

平成 18 年度 西日本リハビリテーション学院
夜間部一般入学試験 (数学 I) 平成 18 年 1 月 28 日

[A] n を自然数とする。 $n^3 - n$ は $(n - \text{問 1})n(n + \text{問 2})$ と変形できるので、これを 6 で割った余りは n によらず 問 3 である。また、 $n^3 + 2n + 1$ を 6 で割った余りは 問 4 または 問 5 (ただし、 $\text{問 4} < \text{問 5}$) である。

問 1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問 4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問 5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

[B] 2 つの整式 $A = x^4 - 14x^3 + ax^2 - 249x + 325$, $B = x^2 - bx + 18$ を考える。 B^2 の x^2 の係数は $b^2 + \text{問 6}$ であり、 $C = A - B^2$ とおくと、 C が x の 1 次式となるのは $a = \text{問 7}$, $b = \text{問 8}$ のときで、 $C = \text{問 9}x + 1$ となる。

問 6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	9	18	27	36	54	72

問 7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	35	45	55	65	75	85

問 8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	5	7	9	11	13

問 9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	3	4	5	6	7

- [C] x についての2次方程式 $x^2 - 2(k-3)x - 2k + 8 = 0$ が整数の解をもつような整数 k の個数を調べたい。この方程式の解は $x = k - 3 \pm \sqrt{(k - \text{問 10})^2 - \text{問 11}}$ であるが、これが整数のとき $(k - \text{問 10})^2 - \text{問 11} = m^2$ (m は 0 以上の整数) とおけ、 $(k - \text{問 10})^2 - m^2$ を因数分解するなどして整数の組 (k, m) を求めると、これらは全部で 問 12 組できる。

問 10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6
問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6
問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	4	6	8	10	12

- [D] 2 次関数 $y = ax^2 + bx - a^2 + 12a + 12$ は $x = 4$ で最大値をとるものとし、そのグラフを C とする。このとき $b = \text{問 13} \times a$ であり、この 2 次関数の最大値が 7 となるときの $a = \text{問 14}$ である。さらにこのときグラフ C が x 軸と交わる 2 点と、 C の頂点を結んで得られる三角形の面積は 問 15 となる。

問 13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-8	-4	-2	2	4	8
問 14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-7	-5	-3	3	5	7
問 15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{6\sqrt{35}}{5}$	$\frac{7\sqrt{35}}{5}$	$\frac{8\sqrt{35}}{5}$	$\frac{12\sqrt{35}}{5}$	$\frac{14\sqrt{35}}{5}$	$\frac{16\sqrt{35}}{5}$

[E] x の 2 次不等式 $x^2 - 2x - 15 < 0 \cdots \textcircled{1}$, $x^2 + (1-a)x - a > 0 \cdots \textcircled{2}$ について,
 $a = -4$ のとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{問 16}} < x < \boxed{\text{問 17}}$
 であり, $a > -1$ のとき, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ をともに満たす整数 x がちょうど 3 個となる
 ような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{問 18}} \leq a < \boxed{\text{問 19}}$ である。

問 16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-6	-5	-4	-3	-2	-1

問 17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-3	-2	-1	1	2	3

問 19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

[F] $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta = \boxed{\text{問 20}}$, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \boxed{\text{問 21}}$,
 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \boxed{\text{問 22}}$ である。

問 20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$

問 21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{8}{3}$	4	8

問 22	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$-\frac{13}{16}$

[G] $\triangle ABC$ において, $\angle A = 120^\circ$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = \sqrt{7}$ とするとき,
 $b^2 + c^2 + bc =$ 問 23 の関係がある。さらに $\triangle ABC$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき,
 $bc =$ 問 24, $b + c =$ 問 25 となり, このうち $b > c$ なるものを求めると
 $b =$ 問 26, $c =$ 問 27 である。

問 23	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	6	7	9	12	14

問 24	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 25	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 26	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3

問 27	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$

解答例

$$\begin{aligned}
 \text{[A]} \quad n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\
 &= n(n+1)(n-1) \\
 &= (n-1)n(n+1)
 \end{aligned}$$

連続する3つの整数の中には、3の倍数と2の倍数が必ず含まれる。

したがって、連続する3つの整数の積は 3×2 で割り切れる。

よって、 $n^3 - n$ を6で割った余りは n によらず0である。

$n^3 + 2n + 1 = (n^3 - n) + (3n + 1)$ から、 $n^3 + 2n + 1$ を6で割った余りは、 $3n + 1$ を6で割った余りに等しい。

$n = 2k - 1$ (k は自然数) のとき

$$\begin{aligned}
 3n + 1 &= 3(2k - 1) + 1 \\
 &= 6(k - 1) + 4
 \end{aligned}$$

$n = 2k$ (k は自然数) のとき

$$\begin{aligned}
 3n + 1 &= 3 \cdot 2k + 1 \\
 &= 6k + 1
 \end{aligned}$$

したがって、 $n^3 + 2n + 1$ を6で割った余りは、1または4である。

(答) 問1 [1] 問2 [1] 問3 [1] 問4 [2] 問5 [5]

$$\begin{aligned}
 \text{[B]} \quad B^2 &= (x^2 - bx + 18)^2 \\
 &= x^4 - 2bx^3 + (b^2 + 36)x^2 - 36bx + 324
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって } C &= A - B^2 \\
 &= (x^4 - 14x^3 + ax^2 - 249x + 325) \\
 &\quad - \{x^4 - 2bx^3 + (b^2 + 36)x^2 - 36bx + 324\} \\
 &= (2b - 14)x^3 + (a - b^2 - 36)x^2 + (36b - 249)x + 1
 \end{aligned}$$

C が x の1次式となるとき $2b - 14 = 0$, $a - b^2 - 36 = 0$

これを解いて $a = 85$, $b = 7$

このとき $36b - 249 = 36 \times 7 - 249 = 3$

したがって $C = 3x + 1$

(答) 問6 [4] 問7 [6] 問8 [3] 問9 [2]

[C] 与えられた 2 次方程式を変形すると

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2(k-3)x &= 2k-8 \\
 x^2 - 2(k-3)x + (k-3)^2 &= 2k-8 + (k-3)^2 \\
 \{x - (k-3)\}^2 &= k^2 - 4k + 1 \\
 x - (k-3) &= \pm\sqrt{k^2 - 4k + 1} \\
 x &= k-3 \pm \sqrt{(k-2)^2 - 3}
 \end{aligned}$$

k は整数であるから , 整数を解にもつとき

$$k^2 - 4k + 1 = (k-2)^2 - 3 = m^2 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおける . これから

$$\begin{aligned}
 (k-2)^2 - m^2 &= 3 \\
 \{(k-2) + m\}\{(k-2) - m\} &= 3 \\
 (k-2+m)(k-2-m) &= 3
 \end{aligned}$$

上式を満たす k, m は , $k-2+m > k-2-m$ に注意して

$$\begin{cases} k-2+m=3 \\ k-2-m=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} k-2+m=-1 \\ k-2-m=-3 \end{cases}$$

これを解いて , $(k, m) = (4, 1), (0, 1)$ の 2 組

(答) 問 10 [2] 問 11 [3] 問 12 [1]

2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解

2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は , 解の公式により

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\
 &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}
 \end{aligned}$$

2 次方程式 $x^2 - 2(k-3)x - 2k + 8 = 0$ について , $a = 1, b' = -(k-3), c = -2k + 8$ を上の公式に代入すると

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-\{-(k-3)\} \pm \sqrt{\{-(k-3)\}^2 - 1 \cdot (-2k + 8)}}{1} \\
 &= k-3 \pm \sqrt{k^2 - 4k + 1}
 \end{aligned}$$

[D] 頂点で最大となるので

$$-\frac{b}{2a} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad b = -8a$$

このとき, $y = ax^2 - 8ax - a^2 + 12a + 12$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} ax^2 - 8ax - a^2 + 12a + 12 &= a(x^2 - 8x) - a^2 + 12a + 12 \\ &= a\{(x-4)^2 - 4^2\} - a^2 + 12a + 12 \\ &= a(x-4)^2 - a^2 - 4a + 12 \end{aligned}$$

最大値が7であるから

$$a < 0, \quad -a^2 - 4a + 12 = 7 \quad \text{これを解いて} \quad a = -5$$

2 次関数 $y = -5(x-4)^2 + 7$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標は,

2 次方程式 $-5(x-4)^2 + 7 = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= \frac{7}{5} \\ x-4 &= \pm\sqrt{\frac{7}{5}} \\ x &= 4 \pm \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

この2つの共有点を結ぶ線分の長さは

$$\left(4 + \frac{\sqrt{35}}{5}\right) - \left(4 - \frac{\sqrt{35}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{35}}{5}$$

x 軸との2つの共有点と頂点を結んでできる三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{35}}{5} \times 7 = \frac{7\sqrt{35}}{5}$$

(答) 問13 [1] 問14 [2] 問15 [2]

[E] ① から $(x+3)(x-5) < 0$

これを解くと $-3 < x < 5 \quad \dots \textcircled{3}$

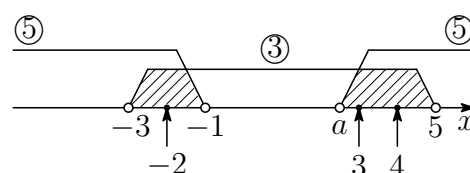
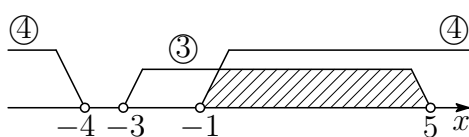
② から $(x+1)(x-a) > 0$

$a = -4$ のとき $x < -4, -1 < x \quad \dots \textcircled{4}$

$a > -1$ のとき $x < -1, a < x \quad \dots \textcircled{5}$

③ と ④ の共通範囲を求めて $-1 < x < 5$

③ と ⑤ をともに満たす整数 x がちょうど 3 個であるとき, その整数は $-2, 3, 4$ である. したがって, 求める a の値の範囲は $2 \leq a < 3$



(答) 問 16 [6] 問 17 [5] 問 18 [5] 問 19 [3]

[F] $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

よって $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

したがって $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$

このとき $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 1 \div \frac{3}{8} = \frac{8}{3}$

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \right) = -\frac{11}{16} \end{aligned}$$

(答) 問 20 [3] 問 21 [4] 問 22 [5]

[G] $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cos 120^\circ$$

$$(\sqrt{7})^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

よって $b^2 + c^2 + bc = 7$

$\triangle ABC$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$bc = 2$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad (b+c)^2 &= b^2 + 2bc + c^2 \\ &= (b^2 + c^2 + bc) + bc \\ &= 7 + 2 = 9 \end{aligned}$$

$b+c > 0$ であるから $b+c=3$

b, c を解とする x の 2 次方程式は $x^2 - (b+c)x + bc = 0$ であるから

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1, 2$$

$b > c$ であるから $b = 2, c = 1$

(答) 問 23 [3] 問 24 [2] 問 25 [3] 問 26 [4] 問 27 [4]

α, β を解とする 2 次方程式 —

α, β を解とする x の 2 次方程式は $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ であるから

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$