平成 18 年度　西日本リハビリテーション学院
昼間部一般入学試験 (数学 I) 平成 17 年 11 月 19 日

[A] $\dfrac{1}{7}$ を小数に直すと $\boxed{\text{問 1}}$ 桁の部分が循環する。また，循環小数 $0.\dot{2}\dot{7}$ を分数に直すと $\boxed{\text{問 2}}$ になる。

問 1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

問 2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{16}$

[B] x が実数全体を動くとき，$t = x^2 + 3x$ のとりうる値の範囲は $t \geqq \boxed{\text{問 3}}$ であり，$y = (x-1)(x-3)(x+4)(x+6)$ を t で表すと $y = (t - \boxed{\text{問 4}})(t - \boxed{\text{問 5}})$ となるので，y の最小値は $\boxed{\text{問 6}}$ となる。

問 3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-9	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	9

問 4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問 5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	14	15	16	17	18	19

問 6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-36	-49	-64	-81	-100	-121

[C] $y = -\dfrac{1}{2}(x-p)^2+3$ のグラフが点 $(-2, -5)$ を通るとき，p の値は $\boxed{\text{問 7}}$ または $\boxed{\text{問 8}}$ である。$p = \boxed{\text{問 8}}$ のとき，$0 \leqq x \leqq 5$ の範囲において y は $x = \boxed{\text{問 9}}$ で最小，$x = \boxed{\text{問 10}}$ で最大となる。

問 7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-2	-4	-6	-8	-10	-12

問 8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	2	4	6	8	10	12

問 9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問 10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

[D] $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。c のとりうる値の最小値は $\boxed{\text{問 11}}$，最大値は $\boxed{\text{問 12}}$ であり，$c = 6$ のとき $(a,\ b)$ の組は全部で $\boxed{\text{問 13}}$ 組ある。

問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	9	10	11	12	13	14

問 13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	3	4	5	6	7	8

[E] $0^\circ < A < 90^\circ$ で，$\cos A = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\sin A =$ $\boxed{\text{問 14}}$，$\tan A =$ $\boxed{\text{問 15}}$，したがって $A + B = 90^\circ$ のとき，$\sin B + \cos B + \tan B =$ $\boxed{\text{問 16}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 15	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 16	$\frac{2+\sqrt{5}}{6}$	$\frac{2+5\sqrt{5}}{6}$	$\frac{4+5\sqrt{5}}{6}$	$\frac{2+\sqrt{5}}{3}$	$\frac{2+5\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4+5\sqrt{5}}{3}$

[F] a を実数とする。三角形 ABC において $\mathrm{BC} = a^2 + a + 1$，$\mathrm{CA} = a^2 - 1$，$\mathrm{AB} = 2a + 1$ であるとき，a の範囲は $a >$ $\boxed{\text{問 17}}$ であり，最も長い辺は $\boxed{\text{問 18}}$，3 つの内角のうち最大角の大きさは $\boxed{\text{問 19}}^\circ$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 17	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3

	[1]	[2]	[3]
問 18	BC	CA	AB

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	75	90	105	120	135	150

[G] 三角形ABCにおいて，$\tan A = \dfrac{4}{3}$，$\mathrm{BC} = 6$である。このとき，$\sin A =$ $\boxed{\text{問 20}}$，外接円の半径は $\boxed{\text{問 21}}$ であり，△ABC の面積の最大値は $\boxed{\text{問 22}}$，そのときの辺 AB の長さは $\boxed{\text{問 23}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 21	$\dfrac{15}{4}$	$\dfrac{45}{16}$	$\dfrac{15}{2}$	$5\sqrt{3}$	$\dfrac{15}{\sqrt{2}}$	15

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	9	12	15	18	21	24

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$

解答例

[A] $\dfrac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$ であるから，**6** 桁の循環小数である．

$x = 0.\dot{2}\dot{7}$ とおくと，$x = 0.272727\cdots$，$100x = 27.272727\cdots$ であるから

$$100x - x = 27$$

すなわち　$99x = 27$

よって　$x = \dfrac{27}{99} = \mathbf{\dfrac{3}{11}}$

(答) 問 1 [4]　問 2 [3]

[B]

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

したがって　$t \geqq -\mathbf{\dfrac{9}{4}}$

$y = (x-1)(x-3)(x+4)(x+6)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} (x-1)(x-3)(x+4)(x+6) &= (x-1)(x+4) \times (x-3)(x+6) \\ &= (x^2+3x-4)(x^2+3x-18) \\ &= (t-4)(t-18) \\ &= t^2 - 22t + 72 \\ &= (t-11)^2 - 11^2 + 72 \\ &= (t-11)^2 - 49 \end{aligned}$$

よって，$y = (t - \mathbf{4})(t - \mathbf{18})$ $\left(t \geqq -\dfrac{9}{4}\right)$ の最小値は

$t = 11$ で最小値 $\mathbf{-49}$ をとる

(答) 問 3 [3]　問 4 [1]　問 5 [5]　問 6 [2]

[C] $y=-\dfrac{1}{2}(x-p)^2+3$ のグラフが点 $(-2,-5)$ を通るから

$$
\begin{aligned}
-5 &= -\frac{1}{2}(-2-p)^2+3 \\
\frac{1}{2}(-2-p)^2 &= 8 \\
(2+p)^2 &= 16 \\
2+p &= \pm\sqrt{16} \\
p &= -2\pm 4 \\
\boldsymbol{p} &= \mathbf{2, -6}
\end{aligned}
$$

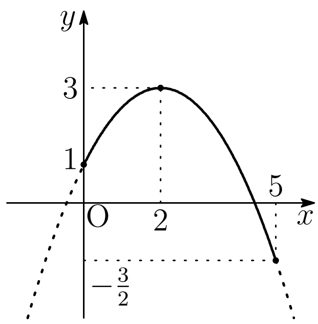
$p=2$ のとき，y は

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$$

となり，$0\leqq x\leqq 5$ の範囲において

$\boldsymbol{x=5}$ で**最小**値 $-\dfrac{3}{2}$ をとり，

$\boldsymbol{x=2}$ で**最大**値 3 をとる．



(答) 問 7 [3]　問 8 [1]　問 9 [6]　問 10 [3]

[D] $a \geqq b \geqq c > 0$ より $0 < \dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{1}{c}$ であるから

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{3}{c}$$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3}$ より　$\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{3}{c}$　これを解いて　$3 < c \leqq 9$

c は自然数であるから，c の**最小値は 4**，最大値は 9 である．

$c = 6$ のとき　　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{6}$

両辺に $6ab$ をかけて　$6b + 6a = ab$

$ab - 6a - 6b + 36 = 36$

整理して　$(a-6)(b-6) = 36$

このとき，$a \geqq b \geqq 6$ より　$a - 6 \geqq b - 6 \geqq 0$ であるから

$a-6$	36	18	12	9	6
$b-6$	1	2	3	4	6

したがって，求める $(a,\ b)$ の組は

$$(a,\ b) = (42,\ 7),\ (24,\ 8)\ (18,\ 9),\ (15,\ 10),\ (12,\ 12)$$

の **5 組**である．

(答) 問 11 [2]　問 12 [1]　問 13 [3]

[E] $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

このとき　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

$B = 90^\circ - A$ であるから

$$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{2}{3}$$
$$\tan B = \tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

このとき　$\sin B + \cos B + \tan B = \dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{4 + 5\sqrt{5}}{6}}$

(答) 問 14 [6]　問 15 [3]　問 16 [3]

[F]

$$\mathrm{BC} = a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$
$$\mathrm{CA} = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$
$$\mathrm{AB} = 2a + 1$$

辺の長さは正であるから

$$(a+1)(a-1) > 0 \quad \text{を解いて} \quad a < -1,\ 1 < a \quad \cdots ①$$
$$2a + 1 > 0 \quad \text{を解いて} \quad a > -\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a > 1}$　$\cdots$③

$$\mathrm{BC} - \mathrm{CA} = (a^2 + a + 1) - (a^2 - 1) = a + 2$$
$$\mathrm{BC} - \mathrm{AB} = (a^2 + a + 1) - (2a + 1) = a^2 - a = a(a-1)$$

$a > 1$ のとき，$a + 2 > 0$，$a(a-1) > 0$ となるから

$$\mathrm{BC} - \mathrm{CA} > 0,\ \mathrm{BC} - \mathrm{AB} > 0$$

したがって　**BC が最大辺**である

このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ が存在するためには　$\mathrm{CA} + \mathrm{AB} > \mathrm{BC}$

$$(a^2 - 1) + (2a + 1) > a^2 + a + 1$$
$$a > 1 \quad \cdots ④$$

③，④ から，求める a の値の範囲は　$a > 1$

最大角は A であるから

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\
&= \frac{(a^2-1)^2 + (2a+1)^2 - (a^2+a+1)^2}{2(a^2-1)(2a+1)} \\
&= \frac{(a^4 - 2a^2 + 1) + (4a^2 + 4a + 1) - (a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}{2(a^2-1)(2a+1)} \\
&= \frac{-2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2(a^2-1)(2a+1)} \\
&= \frac{-(a^2-1)(2a+1)}{2(a^2-1)(2a+1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

したがって，最大角 A の大きさは　**120°**

(答) 問 17 [2]　問 18 [1]　問 19 [4]

[G] $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = 1 \div \left\{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} = \frac{9}{25}$$

$\tan A > 0$ であるから A は鋭角で，$\cos A > 0$ である．

よって　$\cos A = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

また　$\sin A = \tan A \times \cos A = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{5} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

外接円の半径 R は，正弦定理により　$\dfrac{6}{\sin A} = 2R$

よって　$R = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{\sin A} = \dfrac{1}{2} \times 6 \div \dfrac{4}{5} = \boldsymbol{\dfrac{15}{4}}$

$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}bc \quad \cdots①$$

ここで，余弦定理により

$$\begin{aligned} 6^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ 36 &= b^2+c^2-\frac{6}{5}bc \\ 36 &= (b-c)^2+\frac{4}{5}bc \\ bc &= 45-\frac{5}{4}(b-c)^2 \qquad \cdots② \end{aligned}$$

①，② より $b=c$ のとき，S は最大となる．

すなわち，$b=c=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$ のとき，S は**最大値 18** をとる．

(答) 問 20 [6]　問 21 [1]　問 22 [4]　問 23 [3]