平成19年度　西日本リハビリテーション学院
夜間部一般入学試験 (数学I・A) 平成18年11月11日

[A] 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について考える。

$x=1$ のとき，$(y,\ z)$ の組は 問1 通りある。

x のとり得る値は 問2 通りだけあり，$(x,\ y,\ z)$ の組は全部で 問3 通りある。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問1	0	1	2	3	4	5

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問2	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問3	1	2	3	4	5	6

[B] $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，

$t=x^2-4x+3$ のとり得る値の範囲は 問4 $\leqq t \leqq$ 問5 であり，

$y=(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a$ の最大値が6であるとき，

定数 a の値は 問6 である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問4	-5	-4	-3	-2	-1	0

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問5	0	1	2	3	4	5

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問6	-6	-3	0	3	6	9

[C] 2 つの 2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax + 25$，$g(x) = -x^2 + 4ax - 25$ (a は定数) がある。

任意の実数 x に対して $f(x) > g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は

$\boxed{\text{問 7}} < a < \boxed{\text{問 8}}$ であり，

任意の実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲は

$\boxed{\text{問 9}} < a < \boxed{\text{問 10}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	-10	-5	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{5}$	-2	$-\sqrt{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	5	10

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	-10	-5	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{5}$	-2	$-\sqrt{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	5	10

[D] $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，

$\sin\theta\cos\theta = \boxed{\text{問 11}}$，$\sin\theta - \cos\theta = \boxed{\text{問 12}}$，

$\sin^3\theta - \cos^3\theta = \boxed{\text{問 13}}$，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \boxed{\text{問 14}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 11	$-\dfrac{1}{9}$	$-\dfrac{1}{8}$	$-\dfrac{1}{6}$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 12	$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 13	$-\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$	$-\dfrac{5\sqrt{5}}{16}$	$-\dfrac{3\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{3\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{5\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	-9	-8	-6	-4	-3	-2

[E] $\triangle$ABC は $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ であり，半径 1 の円に内接している。このとき，BC，CA，AB の長さはそれぞれ $\boxed{問 15}$, $\boxed{問 16}$, $\boxed{問 17}$ であり，$\cos\angle C$ の値は $\boxed{問 18}$ である。

問 15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	2

問 16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

問 17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

問 18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

[F] 両親と 4 人の息子と 2 人の娘からなる 8 人の家族がある。この 8 人が 1 列に並ぶ。並び方の総数は $\boxed{問 19}$ 通りであり，このうち，娘 2 人が隣り合う並び方は $\boxed{問 20}$ 通り，また，女性 3 人のどの 2 人も隣り合わない並び方は $\boxed{問 21}$ 通りである。

問 19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	420	840	2520	5040	20160	40320

問 20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	144	630	1440	3780	10080	14400

問 21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	144	630	1440	3780	10080	14400

[G] 2 つのサイコロを同時に投げるとき，出る目の和の期待値は $\boxed{\text{問 22}}$，出る目の差の絶対値の期待値は $\boxed{\text{問 23}}$，出る目の最大値の期待値は $\boxed{\text{問 24}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\frac{29}{18}$	$\frac{31}{18}$	$\frac{35}{18}$	$\frac{37}{18}$	$\frac{41}{18}$	$\frac{43}{18}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 24	$\frac{121}{36}$	$\frac{131}{36}$	$\frac{151}{36}$	$\frac{161}{36}$	$\frac{181}{36}$	$\frac{191}{36}$

解答例

[A] $x=1$ のとき $\quad \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{3}$$

両辺に $6yz$ をかけて $\quad 3y+2z=2yz$

整理して $\quad 2yz-3y-2z=0$

両辺に 2 をかけて $\quad 2y{\cdot}2z-3{\cdot}2y-2{\cdot}2z=0$

両辺に 6 をたして $\quad 2y{\cdot}2z-3{\cdot}2y-2{\cdot}2z+(-2)(-3)=(-2)(-3)$

$$(2y-2)(2z-3)=6$$

ゆえに $\quad (y-1)(2z-3)=3$

$y-1$，$2z-3$ は整数であるから，上式を満たす正の整数 y，z の組は

$$\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-3=3 \end{cases},\quad \begin{cases} y-1=3 \\ 2z-3=1 \end{cases}$$

これを解いて $\quad (y,\ z)=(2,\ 3),\ (4,\ 2)$

よって $\quad x=1$ を満たす $(y,\ z)$ の組は $\quad$ **2 組**

$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3y}\leqq\dfrac{1}{2{\cdot}1}+\dfrac{1}{3{\cdot}1}=\dfrac{5}{6}$ であるから

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\leqq\frac{5}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x}\geqq\frac{1}{2}$$

x は正の整数であるから $\quad x$ のとり得る値は 1 と 2 の 2 通りである。

$x=2$ のとき $\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{5}{6}$$

両辺に $6yz$ をかけて $\quad 3y+2z=5yz$

整理して $\quad 5yz-3y-2z=0$

両辺に 5 をかけて $\quad 5y{\cdot}5z-3{\cdot}5y-2{\cdot}5z=0$

両辺に 6 をたして $\quad 5y{\cdot}5z-3{\cdot}5y-2{\cdot}5z+(-2)(-3)=(-2)(-3)$

ゆえに $\quad (5y-2)(5z-3)=6$

$5y-2$，$5z-3$ は整数であるから，上式を満たす正の整数 y，z の組は

$$\begin{cases} 5y-2=3 \\ 5z-3=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (y,\ z)=(1,\ 1) \text{ の 1 組}$$

よって，(x,y,z) の組は $\quad 2+1=\mathbf{3}$ (組)

(答) 問 1 [3] 問 2 [2] 問 3 [3]

[B] $t=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ は

$x=0$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 -1 をとる．

ゆえに，t のとり得る値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$

y を t を用いて表すと

$$\begin{aligned} y &= (x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a \\ &= (x^2-4x+3)^2-2(x^2-4x+3)+a+9 \\ &= t^2-2t+a+9 \\ &= (t-1)^2+a+8 \end{aligned}$$

ゆえに，$t=1$ のとき最小値 $a+8$，$t=-1,\ 3$ のとき最大値 $a+12$ をとる．

よって，$a+12=6$ を解いて　$\boldsymbol{a=-6}$

(答) 問 4 [5]　問 5 [4]　問 6 [1]

[C] $f(x)>g(x)$ から　　$x^2+2ax+25>-x^2+4ax-25$
移項して整理すると　$x^2-ax+25>0$

任意の実数 x に対して上式が成り立つとき，係数について

$$(-a)^2-4\cdot1\cdot25<0 \quad \text{すなわち} \quad (a+10)(a-10)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-10<a<10}$

任意の実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つとき，

$f(x)$ の最小値 $>$ $g(x)$ の最大値 を満たせばよい．

$$f(x)=x^2+2ax+25=(x+a)^2-a^2+25$$

$$g(x)=-x^2+4ax-25=-(x-2a)+4a^2-25$$

ゆえに　　$-a^2+25>4a^2-25$
整理して　$a^2-10<0$
よって　　$\boldsymbol{-\sqrt{10}<a<\sqrt{10}}$

(答) 問 7 [1]　問 8 [6]　問 9 [3]　問 10 [4]

[D] $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

よって　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする x の 2 次方程式は

$$(x - \sin\theta)(x - \cos\theta) = 0$$

すなわち　$x^2 - (\sin\theta + \cos\theta)x + \sin\theta\cos\theta = 0$

ゆえに　$x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{8} = 0$

これを解いて　$x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{4}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\sin\theta \geqq 0$

よって　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}$

したがって　$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4} - \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

これらの結果を利用して

$$\begin{aligned}\sin^3\theta - \cos^3\theta &= (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{5}}{16}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 1 \div \left(-\frac{1}{8}\right) = \boldsymbol{-8}\end{aligned}$$

(答) 問 11 [2]　問 12 [6]　問 13 [6]　問 14 [2]

[E] 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R$

ゆえに $a = 2R\sin A = 2{\cdot}1\sin 30^\circ = 2 \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{1}$

$$b = 2R\sin B = 2{\cdot}1\sin 45^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= b\cos A + a\cos B = \sqrt{2}\cos 30^\circ + 1\cos 45^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

(第 2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{1^2+(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2{\cdot}1{\cdot}\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} \end{aligned}$$

(答) 問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [2]　問 18 [2]

[F] (8 人が 1 列に並ぶ並び方の総数)
8 人が 1 列に並ぶとき　$8! = 8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{40320}$ (通り)

(娘 2 人が隣り合う並び方の総数)
娘 2 人をひとまとめにする.
娘以外の 6 人と娘ひとまとめの並び方は，7! 通りある.
また，ひとまとめにした娘 2 人の並び方は，2! 通りある.
よって，並び方の総数は　$7! \times 2! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 2{\cdot}1 = \mathbf{10080}$ (通り)

(女子 3 人のどの 2 人も隣り合わない並び方の総数)
男性 5 人の並び方は 5! 通りある.
このとき女性 3 人の並び方は，下の図のように 6ヶ所の [|] から 3ヶ所に並ぶ方法であるから，${}_6\mathrm{P}_3$ 通りある.

| 男 | 男 | 男 | 男 | 男 |

よって，並び方の総数は　$5! \times {}_6\mathrm{P}_3 = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot} = \mathbf{14400}$ (通り)

(答) 問 19 [6]　問 20 [5]　問 21 [6]

[G]

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

出る目の和の期待値は

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$$
$$+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=\mathbf{7}$$

差	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

出る目の差の期待値は

$$0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{70}{36}=\mathbf{\frac{35}{18}}$$

和	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

差	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

最大	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

出る目の最大の期待値は

$$1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \mathbf{\frac{161}{36}}$$

最大	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

(答) 問 22 [4]　問 23 [3]　問 24 [4]