平成19年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部一般入学試験 (数学I・A) 平成18年10月21日

[A] 2つの異なる放物線 $y = ax^2 - 2x + 3 \cdots$ ①，$y = x^2 - 2x + b \cdots$ ② がある。① の頂点の y 座標は $\boxed{問1}$ であり，① の頂点が ② 上，② の頂点が ① 上にあるときの a の値は $\boxed{問2}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問1	$3+a$	$3-a$	4	2	$3+\dfrac{1}{a}$	$3-\dfrac{1}{a}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問2	1	-1	± 1	2	-2	± 2

[B] 実数 x，y，z が $x + y + 3z - 11 = 0$，$3x - y + z - 5 = 0$ をみたしている。$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき，x のとりうる値の範囲は $\boxed{問3} \leqq x \leqq \boxed{問4}$ であり，このときの $x^2 + y^2 + z^2$ の最大値は $\boxed{問5}$，最小値は $\boxed{問6}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問3	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	3

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問4	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問5	45	50	55	60	65	70

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問6	7	9	11	13	15	17

[C] $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。x の 2 次方程式 $x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)x - 2\sin^2\theta + 1 = 0$ について，

異なる 2 つの実数解をもつような θ の範囲は $\boxed{\text{問 7}} < \theta < \boxed{\text{問 8}}$

2 つの解がともに正であるような θ の範囲は $\boxed{\text{問 9}} < \theta < \boxed{\text{問 10}}$

2 つの解の符号が異なるような θ の範囲は $\boxed{\text{問 11}} < \theta < \boxed{\text{問 12}}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	0°	30°	45°	60°	90°	120°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	45°	60°	90°	120°	135°	150°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	0°	30°	45°	60°	90°	120°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	45°	60°	90°	120°	135°	150°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 11	0°	30°	45°	60°	90°	120°

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 12	45°	60°	90°	120°	135°	150°

[D] 円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 8$，$BC = 5$，$\angle B = 60^\circ$ のとき，AC の長さは $\boxed{問13}$，円の半径は $\boxed{問14}$ である。
また，$CD = 3$ のとき，DA の長さは $\boxed{問15}$，BD の長さは $\boxed{問16}$ である。
この四角形の面積が最大となるような DA の長さは $\boxed{問17}$ で，そのときの面積は $\boxed{問18}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問13	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問14	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問15	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問16	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問17	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問18	$\frac{27\sqrt{3}}{4}$	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$	$\frac{121\sqrt{3}}{12}$	$12\sqrt{3}$	$\frac{169\sqrt{3}}{12}$	$\frac{49\sqrt{3}}{3}$

[E] 0，2，4，6，8 から 4 個の数字を選び，4 桁の整数を作るとき，数字がすべて異なるものは全部で $\boxed{問19}$ 個できる。
同じ数字が含まれてもよいときは全部で $\boxed{問20}$ 個でき，この場合に 6480 より小さいものは $\boxed{問21}$ 個できる。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	24	48	72	96	120	144

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	320	400	480	500	600	625

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 21	160	200	240	280	320	360

[F] A の袋には赤球が 2 個，白球が 3 個入っている。B の袋には赤球が 4 個，白球が 6 個入っている。甲は A の袋から 2 球，乙は B の袋から 2 球取り出し，取り出した球に赤球が少なくとも 1 つ含まれていたら 1 点，2 球とも白球であれば 0 点とする。
このとき，甲が 1 点になる確率は $\boxed{問22}$ であり，乙が 1 点になる確率は $\boxed{問23}$ である。次に，取り出した球は 1 回ごとにもとに戻すものとして，乙がこの操作を 3 回行って得点の合計が 2 点になる確率は $\boxed{問24}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{9}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 24	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$

解答例

[A] 放物線 ① を変形すると

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 2x + 3 \\ &= a\left(x^2 - \frac{2}{a}\right) + 3 \\ &= a\left\{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 3 \\ &= a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + 3 - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は　$\left(\frac{1}{a},\ \boldsymbol{3 - \frac{1}{a}}\right)$

放物線 ② を変形すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + b \\ &= (x-1)^2 - 1^2 + b \\ &= (x-1)^2 + b - 1 \end{aligned}$$

したがって，放物線 ② の頂点の座標は　$(1,\ b-1)$

$(1,\ b-1)$ は，放物線 ① 上にあるから

$$b - 1 = a{\cdot}1^2 - 2{\cdot}1 + 3 \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 2 \cdots ③$$

よって，放物線 $y = x^2 - 2x + a + 2$ 上に $\left(\frac{1}{a},\ 3 - \frac{1}{a}\right)$ があるから

$$3 - \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}\right) + a + 2$$

整理して　$a - 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 0$

a^2 をかけて　$a^3 - a^2 - a + 1 = 0$

ゆえに

$$\begin{aligned} a^2(a-1) - (a-1) &= 0 \\ (a-1)(a^2-1) &= 0 \\ (a-1)(a+1)(a-1) &= 0 \\ (a-1)^2(a+1) &= 0 \end{aligned}$$

これを解いて　$a = \pm 1$

③ より　$a = 1$ のとき $b = 3$,　$a = -1$ のとき $b = 1$

①，② は異なる放物線であるから　$\boldsymbol{a = -1}$**,** $b = 1$

(答) 問 1 [6]　問 2 [2]

[B]

$$x + y + 3z - 11 = 0 \quad \cdots ①$$
$$3x - y + z - 5 = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を加えて　$4x + 4z - 16 = 0$

ゆえに　$z = 4 - x \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して　$x + y + 3(4 - x) - 11 = 0$

ゆえに　$y = 2x - 1 \quad \cdots ④$

$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ であるから，③，④ より

$4 - x \geqq 0$ かつ $2x - 1 \geqq 0$　ゆえに　$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 4} \quad \cdots ⑤$

③，④ より

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + (2x - 1)^2 + (4 - x)^2 \\ &= 6x^2 - 12x + 17 \\ &= 6(x^2 - 2x) + 17 \\ &= 6\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 17 \\ &= 6(x - 1)^2 + 11 \end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲において，$x = 4$ で**最大値 65**，$x = 1$ で**最小値 11** をとる．

(答) 問 3 [1]　問 4 [4]　問 5 [5]　問 6 [3]

[C] 2 次方程式 $x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)x - 2\sin^2\theta + 1 = 0 \cdots ①$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-(1 + \sqrt{2}\cos\theta)\}^2 - 1 \cdot (-2\sin^2\theta + 1) \\ &= 1 + 2\sqrt{2}\cos\theta + 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 1 \\ &= 2\sqrt{2}\cos\theta + 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= 2(\sqrt{2}\cos\theta + 1) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

異なる 2 つの実数解をもつのは，$D > 0$ のときであるから

$$\sqrt{2}\cos\theta + 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos\theta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，これを解いて　$\boldsymbol{0° < \theta < 135°}$

次に，$y = x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)x - 2\sin^2\theta + 1 \cdots$③ とおくと，この放物線の軸の式は

$$x = -\frac{-2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)}{2\cdot 1} = 1 + \sqrt{2}\cos\theta \quad \cdots④$$

放物線③は下に凸の放物線であるから，2 次方程式①がともに正の解をもつのは

$$D > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 + \sqrt{2}\cos\theta > 0 \quad \text{かつ} \quad x = 0 \text{ のとき } y > 0$$

したがって，②，④から，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ において

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{2}\cos\theta > 0 \\ -2\sin^2\theta + 1 > 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

第 1 式から　$0^\circ < \theta < 135^\circ \quad \cdots⑤$

第 2 式から　$\sin^2\theta - \dfrac{1}{2} < 0$　ゆえに　$\left(\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$

このとき $\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ であるから　$\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0$ より

$$\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから，これを解いて

$$0^\circ < \theta < 45^\circ,\ 135^\circ < \theta < 180^\circ \quad \cdots⑥$$

⑤と⑥の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0^\circ < \theta < 45^\circ}$

放物線③は下に凸の放物線であるから，2 次方程式①が符号の異なる解をもつのは

$$x = 0 \text{ のとき } y < 0 \quad \text{すなわち} \quad -2\sin^2\theta + 1 < 0$$

よって　$\sin^2\theta - \dfrac{1}{2} > 0$　ゆえに　$\left(\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$

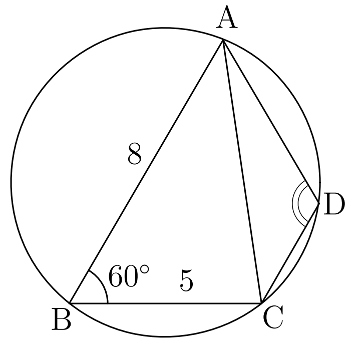
このとき $\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ であるから　$\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ より

$$\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから，これを解いて　　$\boldsymbol{45^\circ < \theta < 135^\circ}$

(答) 問 7 [1]　問 8 [5]　問 9 [1]　問 10 [1]　問 11 [3]　問 12 [5]

[D] △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B\\ &= 8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos 60^\circ\\ &= 64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}\\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　　$\mathbf{AC=7}$

円は，△ABC の外接円であるから，この円の半径を R とすると

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{\mathrm{AC}}{2\sin B}=\dfrac{7}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$

四角形 ABCD は円に内接するから　$D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

　CD $=3$ のとき，DA $=x$ とおいて，△ACD に余弦定理を適用すると

$$7^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos 120^\circ$$
$$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理すると　$x^2+3x-40=0$

ゆえに　$(x-5)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　$x=\mathbf{5}$

∠BAC と ∠ACD は，ともに鋭角であり，BC $=$ DA であるから

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ACD}$$

ゆえに，四角形 ABCD は等脚台形であるから　BD $=$ AC $=\mathbf{7}$

　四角形 ABCD の面積が最大となるのは，△ACD が最大となるときである．

DA $=y$，CD $=z$ とおくと　$\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}yz\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}yz$　$\cdots$①

ここで，△ACD に余弦定理を適用すると　$7^2=y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ$

ゆえに　$49=(y-z)^2+3yz$　よって　$yz=\dfrac{49}{3}-\dfrac{(y-z)^2}{3}$　$\cdots$②

①，② より，$y=z=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$ のとき，① は最大．このとき四角形の面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin 60^\circ+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{49}{3}=\boldsymbol{\frac{169\sqrt{3}}{12}}$$

(答) 問 13 [4]　問 14 [3]　問 15 [2]　問 16 [4]　問 17 [3]　問 18 [5]

[E] (4 桁の整数を作るとき，数字がすべて異なる整数の個数)

千の位は，2，4，6，8 から 1 個を取るから　4 通り

そのおのおのについて，百，十，一の位は，0 と残りの 3 個の計 4 個から 3 個取る順列で　${}_4\mathrm{P}_3 = 4{\cdot}3{\cdot}2 = 24$ (通り)

よって，求める個数は　　$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = \mathbf{96}$ (個)

(4 桁の整数を作るとき，同じ数字が含まれる整数の個数)

千の位は，2，4，6，8 から 1 個を取るから　4 通り

そのおのおのについて，百，十，一の位は，0，2，4，6，8 の計 5 個から 3 個取る重複順列で　$5^3 = 125$ (通り)

よって，求める個数は　　$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = \mathbf{500}$ (個)

この場合，6480 より小さいものは

2□□□，4□□□ の形が　$2 \times 5^3 = 250$ (個)

60□□，62□□ の形が　$2 \times 5^2 = 50$ (個)

640□，642□，644□，646□ の形が　$4 \times 5 = 20$ (個)

よって，求める個数は　$250 + 50 + 20 = \mathbf{320}$ (個)

(答) 問 19 [4]　問 20 [4]　問 21 [5]

[F] 甲が 0 点になる確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{10}$

甲が 1 点になる確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{3}{10} = \mathbf{\dfrac{7}{10}}$

乙が 0 点になる確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{3}$

乙が 1 点になる確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

乙が 3 回行って得点の合計が 2 点になるのは，3 回のうち 2 回だけ 1 点になる確率であるから

$${}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

(答) 問 22 [5]　問 23 [4]　問 24 [2]