平成20年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部・夜間部一般後期入学試験 (数学 I・A) 平成20年2月23日

[A] (1) $\sqrt{7}$ の小数部分を γ とするとき，$\dfrac{3}{\gamma} - \gamma$ は整数であり，その値は $\boxed{\text{問 1}}$ である。

(2) 不等式 $a(x+2)+b(x-1)>0$ をみたす x の範囲が $x<\dfrac{1}{2}$ であるとき，$b=\boxed{\text{問 2}}\,a$ であり，$b(x+2)+a(x-1)<0$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{問 3}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問1	2	3	4	5	6	7

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問2	2	3	4	5	6	7

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問3	$x<-\dfrac{5}{2}$	$x<-\dfrac{3}{2}$	$x<-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}<x$	$-\dfrac{3}{2}<x$	$-\dfrac{5}{2}<x$

[B] 実数 x, y, z が $x+y+3z-19=0$, $3x-y+z-13=0$, $y \geqq 1$, $z \geqq 1$ をみたしながらうごくとき, $x^2+y^2+z^2=6x^2-$ $\boxed{問4}$ $x+$ $\boxed{問5}$ であり, x のとり得る値の範囲は $\boxed{問6}$ $\leqq x \leqq$ $\boxed{問7}$ である。したがって, $x^2+y^2+z^2$ の最大値は $\boxed{問8}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問4	6	12	18	24	30	36

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問5	49	59	69	79	89	99

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問6	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問7	7	8	9	10	11	12

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問8	121	131	141	151	161	171

[C] 整数 m，n を係数とする x の 2 次方程式 $x^2 - mx + n = 0$ の 2 つの解 α，β は実数であり $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たしている。

$m = 4$ のとき，n の値は $\boxed{\text{問 9}}$ 通り，$m \leqq 10$ のとき，m，n の組は $\boxed{\text{問 10}}$ 通りあり，$m = 3$ のとき，$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{問 11}}$，またこのとき β^4 の小数第 1 位を四捨五入した値は $\boxed{\text{問 12}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	10	15	21	28	36	45

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 11	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 12	46	47	48	49	50	51

[D] 三角形 ABC において，$AB = 2\sqrt{5}$，$BC = 5$，$CA = 5$ とする。また，A から BC に下ろした垂線を AH とし，AH を直径とする円と AB との交点を B′，AC との交点を C′ とする。このとき，AH，BH の長さは順に $\boxed{\text{問 13}}$，$\boxed{\text{問 14}}$ であり，AB′，AC′ の長さは順に $\boxed{\text{問 15}}$，$\boxed{\text{問 16}}$ である。また，△AB′C′ の面積は $\boxed{\text{問 17}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 13	$\sqrt{5}$	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 15	$\frac{6}{\sqrt{5}}$	$\frac{7}{\sqrt{5}}$	$\frac{8}{\sqrt{5}}$	$\frac{9}{\sqrt{5}}$	$\frac{11}{\sqrt{5}}$	$\frac{12}{\sqrt{5}}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 16	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{17}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 17	$\frac{64}{25}$	$\frac{96}{25}$	$\frac{112}{25}$	$\frac{128}{25}$	$\frac{142}{25}$	$\frac{176}{25}$

[E] A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字から異なる 4 文字を取り出して一列に並べ文字列をつくる。全部で $\boxed{\text{問 18}}$ 通りの文字列ができ，このうち，A と B が隣り合う文字列は $\boxed{\text{問 19}}$ 通りある。また，できる文字列を辞書式に並べるとき，CAFE は $\boxed{\text{問 20}}$ 番目にくる。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 18	960	1080	1200	1320	1440	1680

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	180	210	240	270	300	330

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	430	432	434	436	438	440

[F] 赤玉 5 個，白玉 4 個，青玉 3 個が入っている袋から，無作為に 3 個の玉を取り出す。このとき，3 個とも赤玉である確率は $\boxed{\text{問 21}}$，3 個とも色が異なる確率は $\boxed{\text{問 22}}$，3 個の色が 2 種類である確率は $\boxed{\text{問 23}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 21	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{3}{22}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\frac{23}{44}$	$\frac{25}{44}$	$\frac{27}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{31}{44}$	$\frac{33}{44}$

解答例

[A] (1) $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ より，$\sqrt{7}$ の整数部分が 2 であるから

$\sqrt{7}=2+\gamma$　ゆえに　$\gamma=\sqrt{7}-2$

したがって　$\dfrac{3}{\gamma}-\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}-(\sqrt{7}-2)$

$$=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}-\sqrt{7}+2$$

$$=(\sqrt{7}+2)-\sqrt{7}+2=\mathbf{4}$$

(2)　$a(x+2)+b(x-1)>0$

すなわち　$(a+b)x>-2a+b$

この不等式の解が $x<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a+b<0,\ \frac{-2a+b}{a+b}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\boldsymbol{b=5a}$，$a<0$

上の条件から，不等式 $b(x+2)+a(x-1)<0$ の解は

$$5a(x+2)+a(x-1)<0$$

$$5(x+2)+(x-1)>0$$

$$6x>-9$$

$$\boldsymbol{x>-\frac{3}{2}}$$

(答) 問 1 [3]　問 2 [4]　問 3 [5]

[B]

$$x+y+3z-19=0 \quad \cdots ①$$
$$3x-y+z-13=0 \quad \cdots ②$$

①，② を加えて　$4x+4z-32=0$

ゆえに　$z=8-x \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して　$x+y+3(8-x)-19=0$

ゆえに　$y=2x-5 \quad \cdots ④$

$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ であるから，③，④ より

$8-x \geqq 1$ かつ $2x-5 \geqq 1$　ゆえに　$\boldsymbol{3 \leqq x \leqq 7} \quad \cdots ⑤$

③，④ より

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= x^2+(2x-5)^2+(8-x)^2 \\
&= 6x^2-\mathbf{36}x+\mathbf{89} \\
&= 6(x^2-6x)+89 \\
&= 6\{(x-3)^2-3^2\}+89 \\
&= 6(x-3)^2+35
\end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲において，$x=7$ で**最大値 131** をとる．

(答) 問 4 [6]　問 5 [5]　問 6 [3]　問 7 [1]　問 8 [2]

[C] $f(x)=x^2-mx+n$ とおく.

2次方程式 $f(x)=0$ の解 α，β が $0<\alpha<1<\beta$ をみたすとき

$$f(0)>0,\ f(1)<0$$

$f(0)>0$ から　　$n>0$　　$\cdots$①

$f(1)<0$ から　　$n<m-1$　$\cdots$②

①，② をみたす整数 m，n の組は，$m\leqq 10$ について

$m=3$ のとき	$n=1$	の 1 通り
$m=4$ のとき	$n=1,2$	の **2** 通り
$m=5$ のとき	$n=1,2,3$	の 3 通り
$m=6$ のとき	$n=1,2,3,4$	の 4 通り
$m=7$ のとき	$n=1,2,3,4,5$	の 5 通り
$m=8$ のとき	$n=1,2,3,4,5,6$	の 6 通り
$m=9$ のとき	$n=1,2,3,4,5,6,7$	の 7 通り
$m=10$ のとき	$n=1,2,3,4,5,6,7,8$	の 8 通り

したがって　$1+2+3+4+5+6+7+8=\mathbf{36}$ 通り

$m=3$ のとき $n=1$ であるから，α，β は方程式 $x^2-3x+1=0$ の解で

仮定より　　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに　　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$

したがって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot1=\mathbf{7}$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=7^2-2\cdot1^2=47 \quad \cdots①$$

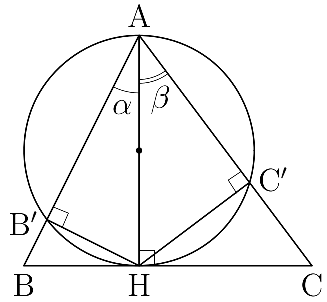
ここで，$\dfrac{1}{2}-\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}>0$ であるから

$$0<\alpha<\frac{1}{2}\quad これから\quad 0<\alpha^4<\frac{1}{16}\quad\cdots②$$

①，② より，β^4 の小数第1位を四捨五入した値は　**47**

(答) 問9 [2]　問10 [5]　問11 [4]　問12 [2]

[D] △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}\\ &= \frac{5^2+5^2-(2\sqrt{5})^2}{2\cdot5\cdot5}\\ &= \frac{30}{50}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

ゆえに　$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

よって　$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\sin C=5\times\dfrac{4}{5}=\mathbf{4}$

$\mathrm{HC}=\mathrm{AC}\cos C=5\times\dfrac{3}{5}=3$

したがって　$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}-\mathrm{HC}=5-3=\mathbf{2}$

$\angle\mathrm{BAH}=\alpha$，$\angle\mathrm{CAH}=\beta$ とおくと

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad \cos\beta=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}$$

B′，C′ は AH を直径とする円周上の点であるから　$\angle\mathrm{AB'H}=\angle\mathrm{AC'H}=90^\circ$

よって　$\mathrm{AB'}=\mathrm{AH}\cos\alpha=4\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{8}{\sqrt{5}}}$

$\mathrm{AC'}=\mathrm{AH}\cos\beta=4\times\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{16}{5}}$

△ABC に正弦定理を適用して　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

ゆえに　$\sin A=\dfrac{\mathrm{BC}\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}}=5\times\dfrac{4}{5}\div2\sqrt{5}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって，△AB′C′ の面積は

$$\triangle\mathrm{AB'C'}=\frac{1}{2}\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\sin\mathrm{A}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\sqrt{5}}\times\frac{16}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{128}{25}}$$

(答) 問 13 [5]　問 14 [2]　問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [4]

[E] A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字から異なる 4 文字取り出して一列に並べる方法は

$$ {}_8\mathrm{P}_4 = 8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5 = \mathbf{1680}\ (\text{通り}) $$

(A，B が隣り合う文字列の個数)

A，B のひとまとめと残りの 6 文字から 2 文字取り出して並べる方法は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times 3!\ (\text{通り}) $$

A と B が隣り合う並び方は　$2!\ (\text{通り})$

したがって，A と B が隣り合うこれらの文字列の総数は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times 3! \times 2! = \mathbf{180}\ (\text{通り}) $$

(CAFE の順番)

文字列を辞書式に並べると

A □□□型の文字列は　${}_7\mathrm{P}_3 = 7{\cdot}6{\cdot}5 = 210$ (個)

B □□□型の文字列は　${}_7\mathrm{P}_3 = 7{\cdot}6{\cdot}5 = 210$ (個)

CAB □型の文字列は　5 (個)

CAD □型の文字列は　5 (個)

CAE □型の文字列は　5 (個)

これに続く文字列は　CAFB，CAFD，CAFE

したがって，CAFE は　$210 \times 2 + 5 \times 3 + 3 = \mathbf{438}$ (番目)

(答) 問 18 [6]　問 19 [1]　問 20 [5]

[F] 3 個とも赤玉である確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{10}{220} = \mathbf{\dfrac{1}{22}}$

3 個とも白玉である確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{220}$

3 個とも青玉である確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{220}$

3 個とも色が異なる確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{220} = \dfrac{60}{220} = \mathbf{\dfrac{3}{11}}$

3 個の色が 2 種類である確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{60}{220}\right) = \mathbf{\frac{29}{44}}$$

(答) 問 21 [2]　問 22 [3]　問 23 [4]