$-3\cdot2\cdot4 = \mathbf{-24}$

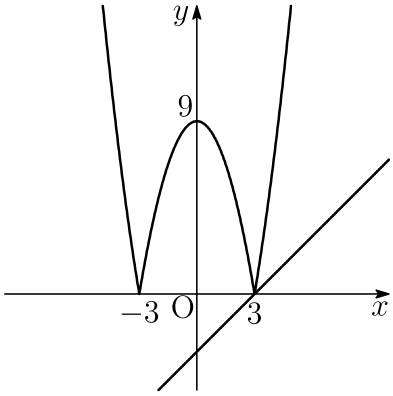


図 1: 共有点が 1 個

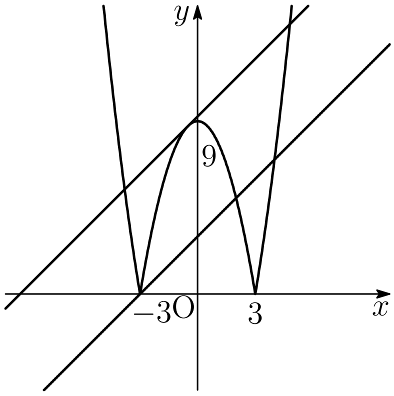


図 2: 共有点が 3 個

(答) 問 9 [3]　問 10 [4]　問 11 [4]　問 12 [1]　問 13 [2]

[D] (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

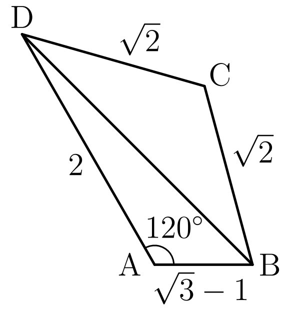
ここで　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=1\div\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}$$

ゆえに　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$

$$=\left(-\frac{5}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\boldsymbol{\frac{65}{8}}$$

(2) △ABD に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 2^2+(\sqrt{3}-1)^2\\ &\qquad -2\cdot2(\sqrt{3}-1)\cos120^\circ\\ &= 4+(4-2\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)\\ &= 6\end{aligned}$$

BD > 0 であるから　$\mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

△BCD に余弦定理を適用して

$$\cos C=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに　$C=120^\circ$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\ &= \frac{1}{2}\cdot2(\sqrt{3}-1)\sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}\sin120^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(答) 問 14 [2]　問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [6]

[E] (1，2，3，4，5，6，7 から 5 個の数字をとって並べる 5 桁の整数の個数)

7 個から 5 個とる順列であるから　${}_7\mathrm{P}_5=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=\mathbf{2520}$ (通り)

(千の位と一の位の数字がともに偶数である整数の個数)

千の位と一の位は，2，4，6 の 3 個から 2 個取る順列であるから

${}_3\mathrm{P}_2$ 通り

そのおのおのについて，万，百，十の位は，残りの 5 個の数字から 3 個とる順列で　${}_5\mathrm{P}_3$ 通り

求める場合の数は，積の法則により　${}_3\mathrm{P}_2\times{}_5\mathrm{P}_3=3\cdot2\times5\cdot4\cdot3=\mathbf{360}$ (通り)

(4 の倍数の個数)

4 の倍数であるためには，下 2 桁が 4 の倍数であればよいから，その下 2 桁は

12，16，24，32，36，52，56，64，72，76 の 10 通り

そのおのおのについて，万，千，百の位は，残りの 5 個の数字から 3 個とる順列で　　${}_5\mathrm{P}_3$ 通り

求める場合の数は，積の法則により　$10 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 10 \times 5{\cdot}4{\cdot}3 = \mathbf{600}$（通り）

(答) 問 18 [6]　問 19 [2]　問 20 [4]

[F] $T \neq 0$ となるのは，$a \neq 2$，$b \neq 2$，$c \neq 2$ の場合で　$P(T \neq 0) = \dfrac{5^3}{6!} = \dfrac{125}{216}$

ゆえに　　$P(T = 0) = 1 - P(T \neq 0) = 1 - \dfrac{125}{216} = \mathbf{\dfrac{91}{216}}$

$T > 0$ となるのは，a，b，c がすべて 3 以上であるか，a，b，c のどれか 1 つだけが 3 以上で残りの 2 つがともに 1 の場合であるから

$$P(T > 0) = \frac{4^3 + {}_3\mathrm{C}_1{\cdot}4}{6^3} = \frac{76}{216} = \mathbf{\frac{19}{54}}$$

$T = 1$ となるのは，a，b，c がすべて 3 であるか，a，b，c のどれか 1 つだけが 3 で残りの 2 つがともに 1 の場合であるから

$$P(T = 1) = \frac{1 + {}_3\mathrm{C}_1}{6^3} = \frac{4}{216}$$

$T = 2$ となるのは，a，b，c のどれか 1 つだけが 4 で残りの 2 つがともに 3 またはともに 1 の場合であるから

$$P(T = 2) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1{\cdot}2}{6^3} = \frac{6}{216}$$

よって　　$P(T > 2) = P(T > 0) - \{P(T = 1) + P(T = 2)\}$

$$= \frac{76}{216} - \left(\frac{4}{216} + \frac{6}{216}\right) = \mathbf{\frac{11}{36}}$$

(答) 問 21 [4]　問 22 [1]　問 23 [3]