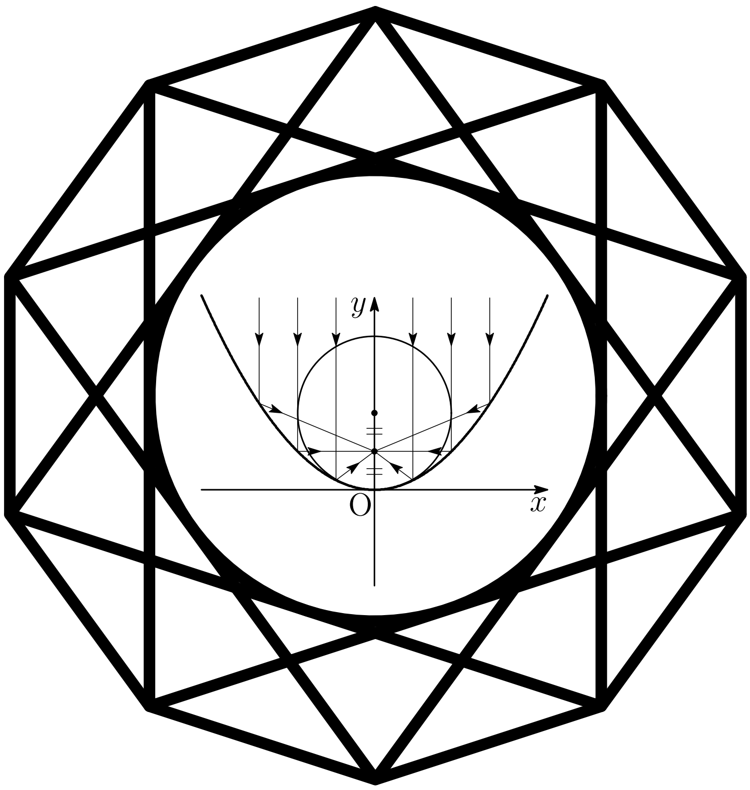
熊本県入試問題　数学正解

大学・短大・医療系

2009年受験用



Typed by LaTeX 2ε

序

本書は，熊本県内の大学・短大・医療系専門学校への進学希望者のための入試問題集である．本書には，熊本県内の大学・短大・医療系専門学校が公開している入試問題 (数学) をすべて掲載した．また平成 21 年 (2009 年) 度入試は，現行の教育課程に移行して 4 年目の入試となる．受験生は過去 3 年分の入試問題から出題傾向を調べ，それに対応した受験準備をしておかなければならない．なお，本書の内容を含め過去 3 年分の入試問題 (数学) を次のサイトから入手することができる．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 熊本県内の大学・短大・医療系専門学校 (リハビリ・高看) が公開した平成 20 年 (2008 年) 度入試問題 (数学) をすべて掲載した．

2. 試験日程や試験時間を調べ掲載した．なお，複数の教科を同時に受験する入学試験については，試験時間を省略した．

3. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

また，本書の姉妹版である「熊本県入試問題　英語正解　大学・短大・医療系」も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/eng.html

平成 20 年 7 月　編者

目 次

第 1 章　大学・短大

本書に掲載した平成 20 年度 (2008) 入学試験問題は次のとおりである.

本書に掲載した 2008 年度入学試験問題		
学校名	**試験科目**	**試験日**
熊本大学 (文系一般 2 次前期)	I・II・A・B	2/25
熊本大学 (理系一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
熊本大学 (理学部一般 2 次後期)	I・II・III・A・B・C	3/12
熊本県立大学 (一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
崇城大学 (普通高校推薦)	I・II	11/9,10
崇城大学 (専門高校推薦)	I	11/9,10
崇城大学 (一般前期・後期)	I・II・A・B	1/31，2/1・3/14
東海大学 (S 方式)	I・II・A(総合経営学部)	2/1
	I・II・A・B(産業工学部)	2/1
東海大学 (A 方式・B 方式)	I・II・A(総合経営学部)	2/7,8,9・2/28
	I・II・A・B(産業工学部)	2/9,10,11・2/28
	I・II・A・B(農学部)	2/9,10,11・2/28
熊本学園大学 (一般 A 日程)	I・II・A	2/9,10,11,12,13
熊本保健科学大学 (一般推薦)	I・A	11/17
熊本保健科学大学 (一般)	I・II(衛生技術・理学療法)	2/4
	I・A(看護・作業療法)	2/4
九州看護福祉大学 (一般)	I・A	2/1,2,3
九州ルーテル学院大学 (一般)	I	2/9，3/8
熊本県立技術短期大学校 (推薦)	I	9/23・11/25
熊本県立技術短期大学校 (一般)	I・II	2/10

なお，学校ごとの入試問題 (3 年分) を次のサイトから入手することができる.

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

1.1 熊本大学

1.1.1 二次前期文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻)120分

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = a\cos\theta - 2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$，$m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ と $m(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を3以上の自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y = 4x^2 + 3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ ($p \neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と2つの接線 l，m で囲まれた面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n = n + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，$b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a\cos\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta + a\cos\theta - 2$ であるから
$\cos\theta = x$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

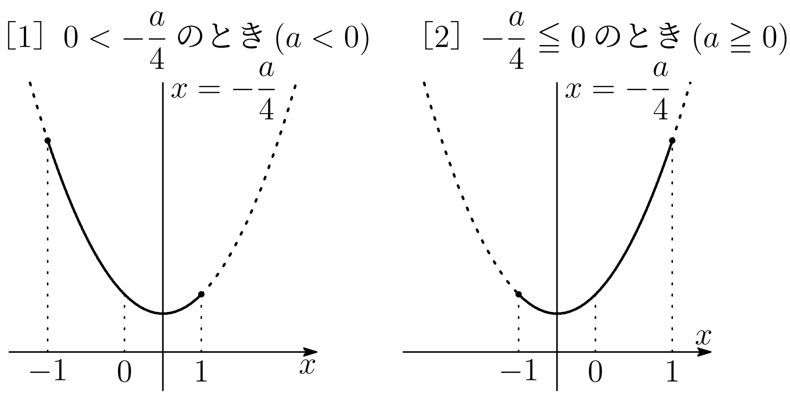
$$y = 2x^2 + ax - 2 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ゆえに，この関数のグラフは下に凸の放物線で，
軸は $x = -\dfrac{a}{4}$ である．$-1 \leqq x \leqq 1$ の中央は　$x = 0$
最大値 $M(a)$ は，次の 2 つの場合に分けて求める．

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

[1] $0 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < 0$ のとき
$x = -1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2(-1)^2 + a(-1) - 2 = -a$
[2] $-\dfrac{a}{4} \leqq 0$　すなわち　$a \geqq 0$ のとき
$x = 1$ で最大値をとるから　$M(a) = 2\cdot1^2 + a\cdot1 - 2 = a$



したがって　　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} -a & (a < 0) \\ a & (a \geqq 0) \end{cases}}$

最小値 $m(a)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$　すなわち　$a < -4$ のとき

$x = 1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2{\cdot}1^2 + a{\cdot}1 - 2 = a$

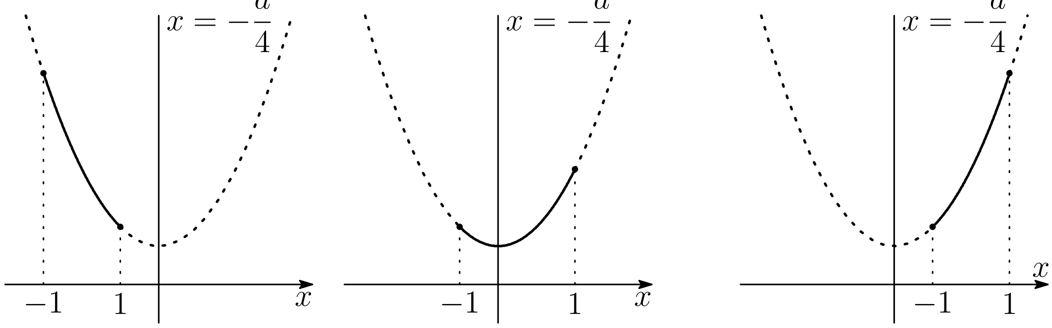
［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$　すなわち　$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

$x = -\dfrac{a}{4}$ で最小値をとるから　$m(a) = -\dfrac{a^2}{8} - 2$

［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$　すなわち　$4 < a$ のとき

$x = -1$ で最小値をとるから　$m(a) = 2{\cdot}(-1)^2 + a{\cdot}(-1) - 2 = -a$

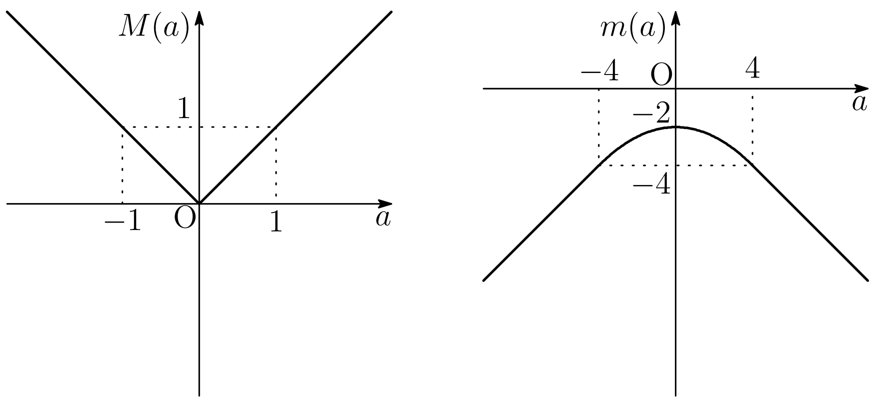
［1］ $1 < -\dfrac{a}{4}$ のとき $(a < -4)$　　［2］ $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1$ のとき $(-4 \leqq a \leqq 4)$　　［3］ $-\dfrac{a}{4} < -1$ のとき $(4 < a)$



したがって　　$$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a & (a < -4) \\ -\dfrac{a^2}{8} - 2 & (-4 \leqq a \leqq 4) \\ -a & (4 < a) \end{cases}}$$

(2) (1) の結果から

$M(a)$ の最小値は 0，　$m(a)$ の最大値は -2



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} k(k-1)_n\mathrm{C}_k &= k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = \boldsymbol{n(n-1)\cdot 2^{n-2}} \end{aligned}$$

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned} k\,{}_n\mathrm{C}_k &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$

したがって，上式および (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \\ &= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} \\ &= \boldsymbol{n(n+1)\cdot 2^{n-2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$

点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ となるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

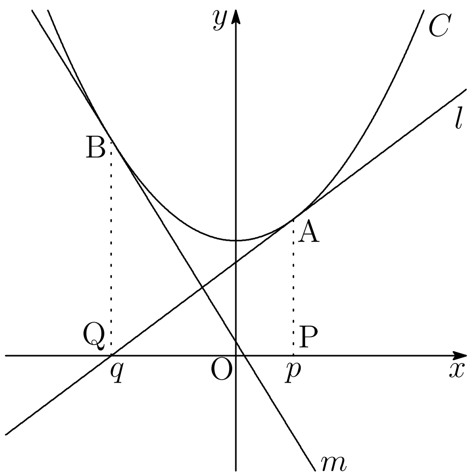
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots ①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots ②$$

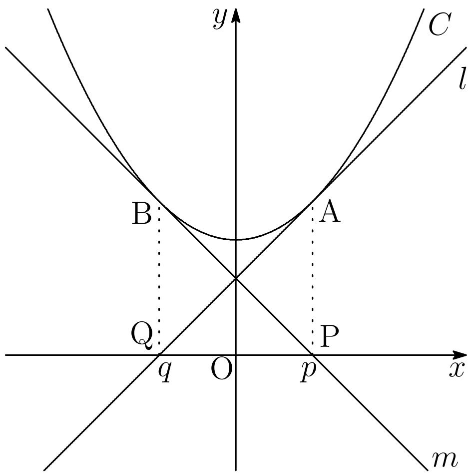
①，② より　$q=\pm p$

$q=p$ のとき，① より

$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

$0=-12p^2+3$



となり，これを解いて　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**

(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$

これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{4}$ (1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$b_n - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k)$$

$$b_n = n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2}$$

したがって　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$

(2) ① により　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \cdots ②$

② − ① から　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k)$$

$$= \frac{1(2^n - 1)}{2-1} - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)}$$

1.1.2 二次前期理系 (理，医，薬，工学部)120 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 放物線 $y=4x^2+3$ を C とする。x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ ($p\neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とする。さらに，点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における C の接線を m とする。以下の問いに答えよ。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) 接線 m が点 P を通るとする。p，q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p，q に対して，放物線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=0,\ a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

によって定められている。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n=n+a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ $(n=2,3,4,\cdots)$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 直線 $y=2x+1$ を l とする。また，行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ を A とする。直線 l 上の各点は A が表す移動によって l 上の点に移るとする。以下の問いに答えよ。

(1) b の値を求め，c を a を用いて表せ。

(2) $a\neq -\dfrac{1}{2}$ ならば，直線 l 上の点 P で，A が表す移動によって P 自身に移るものが存在することを示せ。

(3) 直線 l 上の各点 Q は A が表す移動によって Q と異なる l 上の点に移るとする。a，c の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 放物線 $C:y=\dfrac{1}{4}x^2$ および点 $\mathrm{F}(0,\ 1)$ について考える。以下の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

(1) 放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ $(x > 0$ とする$)$ に対して $\theta = \angle\mathrm{OFA}$，$r = \mathrm{FA}$ とおく。r を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$x_k > 0 \ \text{かつ}\ \angle\mathrm{OFA}_k = \frac{k\pi}{2\pi} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

を満たすようにとる。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{FA}_k$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=4x^2+3$ を微分すると　$y'=8x$
点 $\mathrm{A}(p,\ 4p^2+3)$ における接線 l の傾きは $8p$ となるから，その方程式は

$$y-(4p^2+3)=8p(x-p)$$

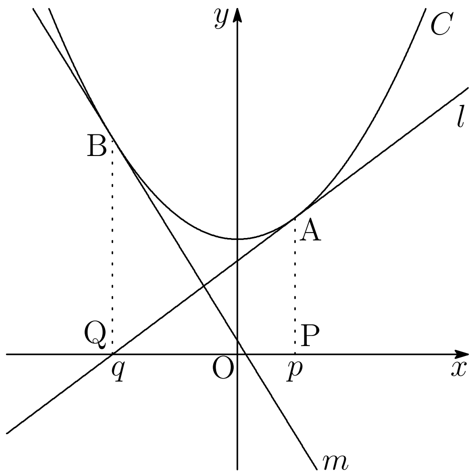
すなわち　$y=8px-4p^2+3$

l は $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4p^2+3 \quad \cdots ①$$

$p\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{4p^2-3}{8p}}$$



(2) 点 $\mathrm{B}(q,\ 4q^2+3)$ における接線 m の方程式は，(1) と同様にして

$$y=8qx-4q^2+3$$

を得る．これが点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るから

$$0=8pq-4q^2+3 \quad \cdots ②$$

①，② より　$q=\pm p$

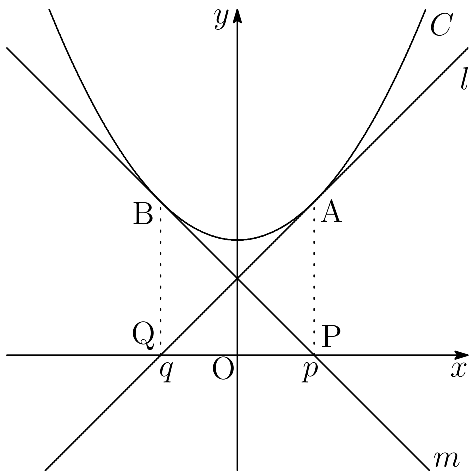
$q=p$ のとき，① より

$4p^2+3=0$ となり，不適

$q=-p$ のとき，① より

$0=-12p^2+3$

となり，これを解いて　　$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)}$ **(複号同順)**



(3) (2) の結果から，2 本の接線の方程式は　$y=4x+2$，$y=-4x+2$
これらの接線と放物線で囲まれた部分は，y 軸に関して対称であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{(4x^2+3)-(4x+2)\}\,dx\\
&=2\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2\,dx\\
&=2\left[\frac{1}{2\cdot3}(2x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = b_n - n$ であるから，これを数列 $\{a_n\}$ の漸化式に代入すると

$$b_n - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - k)$$

$$\begin{aligned} b_n &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

したがって　$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $\cdots$①

(2) ① により　$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\cdots$②

② − ① から　$b_{n+1} - b_n = b_n$　ゆえに　$b_{n+1} = 2b_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = 1 + a_1 = 1 + 0 = 1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

(3) $a_n = b_n - n$ により，(2) の結果から　$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} - n}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1} - k) \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2-1} - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 1 - \frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) l 上の 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の位置ベクトルを $\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．
これら 2 点の A による像 $A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上にあれば，A による l 上の任意の点 $(1-s)\vec{p}+s\vec{q}$ (s は実数) の像

$$A((1-s)\vec{p}+s\vec{q}) = (1-s)A\vec{p}+sA\vec{q}$$

も l 上にある．ゆえに，$A\vec{p}$，$A\vec{q}$ が l 上の点であることを満たせばよい．
A による 2 点 P(0, 1)，Q(1, 3) の像は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3a \\ b+3c \end{pmatrix}$$

であり，これらが共に l 上にあるから

$$c = 2a+1, \quad b+3c = 2(2+3a)+1$$

上の第 1 式を第 2 式に代入して，$b=2$ を得る．
したがって　　$\boldsymbol{b=2,\ c=2a+1}$

(2) 不動点の表す図形と直線 l の交点が存在することを示せばよい．

解説

座標平面上の点 V($\vec{v}$) に対して，$A\vec{v}=\vec{v}$ を満たすとき，点 V($\vec{v}$) は A による**不動点**という．このとき，$A(k\vec{v})=k\vec{v}$ (k は実数) であるから，原点 O と V を通る直線上のすべての点が不動点である．

$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ による不動点を V($\vec{v}$) とすると

$A\vec{v}=\vec{v}$ により　　$(A-E)\vec{v}=\vec{0}$

ゆえに　　$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$

よって，不動点の表す図形は，法線ベクトルが $(1,\ a)$ で原点を通る直線

$$x+ay=0$$

である．これと l は，$a \neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，交点 $\left(-\dfrac{a}{2a+1},\ \dfrac{1}{2a+1}\right)$ をもち，これが，示す l 上の不動点の座標である．

補足

A による不動点 $\mathrm{V}(\vec{v})$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ が存在するとき，$A\vec{v} = \vec{v}$ により，$\vec{v}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである．
実際，$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2 - (2a+3)\lambda + 2a + 2 = 0$ が 1(固有値) を解にもつ (16 ページの固有値と固有ベクトルを参照).

(3) l 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ の位置ベクトルを $\vec{p}$，l の方向ベクトルを $\vec{u} = (1,\ 2)$ とすると，l は媒介変数 t を用いて $\vec{p} + t\vec{u}$ と表される．このとき，l 上の 2 点 $\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{p} + \vec{u})$ は，A によりそれぞれ P，Q と異なる l 上の点に移るので

$$A\vec{p} = \vec{p} + t_0\vec{u} \qquad (t_0 \neq 0)$$
$$A(\vec{p} + \vec{u}) = \vec{p} + t_1\vec{u} \qquad (t_1 \neq 1)$$

上の 2 式から　　$A\vec{u} = (t_1 - t_0)\vec{u} \quad \cdots ①$
これらの式により，A による $\vec{p} + t\vec{u}$ の像は

$$\begin{aligned} A(\vec{p} + t\vec{u}) &= A\vec{p} + tA\vec{u} \\ &= \vec{p} + t_0\vec{u} + t(t_1 - t_0)\vec{u} \\ &= \vec{p} + \{t_0 + (t_1 - t_0)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

このとき，すべての実数 t に対して　　$t_0 + (t_1 - t_0)t \neq t$
すなわち，すべての実数 t に対して　　$t_0 + (t_1 - t_0 - 1)t \neq 0 \quad \cdots ②$
$t_1 - t_0 - 1 \neq 0$ ならば，$t = -\dfrac{t_0}{t_1 - t_0 - 1}$ のとき ② を満たさない.
よって，$t_1 - t_0 - 1 = 0$ のとき，$t_0 \neq 0$ であるから ② を満たす.
ゆえに　　$t_1 - t_0 = 1$
これを ① に代入して　　$A\vec{u} = \vec{u}$
したがって　　$(A - E)\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$　　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c = 0}$

直線 ℓ が存在して，ℓ 上の任意の点 P について，$f(\mathrm{P}) \in \ell$ となるとき，ℓ を f の**不動直線**という．① から不動直線の方向ベクトル $\vec{u}$ は，行列 A の固有ベクトルであることがわかる．

【別解】

l 上の点 P(0, 1) の位置ベクトルを $\vec{p}$，l の方向ベクトルを $\vec{u} = (1,\ 2)$ とする．
A により P($\vec{p}$) は，P と異なる l 上の点に移るので

$$A\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+1 \end{pmatrix} = \vec{p} + a\vec{u} \quad (a \neq 0)$$

また，A により $\vec{u}$ は

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 2a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 \\ 4a+4 \end{pmatrix} = (2a+2)\vec{u}$$

l は媒介変数 t を用いて $\vec{p} + t\vec{u}$ と表される．ゆえに，A による $\vec{p} + t\vec{u}$ の像は，

$$\begin{aligned} A(\vec{p} + t\vec{u}) &= A\vec{p} + tA\vec{u} \\ &= \vec{p} + a\vec{u} + t(2a+2)\vec{u} \\ &= \vec{p} + \{a + (2a+2)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

このとき，すべての実数 t に対して　　$a + (2a+2)t \neq t$
すなわち，すべての実数 t に対して　　$a + (2a+1)t \neq 0 \quad \cdots (*)$
$2a+1 \neq 0$ ならば，$t = -\dfrac{a}{2a+1}$ のとき $(*)$ を満たさない．
よって，$2a+1 = 0$ のとき，$a \neq 0$ であるから $(*)$ を満たす．
ゆえに　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}}$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{c = 0}$

【図形的な解説】

$\vec{p} + t\vec{u}$ の A による像は $\vec{p} + a\vec{u} + (2a+2)t\vec{u}$ であり，これらの点をそれぞれ R，S とする．R，S を時間 t の関数と考えると $(-\infty < t < \infty)$，R，S は l 上を等速で運動する．

1. $2a+2 > 0,\ 2a+2 \neq 1$ のとき，S は R と同方向に運動する．
2. $2a+2 < 0$ のとき，S は R と逆方向に運動する．
3. $2a+2 = 0$ のとき，S は定点である．
4. $2a+2 = 1$ のとき，R と S の速度は等しく，それぞれ R($\vec{p}+t\vec{u}$)，S($\vec{p}+(t+1)\vec{u}$) である．

1〜3 のとき，R と S が一致する点，すなわち不動点を l 上にもつ．4. のとき，l 上には不動点をもたないが，$A\vec{u} = (2a+2)\vec{u}$ より，$\vec{u}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルであるから，座標平面上の点 U($\vec{u}$) と原点 O を結ぶ直線上に不動点をもつ．

固有値と固有ベクトル

1 次変換の問題は，固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので，このことについて簡単にまとめておく．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \cdots ①$$

を満たすベクトル $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$，スカラー λ が存在するとき，$\vec{v}$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

① より $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ となり，$\vec{v} \neq \vec{0}$ であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

すなわち　$\boldsymbol{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0} \quad \cdots ②$

が成り立つ．② を A の**固有方程式**という．② の解を α，β とし，$\lambda = \alpha$ に対する固有ベクトルを $\vec{p}$，$\lambda = \beta$ に対する固有ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p} \quad \cdots ③$$

$$A\vec{q} = \beta\vec{q} \quad \cdots ④$$

このとき，次が成り立つ．

$\boldsymbol{\alpha \neq \beta}$ のとき，$\boldsymbol{\vec{p} \not\parallel \vec{q}}$ である．　$\cdots (*)$

証明　$\vec{p}/\!/\vec{q}$ と仮定すると，零でないスカラー k を用いて $\vec{q} = k\vec{p}$ と表すことができるので，これを ④ に代入すると

$$A(k\vec{p}) = \beta(k\vec{p})$$

$k \neq 0$ より　$A\vec{p} = \beta\vec{p} \quad \cdots ⑤$

③，⑤ から，$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$ を得る．これは，$\alpha \neq \beta$，$\vec{p} \neq \vec{0}$ に反するので，$(*)$ が成り立つ．　**証終**

不動点と不動直線

熊本大学でも 1 次変換が復活したばかりで，本年度の出題は標準的なものであった．かって，1 次変換は入試問題の花形であり，固有値と固有ベクトルを踏まえた出題が目立った．次のような証明問題も出題された．**f による原点を通らない不動直線があるとき，座標平面上に f による原点以外の不動点が存在する** (東京医科歯科大学 1980 年)．**f による原点以外の不動点をもつとき，f による不動直線で原点を通らないものが存在する** (東京大学理系 1982 年)．

定理 1

l を 1 次変換 f による原点を通らない不動直線とするとき，f による不動点で原点でない点が存在する．

証明 f の表す行列を A，l を $\vec{p}+t\vec{u}$ とする ($\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\not\parallel\vec{p}$，$t$ は媒介変数)．
f による l 上の 2 点 $\mathrm{P}_0(\vec{p})$，$\mathrm{P}_1(\vec{p}+\vec{u})$ の像は

$$\begin{aligned} A\vec{p} &= \vec{p}+t_0\vec{u} &\qquad (t_0\text{は実数})\\ A(\vec{p}+\vec{u}) &= \vec{p}+t_1\vec{u} &\qquad (t_1\text{は実数}) \end{aligned}$$

上の 2 式から　$A\vec{u}=(t_1-t_0)\vec{u}\quad\cdots①$
これらの式により，A による $\vec{p}+t\vec{u}$ の像は

$$\begin{aligned} A(\vec{p}+t\vec{u}) &= A\vec{p}+tA\vec{u}\\ &= \vec{p}+t_0\vec{u}+t(t_1-t_0)\vec{u}\\ &= \vec{p}+\{t_0+(t_1-t_0)t\}\vec{u} \end{aligned}$$

これから　$A(\vec{p}+t\vec{u})-(\vec{p}+t\vec{u})=\{t_0+(t_1-t_0-1)t\}\vec{u}\quad\cdots②$

[1] $t_1-t_0-1\neq 0$ のとき，② から l 上の $t=-\dfrac{t_0}{t_1-t_0-1}$ に対応する点が不動点である．

[2] $t_1-t_0-1=0$ のとき，① から，$A\vec{u}=\vec{u}$
よって，$\mathrm{U}(\vec{u})$ と原点 O を通る直線上の原点を除く点が示す不動点である．　**証終**

定理 2

1 次変換 f による原点以外の不動点をもつとき，f による不動直線で原点を通らないものが存在する．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面上の 1 次変換を f とする．原点以外のある点 P が f によって P 自身に移されるならば，原点を通らない直線 ℓ であって，ℓ のどの点も f によって ℓ の点に移されるようなものが存在することを証明せよ．　(東京大学理系 1982 年)

証明　点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ $(\vec{p} \neq \vec{0})$ とすると，$\vec{p}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである．ゆえに，A の 2 つの固有値を 1，β とおく．

$\underline{\beta \neq 1 \text{ のとき}}$，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ とすると，$\vec{u} \not\parallel \vec{p}$ であるから，直線

$$k\vec{p} + t\vec{u} \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない定数}, t \text{ は媒介変数})$$

は f による原点を通らない不動直線である．

$\underline{\beta = 1 \text{ のとき}}$，$A$ の固有方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ は重解 1 をもつので，解と係数の関係により

$$a + d = 2, \quad ad - bc = 1$$

第 1 式から　$d = 2 - a \quad \cdots ①$

① を第 2 式に代入して整理すると

$$bc = -(a-1)^2 \quad \cdots ②$$

$\vec{e}_1 = (1,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1)$ とおき，② より，次の 4 つの場合に分ける．

［1］ $\underline{a \neq 1 \text{ のとき}}$，$bc \neq 0$ であるから，①，② より

$$A - E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ -\dfrac{(a-1)^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{v} = (b,\ 1-a)$ は固有値 1 に対する固有ベクトルで，$\vec{v} \not\parallel \vec{e}_2$ である．さらに

$$(A - E)\vec{e}_2 = \vec{v} \quad \text{すなわち} \quad A\vec{e}_2 = \vec{e}_2 + \vec{v}$$

よって　$k\vec{e}_2 + t\vec{v} \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない定数}, t \text{ は媒介変数})$

は f による原点を通らない不動直線である．

［2］ $\underline{a=1,\ b \neq 0,\ c=0\ \text{のとき}}$，① より

$$A-E=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{e_1}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルである．さらに

$$(A-E)\vec{e_2}=b\vec{e_1} \quad \text{すなわち} \quad A\vec{e_2}=\vec{e_2}+b\vec{e_1}$$

よって　　$k\vec{e_2}+t\vec{e_1}$　(k は 0 でない定数, t は媒介変数)

は f による原点を通らない不動直線である．

［3］ $\underline{a=1,\ b=0,\ c \neq 0\ \text{のとき}}$，① より

$$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

上式より，$\vec{e_2}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルである．さらに

$$(A-E)\vec{e_1}=c\vec{e_2} \quad \text{すなわち} \quad A\vec{e_1}=\vec{e_1}+c\vec{e_2}$$

よって　　$k\vec{e_1}+t\vec{e_2}$　(k は 0 でない定数, t は媒介変数)

は f による原点を通らない不動直線である．

［4］ $\underline{a=1,\ b=0,\ c=0\ \text{のとき}}$，① より，
$A=E$ となるので，f は恒等変換である．
よって，原点を通らないすべての直線が f による不動直線である．**証終**

[別証] (多くの受験参考書にある代表的な解説)

$f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ なので，直線 OP 上の点はすべて不動点になる．OP 上にない点 Q をとり，その像 Q′ を考える．このとき，次のように場合分けをする．

［1］ Q′ = Q または 直線 QQ′ が直線 OP に平行であるとき，Q を通り直線 OP に平行な直線を ℓ とすればよい．

［2］ 直線 QQ′ が直線 OP と原点以外の点 R で交わるとき (R は不動点)，直線 QR を ℓ とすればよい．

［3］ Q′ が直線 OQ 上にあるとき．P を通り OQ に平行な直線を ℓ とすればよい． **[証終]**

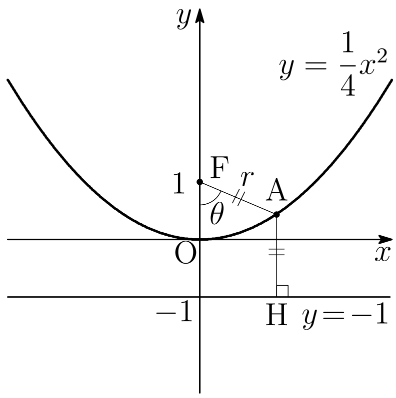
【感想】

1982 年の東大の 1 次変換の問題については，多くの書籍で上の別証と類似した解説ばかりで，A による f の振る舞いが見えてこない．

今回の熊大の 1 次変換の (3) は，(2) の結論によりロジックから $a=-\frac{1}{2}$ が求まり，これを (1) の結果に代入するだけで答えを出すことができる．

しかしながら，問題の本質を捉えて解説することが何よりも重要であると考えて証明を付けた．

4 (1) Fは放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の焦点であり，準線の方程式は $y=-1$ である.



右の図から，放物線上の点Aの y 座標は

$$y=1-r\cos\theta$$

Aから準線に下ろした垂線AHの長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=(1-r\cos\theta)-(-1)\\&=2-r\cos\theta\end{aligned}$$

放物線上の点Aについて，FA = AHであるから

$$r=2-r\cos\theta$$　これを解いて　$$\boldsymbol{r=\frac{2}{1+\cos\theta}}$$

(2) (1)の結果から　$\mathrm{FA}_k=\dfrac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}\\&=\int_0^1\frac{2}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}\,dx\\&=\int_0^1\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\,dx\\&=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi x}{4}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{4}{\pi}}\end{aligned}$$

1.1.3 二次後期 (理学部)

1 $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(問 1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(問 2) $B = P^{-1}AP$ を求めよ。

(問 3) 自然数 n に対して，B^n と A^n を求めよ。

2 数列 $\{a_k\}$ を定積分

$$a_k = \int_0^k x \sin(k(k+1)\pi x)\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義するとき，次の問いに答えよ。

(問 1) 一般項 a_k を求めよ。

(問 2) $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。

3 関数 $f(x) = kx^3 - 2kx + 1$ について，次の問いに答えよ。

(問 1) $x \geqq 0$ のとき，つねに $f(x) \geqq 0$ となるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(問 2) $y = f(x)$ のグラフが $x \geqq 0$ のとき，k の値によらずに通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を求めよ。ただし，$0 \leqq a < b$ とする。

(問 3) $k > 0$ のとき，線分 AB と $y = f(x)$ のグラフによって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問1) $\det P = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1 \neq 0$ より P は逆行列をもつ

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

(問2) 問1の結果より

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

(問3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を n 乗すると　$B^n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{2^n} \end{pmatrix}$

また，$B = P^{-1}AP$ の両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}AA\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2+3\cdot 2^n} & \boldsymbol{6-3\cdot 2^{n+1}} \\ \boldsymbol{-1+2^n} & \boldsymbol{3-2^{n+1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解説 問1の $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ について，$\vec{u}$, $\vec{v}$ はそれぞれ A 固有値1および2の固有ベクトルである．

$$A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & 2\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

上式から　$AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　したがって　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

スペクトル分解

一般に，行列 A が異なる 2 つの固有値 α，β をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ とし，行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ であるから (16 ページの固有値と固有ベクトルを参照)，行列 P は正則である．

$\vec{u} = (u_1,\ u_2)$，$\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ のなす角を θ とすると $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\theta &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta)^2 \\ &= ({u_1}^2+{u_2}^2)({v_1}^2+{v_2}^2) - (u_1v_1+u_2v_2)^2 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \end{aligned}$$

$|\vec{u}| > 0$，$|\vec{v}| > 0$，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |u_1v_2 - u_2v_1|$$

行列 $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ について，$\det P = u_1v_2 - v_1u_2$ より

$$|\det P| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

したがって　$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ のとき　$\det P \neq 0$　　$\longleftarrow$ $\theta \neq 0^\circ$，180° より $\sin\theta > 0$

このとき，2 つの 1 次変換を表す行列 F，G を

$$F\vec{u} = \vec{u}, \quad F\vec{v} = \vec{0}, \quad G\vec{u} = \vec{0}, \quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると，次が成り立つ．

$$F^2 = F, \quad G^2 = G, \quad FG = GF = O, \quad F + G = E, \quad A = \alpha F + \beta G$$

証明 $FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$，$F^2P = F(FP) = F\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$

よって，$F^2P = FP$ であり，P は正則であるから　$F^2 = F$ ■

$FGP = F(GP) = F\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$

よって，$FGP = O$ であり，P は正則であるから　$FG = O$ ■

同様にして　$G^2=G$，$GF=O$ ■

$(F+G)P=FP+GP=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{0} & \vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$

よって，$(F+G)P=P$ であり，P は正則であるから　$F+G=E$ ■

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix}\alpha\vec{u} & \beta\vec{v}\end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{0}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\vec{0} & \vec{v}\end{pmatrix} \\ &= \alpha FP+\beta GP \\ &= (\alpha F+\beta G)P \end{aligned}$$

上式から，P は正則であるから，$A=\alpha F+\beta G$ ■

これを，A の**スペクトル分解**という．　**証終**

以上のことから，$A=\alpha F+\beta G$ の両辺を n 乗すると　$A^n=\alpha^nF+\beta^nG$

なお，F，G は，$\alpha F+\beta G=A$，$F+G=E$ により

$$F=\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta},\qquad G=\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$$

今回の出題では A は P により対角化 (行列 B) することができたが，P が与えられていない場合は，$A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ の固有方程式[1]

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ を解いて}\quad \alpha=1,\ \beta=2$$

ゆえに　$F=\dfrac{A-2E}{1-2}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，$G=\dfrac{A-E}{2-1}=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^n &= F+2^nG \\ &= \begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-2+3\cdot2^n & 6-3\cdot2^{n+1}\\ -1+2^n & 3-2^{n+1}\end{pmatrix} \quad ■ \end{aligned}$$

[1] 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$ の解が固有値である．

とくに，A の固有方程式が重解 α をもつとき，解と係数の関係から

$$a+d=2\alpha,\quad ad-bc=\alpha^2$$

これをハミルトン・ケーリーの公式に代入して

$$A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O \quad \text{すなわち} \quad (A-\alpha E)^2=O$$

$B=A-\alpha E$ とおくと，$B^2=O$ である．$A=B+\alpha E$ の両辺を n 乗すると，二項定理により

$$\begin{aligned} A^n &= (B+\alpha E)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B^{n-k}(\alpha E)^k \qquad (B^n=B^{n-1}=\cdots=B^2=O) \\ &= n\alpha^{n-1}B+\alpha^nE \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) (部分積分法を用いる)

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 x\sin k(k+1)\pi x\,dx \\ &= -\int_0^1 x\left\{\frac{\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\right\}'\,dx \\ &= -\left[\frac{x\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\,dx \\ &= -\frac{1}{k(k+1)\pi}+\left[\frac{\sin k(k+1)\pi x}{k^2(k+1)^2\pi^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{k(k+1)\pi} \end{aligned}$$

(問 2) 問 1 の結果から

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{k(k+1)\pi}\right\} \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=-\frac{1}{\pi}$

$\boxed{\textbf{3}}$

(問 1)　$f(x) = kx^3 - 2kx + 1 = k(x^3 - 2x) + 1$ であるから

$g(x) = x^3 - 2x$ とおくと　$g'(x) = 3x^2 - 2$

$x \geqq 0$ のとき，$g'(x) = 0$ とすると　$x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\searrow$	極小 $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ であるから，$k \geqq 0$ でなければならない．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ の最小値は　$-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,k + 1$

ゆえに　$-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,k + 1 \geqq 0$

$k \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 \leqq k \leqq \dfrac{3\sqrt{6}}{8}}$

(問 2)　$y = kx^3 - 2kx + 1$ から　$k(x^3 - 2x) + 1 - y = 0$　$\cdots$①

k の値によらず通る点は，① が k についての恒等式となる $(x,\ y)$ である．

ゆえに　　$x^3 - 2x = 0$，$1 - y = 0$

$x \geqq 0$ であるから　$x = 0, \sqrt{2}$，$y = 1$

よって　　**A(0, 1)，B($\boldsymbol{\sqrt{2}}$, 1)**

(問 3)　問 2 の結果から，線分 AB は　$y = 1\ (0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

$f''(x) = 6kx$ であるから $(k > 0)$，$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において $f''(x) \geqq 0$

したがって，この区間で $y = f(x)$ は下に凸である．

よって，線分 AB と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} \{1 - (kx^3 - 2kx + 1)\}\,dx$$

$$= k\int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x)\,dx$$

$$= k\left[-\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = \boldsymbol{k}$$

1.2 熊本県立大学

1.2.1 二次前期 (環境共生学部居住環境学専攻)

問題 I 2 次方程式 $2x^2 + kx + 5 = 0$ の解のひとつが $x = -1$ であるとき，定数 k の値と他の解を求めよ。

問題 II 問 1 さいころを 2 回投げるとき，出る目の和が 3 となる確率を求めよ。

問 2 さいころを 2 回投げるとき，出る目の和が 4 となる確率を求めよ。

問 3 さいころを 3 回投げるとき，出る目の和が 5 となる確率を求めよ。

問題 III $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ に関する以下の各問に答えよ。

問 1 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問 2 $f(a) = 0$，$1 < a < 2$ を満たす実数 a がひとつだけ存在することを示せ。

問 3 問 2 の a について，3 次関数 $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right) = 0$ を満たすように，b，c，d の値を求めよ。

問題 IV 問 1 原点の周りの角度 θ の回転を表す行列 F を求めよ。

問 2 任意の点を直線 $y = \sqrt{3}x$ について対称な点に移す一次変換を表す行列 G を求めよ。

問 3 行列 FG の表す一次変換により点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ が点 Q_1 に移り，行列 GF の表す一次変換により点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ が点 Q_2 に移るとする。2 点 Q_1，Q_2 の座標を求めよ。

問 4 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，点 Q_1 と点 Q_2 の間の距離の最大値と最小値を求めよ。

解答例

問題 I -1 がこの方程式の解であるから

$$2\cdot(-1)^2 + k\cdot(-1) + 5 = 0$$

これを解くと　$\boldsymbol{k = 7}$

このとき，方程式は　$2x^2 + 7x + 5 = 0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(2x+5) = 0$

よって，他の解は　$\boldsymbol{x = -\dfrac{5}{2}}$

問題 II 2回投げるときのさいころの目の出方は　6^2 (通り)

3回投げるときのさいころの目の出方は　6^3 (通り)

問1 さいころを2回投げるとき，目の和が3となるのは，以下の2通り

1回目	1	2
2回目	2	1

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

問2 さいころを2回投げるとき，目の和が4となるのは，以下の3通り

1回目	1	2	3
2回目	3	2	1

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

問3 さいころを3回投げるとき，目の和が5となるのは，以下の6通り

1回目	1	1	1	2	2	3
2回目	1	2	3	1	2	1
3回目	3	2	1	2	1	1

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$

問題 III 問 1 $f(x)$ を微分して　$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4x + 1}$

問 2 (1) の結果から　$f'(x) = (x-1)(3x-1)$

$1 < x < 2$ において，$f'(x) > 0$ であるから，$f(x)$ はこの区間で単調増加である．また，$f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 1 > 0$ であるから

$$f(a) = 0,\quad 1 < a < 2$$

を満たす実数 a が 1 つだけ存在する．

問 3 $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ の係数が実数であれば，$g\left(-\dfrac{1}{a}\right) = 0$ から

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + b\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + c\left(-\frac{1}{a}\right) + d = 0$$

ゆえに　$$-1 + ab - a^2c + a^3d = 0 \quad \cdots ①$$

を満たす b，c，d であればよいので，b，c，d の組は無数に存在する．

注意

$f(a) = 0$ より　$a^3 - 2a^2 + a - 1 = 0$

$a \neq 0$ であるから　$1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^3} = 0$

ゆえに　$\left(-\dfrac{1}{a}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 + 2\left(-\dfrac{1}{a}\right) + 1 = 0$

これから $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ とするのは早計である．

そこで，**$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ は有理数**であるという条件で解くことにする．

問 2 の結果から

$$a^3 - 2a^2 + a - 1 = 0 \quad \cdots ②$$
$$a(a-1)^2 = 1 \quad \cdots ③$$

を満たす a $(1 < a < 2)$ が無理数であること背理法により示す．

整数 m，n を用いて (m，n は互いに素)，$a = \dfrac{m}{n}$ と表すことができると仮定すると，これを ③ に代入して

$$\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)^2 = 1$$
$$m(m-n)^2 = n^3 \quad \cdots ④$$

n が奇数のとき，④ より m，$m-n$ がともに奇数となるが，これを満たす m，n はない．

n が偶数のとき，m は奇数であるから，$m-n$ は奇数となるので，④ に反する．

ゆえに，a は無理数である．

② より　$a^3 = 2a^2 - a + 1$
これを ① に代入して

$$(2d-c)a^2 + (b-d)a + d - 1 = 0 \quad \cdots ⑤$$

また，① − ② より $(d-1)a^3 + (2-c)a^2 + (b-1)a = 0$
さらに，$a \neq 0$ から

$$(d-1)a^2 + (2-c)a + b - 1 = 0 \quad \cdots ⑥$$

[1] $d-1=0$ のとき，⑥ より　$(2-c)a + b - 1 = 0$
a は無理数，$2-c$，$b-1$ は有理数であるから

$$2-c=0,\ b-1=0$$

よって　　$b=1,\ c=2,\ d=1$

[2] $d-1 \neq 0$ のとき
⑤ $\times (d-1)$ − ⑥ $\times (2d-c)$ より
$\{(d-1)(b-d)-(2d-c)(2-c)\}a + (d-1)^2 - (2d-c)(b-1) = 0$
a は無理数，b，c，d は有理数であるから

$$(d-1)(b-d)-(2d-c)(2-c) = 0 \quad \cdots ⑦$$
$$(d-1)^2 - (2d-c)(b-1) = 0 \quad \cdots ⑧$$

⑧ において，$d-1 \neq 0$ であるから，$2d-c \neq 0$，$b-1 \neq 0$

⑦ において，$2-c=0$ とすると，$b-d=0$ となり，⑥ は

$$(d-1)(a^2+1) = 0$$

これは，$d-1 \neq 0$，a は無理数に反するので　$2-c \neq 0$
さらに，$2d-c \neq 0$ であるから，⑦ より　$b-d \neq 0$
よって，⑦，⑧ から

$$\frac{2d-c}{d-1} = \frac{b-d}{2-c} = \frac{d-1}{b-1}$$

ここで，$b-1=p$，$2-c=q$，$d-1=r$ とおくと，p，q，r は，0 でない有理数である．上式の値を k すると

$$\frac{q+2r}{r} = \frac{p-r}{q} = \frac{r}{p} = k \quad \cdots ⑨$$

$p+q=0$ のとき

$$\frac{p-r}{q} = \frac{p-r}{-p} = -1 + \frac{r}{p} \neq \frac{r}{p}$$

となるので，⑨ に反する．

$\underline{p+q \neq 0}$ のとき，⑨ に加比の理を適用して

$$k = \frac{(p-r)+r}{q+p} = \frac{p}{p+q} \quad \cdots ⑩$$

⑩ を $\dfrac{r}{p} = k$ に代入して　$r = \dfrac{p^2}{p+q}$　$\cdots$ ⑪

⑨ から　$\dfrac{q+2r}{r} = k$

これに ⑩，⑪ を代入して

$$\frac{q + 2 \times \dfrac{p^2}{p+q}}{\dfrac{p^2}{p+q}} = \frac{p}{p+q}$$

ゆえに　$\dfrac{2p^2+pq+q^2}{p^2} = \dfrac{p}{p+q}$

これを整理すると　$p^3+3p^2q+2pq^2+q^3=0$

$q \neq 0$ であるから

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1 = 0 \quad \cdots ⑫$$

$\dfrac{p}{q}$ は有理数であるから，3 次方程式

$$x^3+3x^2+2x+1=0 \quad \cdots ⑬$$

が，有理数の解 $\dfrac{u}{v}$ (u, v は互いに素である整数) をもたなければならない．

ゆえに　$\left(\dfrac{u}{v}\right)^3 + 3\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 + 2\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 + 1 = 0$

$$u^3+3u^2v+2uv^2+v^3=0$$

整理して　$(u+v)^3 = uv^2$

上式において，u，v がともに奇数のとき，u，v の一方が奇数で他方が偶数のとき，そのいずれにおいても成り立たない．
したがって，方程式 ⑬ は有理数の解をもたない．
ゆえに，有理数 b，c，d は存在しない．

よって，求める有理数 b，c，d は　$\boldsymbol{b=1,\ c=2,\ d=1}$

問題 IV 問 1 $F = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{-\sin\theta} \\ \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta} \end{pmatrix}$

問 2 $\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$，$\vec{v} = (-\sqrt{3},\ 1)$ とおく．

$\vec{u}$，$\vec{v}$ は，それぞれ直線 $y = \sqrt{3}\,x$ の方向ベクトルと法線ベクトルであるから，G によって

$$G\vec{u} = \vec{u}, \qquad G\vec{v} = -\vec{v}$$

ゆえに
$$G\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & -\vec{v} \end{pmatrix}$$

よって
$$G\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ は，正則であるから

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

問 3 Q_1 は，FG による Q の像であるから

$$\begin{aligned} FG\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta \\ -\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathrm{Q_2}$ は，GF による Q の像であるから

$$GF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q_1}\left(-\frac{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}{2},\ \frac{-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2}\right)}$

$\boldsymbol{\mathrm{Q_2}\left(\frac{\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2}\right)}$

問 4　問 3 の結果から，　$\overrightarrow{\mathrm{Q_1Q_2}}=\sin\theta(\sqrt{3},\ 1)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\mathrm{Q_1Q_2}=2\sin\theta$

したがって，点 $\mathrm{Q_1}$ と点 $\mathrm{Q_2}$ 間の距離は，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2}}\ \textbf{のとき最大値}\ 2,\qquad \boldsymbol{\theta=0}\ \textbf{のとき最小値}\ 0$$

1.3 崇城大学

1.3.1 推薦試験 1 日目 (普通高校)60 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $(x-1)(x-4)=|x-2|$ を解け。

(2) $\angle\mathrm{A}$ が鈍角である $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=2$ で，面積が $\sqrt{7}$ である。辺 BC の長さを求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2-8x+10$ と直線 $y=-3x+6$ の交点を P，Q とし，O は原点とする。$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 連立不等式 $|2x|+|y|\leqq 4$，$xy\leqq 0$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 領域 D と不等式 $y\geqq x^2+1$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y=4-x^2$ $(0<x<2)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 4-a^2)$ における接線が x 軸と交わる点を Q とし，O は原点とする。次の各問に答えよ。

(1) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 2 つの線分 OP，PQ の長さが等しいとき，$\cos\angle\mathrm{POQ}$ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $\underline{x \geqq 2 \text{ のとき}}$，方程式は

$$(x-1)(x-4) = x-2$$

整理して $\quad x^2 - 6x + 6 = 0$

$x \geqq 2$ より $\quad x = 3 + \sqrt{3}$

(ii) $\underline{x < 2 \text{ のとき}}$，方程式は

$$(x-1)(x-4) = -(x-2)$$

整理して $\quad x^2 - 4x + 2 = 0$

$x < 2$ より $\quad x = 2 - \sqrt{2}$

よって $\quad \boldsymbol{x = 3 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{2}}$

(2) 三角形の面積の公式 $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ に $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{7}$，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 2$ を代入すると

$$\sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sin A \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

これを $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2 A = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 A = \frac{9}{16}$$

$\angle$A は鈍角であるから，$\cos A < 0$ より $\quad \cos A = -\sqrt{\dfrac{9}{16}} = -\dfrac{3}{4}$

余弦定理により

$$\begin{aligned}
\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\
&= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \\
&= 4 + 16 + 12 = 32
\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから $\quad \mathrm{BC} = \sqrt{32} = \boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(3) 放物線 $y = x^2 - 8x + 10$ と直線 $y = -3x + 6$ の共有点の x 座標は,

2 次方程式　$x^2 - 8x + 10 = -3x + 6$

の解であり，これを解いて　$x = 1,\ 4$

これらを $y = -3x + 6$ に代入すると，2 つの交点 P，Q の座標は

$$(1,\ 3),\ (4, -6)$$

このとき　$\mathrm{PQ} = \sqrt{(4-1)^2 + (-6-3)^2} = 3\sqrt{10}$

原点 O から直線 $y = -3x + 6$ $(3x + y - 6 = 0)$ に下ろした垂線の長さ d は

$$d = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

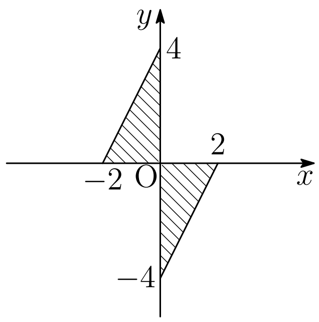
よって　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot d = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \dfrac{6}{\sqrt{10}} = \mathbf{9}$

2 (1) $xy \leqq 0$ から，次の 2 つの場合分けをする．

(i) $\underline{x \geqq 0,\ y \leqq 0\ \text{のとき}}$，$|2x| + |y| \leqq 4$ は

$$2x + (-y) \leqq 4$$

よって　$y \geqq 2x - 4$



(ii) $\underline{x \leqq 0,\ y \geqq 0\ \text{のとき}}$，$|2x| + |y| \leqq 4$ は

$$-2x + y \leqq 4$$

よって　$y \leqq 2x + 4$

(i),(ii) から，D の表す領域は，右の図のとおりである．

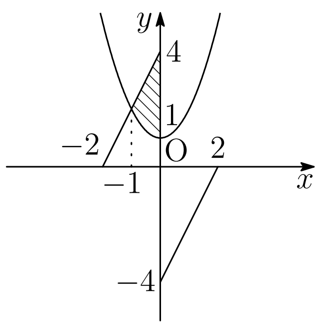
ただし，境界線を含む．

(2) $y = x^2 + 1$ と線分 $y = 2x + 4$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ の共有点の x 座標は，方程式 $x^2 + 1 = 2x + 4$ の解であるから

整理して　　$x^2 - 2x - 3 = 0$

ゆえに　　$(x + 1)(x - 3) = 0$

$-2 \leqq x \leqq 0$ より　　$x = -1$



したがって，領域 D と不等式 $y = x^2 + 1$ の表す領域の共通部分は，右の図の斜線部分である．

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{0} \{(2x+4) - (x^2+1)\} dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x^2+2x+3) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{0} = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $y = 4 - x^2$ を微分すると　$y' = -2x$

点 $\mathrm{P}(a,\ 4-a^2)$ における接線の傾きは　$-2a$

したがって，P における接線の方程式は

$$y - (4-a^2) = -2a(x-a)$$

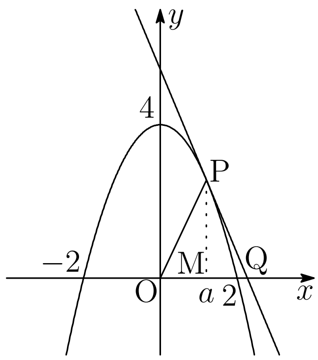
ゆえに　$y = -2ax + a^2 + 4$

Q において $y = 0$ であるから

$$0 = -2ax + a^2 + 4 \quad 0 < a < 2 \text{ に注意して} \quad x = \frac{a^2+4}{2a}$$

よって，Q の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{a^2+4}{2a},\ 0\right)}$

(2) OP = PQ のとき，P から x 軸に下ろした垂線を PM とすると，M は OQ の中点であるから



$$a = \frac{1}{2} \times \frac{a^2+4}{2a}$$
$$a^2 = \frac{4}{3}$$

$a > 0$ より　$a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

したがって，P の座標は　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{8}{3}\right)$

ゆえに　$\mathrm{OP}^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 = \dfrac{76}{9}$

$\mathrm{OP} > 0$ であるから　$\mathrm{OP} = \dfrac{2\sqrt{19}}{3}$

$\angle\mathrm{POQ}$ は，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角であるから，OP および P の x 座標より

$$\cos\angle\mathrm{POQ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \div \frac{2\sqrt{19}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{57}}{19}}$$

1.3.2　推薦試験2日目(普通高校)60分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 2次関数 $y = ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1$ の最大値が3であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\triangle$ABCにおいて，AB $= 5$，BC $= 6$，CA $= 7$である。$\cos A$の値と$\triangle$ABCの面積を求めよ。

(3) 連立不等式 $|\,x - 2y\,| \leqq 1$，$x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を図示せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3点 $(0,\ 0)$，$(8,\ 0)$，$(4, -2)$ を通る円 C と直線 $y = 2x + a$ が接している。次の各問に答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。

(2) 定数 a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2つの放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x(x - 3)$ と $y = x^2 + ax + b$ とは x 軸上の2点で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) 直線 $x = t$ $(0 < t < 3)$ とこの2つの放物線との交点をそれぞれP，Qとし，Oは原点とする。$\triangle$OPQの面積の最大値とそのときの定数 t の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 次関数 $y = ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1$ は最大値をとるので，x^2 の係数 a は

$$a < 0$$

また，その最大値が 3 であるから，2 次方程式

$$ax^2 - 4ax + a^2 + 5a + 1 = 3$$

すなわち　$ax^2 - 4ax + a^2 + 5a - 2 = 0$

は重解をもつので，係数について

$D/4 = 0$ より　$(-2a)^2 - a\cdot(a^2 + 5a - 2) = 0$

整理して　$a^3 + a^2 - 2a = 0$

ゆえに　$a(a+2)(a-1) = 0$

$a < 0$ から　$\boldsymbol{a = -2}$

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{7^2 + 5^2 - 6^2}{2\cdot7\cdot5} = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{35}}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{35}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{19}{35}\right)\left(1 - \frac{19}{35}\right)}$$

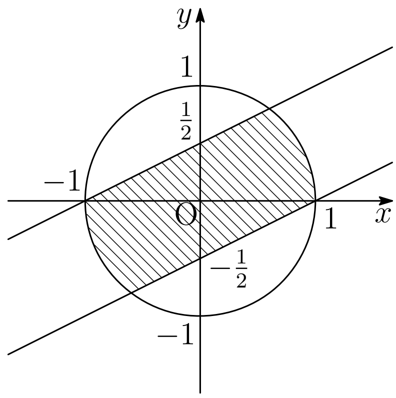
$$= \sqrt{\frac{54}{35} \times \frac{16}{35}} = \frac{3\sqrt{6} \times 4}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{35}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A = \frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\frac{12\sqrt{6}}{35} = \mathbf{6\sqrt{6}}$

(3) $|\,x-2y\,| \leqq 1$ より

$$-1 \leqq x-2y \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

これと $x^2+y^2 \leqq 1$ を同時に満たす領域であるから，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



2 (1) 円 C の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 $(0,\ 0)$ を通るから　　$n=0$

点 $(8,\ 0)$ を通るから　　$8^2+8l+n=0$

点 $(4,-2)$ を通るから　　$4^2+(-2)^2+4l-2m+n=0$

整理すると　　$n=0,\ 8l+n+64=0,\ 4l-2m+n+20=0$

これを解くと　　$l=-8,\ m=-6,\ n=0$

よって，円 C の方程式は

$$x^2+y^2-8x-6y=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(x-4)^2+(y-3)^2=5^2}$$

(2) 直線 $y=2x+a\ (2x-y+a=0)$ は，円 C に接するので，C の中心 $(4,\ 3)$ とこの直線の距離は，円の半径 5 に等しいので

$$\frac{|\,2\cdot 4-3+a\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-5\pm 5\sqrt{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x(x-3)$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式

$$-\frac{1}{2}x(x-3)=0$$

の解であるから，これを解いて　$x=0,\ 3$

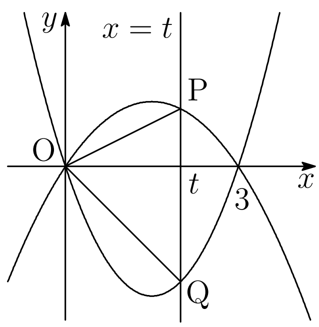
放物線 $y=x^2+ax+b$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式

$$x^2+ax+b=0$$

の解であり，これが 0，3 を解にもつので，解と係数の関係により

$$0+3=-a,\ 0\cdot3=b\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a=-3,\ b=0}$$

(2) 右の図のように，P の y 座標は $-\dfrac{1}{2}t(t-3)$，Q の y 座標は t^2-3t であるから



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=-\frac{1}{2}t(t-3)-(t^2-3t)\\&=-\frac{3}{2}t(t-3)\end{aligned}$$

よって　$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}t\times\mathrm{PQ}\\&=\frac{1}{2}t\times\left\{-\frac{3}{2}t(t-3)\right\}\\&=-\frac{3}{4}t^2(t-3)\end{aligned}$

$\triangle\mathrm{OPQ}=f(t)$ とおくと　$f(t)=-\dfrac{3}{4}(t^3-3t^2)\quad(0<t<3)$

$f(t)$ を微分すると　$f'(t)=-\dfrac{3}{4}(3t^2-6t)=-\dfrac{9}{4}t(t-2)$

したがって，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{t=2}$ のとき**最大値** $f(2)=-\dfrac{3}{4}(2^3-3\cdot2^2)=\mathbf{3}$ をとる．

1.3.3　推薦試験 1 日目 (専門高校)60 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，$a+b$，ab，a^2+b^2 を計算せよ。

(2) 2 次方程式 $x^2-4x-a^2+5a=0$ が重解をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 2x-7 \leqq x-3 \\ x^2-3x \leqq 10 \end{cases}$ を解け。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，AB $=3$，AC $=2\sqrt{5}$，$\tan A=-2$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

(2) BC の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3y^2+2x$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

1 (1) $a+b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5-3}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

$ab=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{1\times 1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

上の 2 式から　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{5})^2-2\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{4}$

(2) 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-2)^2-1\cdot(-a^2+5a) \\ &= a^2-5a+4 \\ &= (a-1)(a-4) \end{aligned}$$

この 2 次方程式が実数解をもつのは，$D=0$ のときであるから

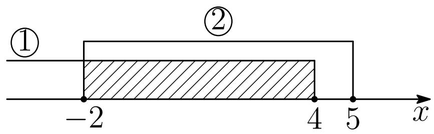
$(a-1)(a-4)=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=1,\ 4}$

(3) 第 1 式から　$2x-x \leqq -3+7$

ゆえに　$x \leqq 4$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+2)(x-5) \leqq 0$

ゆえに　$-2 \leqq x \leqq 5$　$\cdots$②



① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 4}$

2 (1) $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ から

$\dfrac{1}{\cos^2 A}=1+(-2)^2=5$　ゆえに　$\cos^2 A=\dfrac{1}{5}$

$\tan A<0$ であるから A は鈍角で，$\cos A<0$ である．

よって　$\cos A=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また　$\sin A=\tan A\times\cos A=-2\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A \\ &= 3^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= 41 \end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\boldsymbol{\sqrt{41}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 条件より $y^2 = 1 - x^2 \cdots$ ① であるから　$y^2 \geqq 0$

ゆえに　$1 - x^2 \geqq 0$

$x^2 - 1 \leqq 0$

整理して　$(x+1)(x-1) \leqq 0$

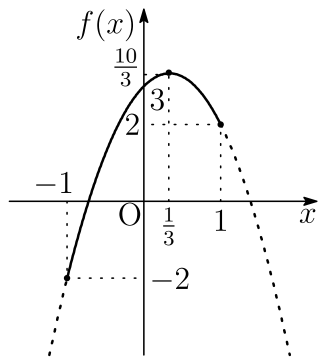
よって　$-1 \leqq x \leqq 1 \quad \cdots$ ②

① から

$$\begin{aligned} 3y^2 + 2x &= 3(1 - x^2) + 2x \\ &= -3x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

これを $f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 2x + 3 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 3 \\ &= -3\left\{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + 3 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$



② において，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{10}{3}}$，$\boldsymbol{x = -1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-2}$ をとる．

1.3.4　推薦試験 2 日目 (専門高校)60 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 3 点 $(0, -1)$，$(1,\ 2)$，$(2, -3)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(2) 不等式 $-9x^2 + 6x + 35 \geqq 0$ を満たす整数 x の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ} + \dfrac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0, -3)$ で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) この 2 次関数の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 辺 AD，BC が平行な台形 ABCD において，AB $=$ 3，AD $=$ 5，BC $=$ 10，$\angle$B $= 60^\circ$ である。次の各問に答えよ。

(1) 対角線 BD の長さを求めよ。

(2) 台形 ABCD の面積を求めよ。

解答例

1 (1) 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが3点 $(0,-1)$，$(1,\ 2)$，$(2,-3)$ を通るから

$$-1=c \quad \cdots ①$$
$$2=a+b+c \quad \cdots ②$$
$$-3=4a+2b+c \quad \cdots ③$$

① を ② に代入して　$a+b=3$　$\cdots$ ④

① を ③ に代入して　$4a+2b=-2$

すなわち　$2a+b=-1$　$\cdots$ ⑤

④，⑤ を解いて　$a=-4,\ b=7$

よって，求める2次関数は　$\boldsymbol{y=-4x^2+7x-1}$

(2) $$-9x^2+6x+35 \geqq 0$$

両辺に -1 をかけて　$9x^2-6x-35 \leqq 0$

ゆえに　$(3x+5)(3x-7) \leqq 0$

よって　$-\dfrac{5}{3} \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}$

したがって，この不等式の満たす整数 x は　**-1，0，1，2**

(3) $$\frac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ}+\frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\div(-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{2}}$$

2 (1) $y=ax^2+bx+c$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標が1，3であるから，x^2 の係数に注意して

$$y=a(x-1)(x-3) \quad \cdots ①$$

とおける．これが点 $(0,-3)$ を通るから

$$-3=a(0-1)(0-3) \qquad \text{ゆえに} \qquad a=-1$$

これを ① に代入すると

$$y=-(x-1)(x-3) \quad \text{すなわち} \quad y=-x^2+4x-3$$

よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=4,\ c=-3}$

(2) (1) から $y = -(x^2 - 4x) - 3$

$$= -\{(x-2) - 2^2\} - 3$$

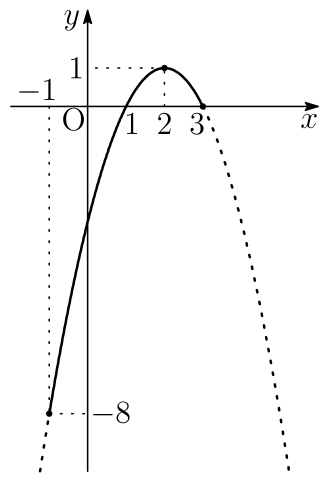
$$= -(x-2)^2 + 1$$

よって，$-1 \leqq x \leqq 3$ において，y は

$\boldsymbol{x = 2}$ **で最大値** $\mathbf{1}$,

$\boldsymbol{x = -1}$ で**最小値** $\mathbf{-8}$

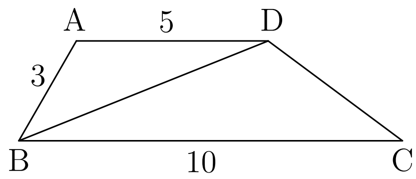
をとる．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) AD//BC であるから

$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$ より $\angle\mathrm{A} = 120^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから $\mathbf{BD = 7}$

(2) A から BC に下ろした垂線の長さ h は

$$h = \mathrm{AB}\sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

台形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}h(\mathrm{AD} + \mathrm{BC}) = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times (5 + 10) = \boldsymbol{\frac{45}{4}\sqrt{3}}$$

1.3.5　前期日程1日目

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　　　　　　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○			○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ とするとき，$x - \dfrac{1}{x}$ の整数部分と小数部分を求めよ。

(2) 関数 $y = (x-2)|\,x+3\,| \quad (-4 \leqq x \leqq 3)$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

(3) a は 1 でない正の数である。$\log_2 a^2 + \log_a 2^3 = 5$ を満たす a の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。放物線 $y = f(x)$ は点 $(2,\ 2)$ において放物線 $y = -x^2 + 5x - 4$ と接線を共有し，さらに，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{17}{6}$ を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 原点を通り，放物線 $y = f(x)$ に接する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 5 項までの和が -85 で，第 16 項から第 20 項までの和が 65 である。次の各問に答えよ。

(1) 初項と公差を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n の最小値とそのときの n の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{4}}$ 直径 4 の円に内接する $\triangle$ABC において，AB $= 1$ で，直径 AD は辺 BC と点 E で交わる。次の各問に答えよ。

(1) $\cos\angle$BAD の値を求めよ。また，AE $= a$ として，BE の長さを a で表せ。

(2) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，EC，AC の長さを求めよ。

$\boxed{\textbf{5}}$ x についての 2 次方程式 $(x-1)(x-2) + (k+a)x + a = 0$ は $k \geqq 1$ であるすべての実数 k に対して実数解をもっている。このとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=2\sqrt{15}$

$2\sqrt{15}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると

$$2\sqrt{15}=a+b \quad \cdots①$$

$2\sqrt{15}=\sqrt{60}$ であるから，$\sqrt{49}<\sqrt{60}<\sqrt{64}$ より

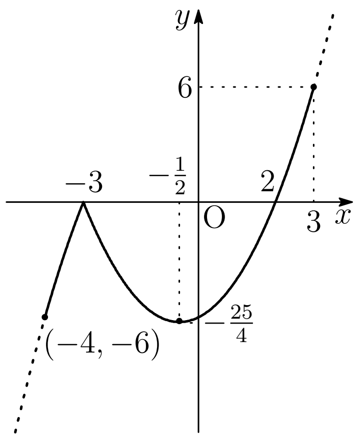
$a=7$　これを ① に代入して　$b=2\sqrt{15}-7$

よって，$\boldsymbol{x-\dfrac{1}{x}}$ **の整数部分は $\mathbf{7}$，小数部分は $\mathbf{2\sqrt{15}-7}$**

(2)

(i) $-4 \leqq x < -3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (x-2)\{-(x+3)\} \\ &= -(x-2)(x+3) \\ &= -x^2-x+6 \\ &= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$



(ii) $-3 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (x-2)(x+3) \\ &= x^2+x-6 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \end{aligned}$$

(i)，(ii) から，$\boldsymbol{x=3}$ **で最大値 $\mathbf{6}$，$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{25}{4}}$**

(3) $\log_2 a^2+\log_a 2^3=5$ から

$$\begin{aligned} 2\log_2 a+\frac{\log_2 2^3}{\log_2 a} &= 5 \\ 2\log_2 a+\frac{3}{\log_2 a} &= 5 \\ 2(\log_2 a)^2-5\log_2 a+3 &= 0 \\ (\log_2 a-1)(2\log_2 a-3) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$\log_2 a=1,\ \dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{a=2,\ 2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-x^2+5x-4$ を微分して　$y'=-2x+5$

この放物線上の点 $(2,\ 2)$ における接線の傾きは　$y'=-2{\cdot}2+5=1$

$f(x)=ax^2+bx+c$ を微分して　$f'(x)=2ax+b$

2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=-x^2+5x+4$ は点 $(2,\ 2)$ において共通の接線をもつので

$f(2)=2$ より　　$4a+2b+c=2$　$\cdots$ ①

$f'(2)=1$ より　　$4a+b=1$　　$\cdots$ ②

$\displaystyle\int_0^1 f(x)=\frac{17}{6}$ から

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx=\frac{17}{6}$$

ゆえに　$$\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^1=\frac{17}{6}$$

すなわち　$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=\frac{17}{6}$$

整理して　$2a+3b+6c=17$　$\cdots$ ③

①，②，③ を解いて　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-3,\ c=4}$

(2) 原点を通り，放物線 $y=x^2-3x+4$ に接する直線を $y=mx$ とすると，2 次方程式

$$x^2-3x+4=mx \quad \text{すなわち} \quad x^2-(m+3)x+4=0$$

は重解をもつので，$D=0$ より

$\{-(m+3)\}^2-4{\cdot}1{\cdot}4=0$

整理して　$m^2+6m-7=0$

すなわち　$(m+7)(m-1)=0$

ゆえに　$m=-7,\ 1$

よって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y=-7x,\ y=x}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 初項を a，公差を d とする．

初項から第 5 項までの和が -85 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)d\}=-85$$

すなわち　$a+2d=-17$　$\cdots$ ①

第 16 項は $a+15d$，第 20 項は $a+19d$ であるから，
第 16 項から第 20 項までの和は (項数 $20-16+1=5$)

$$\frac{1}{2}\cdot 5\{(a+15d)+(a+19d)\}=65$$

すなわち　$a+17d=13$　$\cdots$ ②

①，② を解いて　$a=-21,\ d=2$

よって　**初項 $\boldsymbol{-21}$，公差 $\mathbf{2}$**

(2) (1) の結果から，一般項は　$a_n=-21+(n-1)\cdot 2=2n-23$

ゆえに，$n\leqq 11$ のとき $a_n<0$，$n\geqq 12$ のとき $a_n>0$

したがって，S_n は $\boldsymbol{n=11}$ のとき最小となり，最小値は

$$S_{11}=\frac{1}{2}\cdot 11\{2\cdot(-21)+(11-1)\cdot 2\}=\boldsymbol{-121}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) AD は円の直径であるから　$\angle\text{ABD} = 90^\circ$

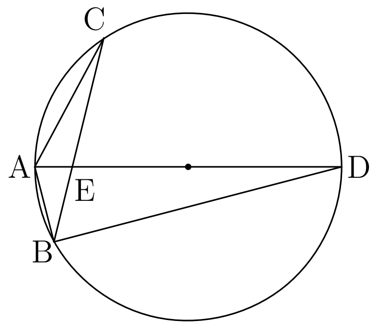
したがって　$\cos\angle\text{BAD} = \dfrac{\text{AB}}{\text{AD}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

$\triangle$ABE に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\text{BE}^2 &= \text{AB}^2 + \text{AE}^2 - 2\text{AB}\cdot\text{AE}\cos\angle\text{BAD}\\ &= 1^2 + a^2 - 2\cdot1\cdot a\cdot\frac{1}{4}\\ &= a^2 - \frac{1}{2}a + 1\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\text{BE} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a + 1}}$

(2) $\triangle$ABD は，$\angle\text{B} = 90^\circ$ の直角三角形であるから



$$\begin{aligned}\text{BD} &= \sqrt{\text{AD}^2 - \text{AB}^2}\\ &= \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}\end{aligned}$$

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\text{ED} = 4 - a = \dfrac{7}{2}$

$a = \dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入して　$\text{BE} = 1$

$\triangle\text{EBD} \backsim \triangle\text{EAC}$ で $\text{BE} : \text{AE} = 1 : \dfrac{1}{2}$ より

$$\text{EC} = \frac{1}{2}\text{ED} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

$$\text{AC} = \frac{1}{2}\text{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{15} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(x-1)(x-2)+(k+a)x+a=0$ を整理すると

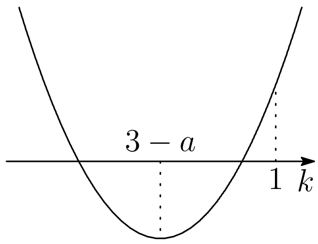
$$x^2+(k+a-3)x+a+2=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=(k+a-3)^2-4(a+2)$$

ゆえに，D は k の2次関数であり，$k \geqq 1$ における D の最小値が0以上であればよいので，次の2つの場合分けをする．

(i) $3-a<1$ すなわち $a>2$ のとき
D は $k=1$ で最小値



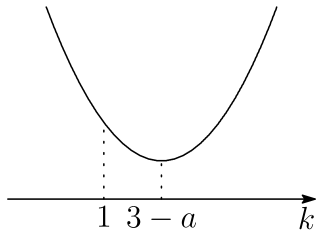
$$(1+a-3)^2-4(a+2)=a^2-8a-4$$

をとるので，$a^2-8a-4 \geqq 0$ を解いて

$$a \leqq 4-2\sqrt{5},\ 4+2\sqrt{5} \leqq a$$

このとき，$a>2$ に注意して　　$4+2\sqrt{5} \leqq a$

(ii) $1 \leqq 3-a$ すなわち $a \leqq 2$ のとき
D は $k=3-a$ で最小値



$$-4(a+2)$$

をとるので，$a \leqq 2$ に注意しながら，

$$-4(a+2) \geqq 0$$

を解いて　　$a \leqq -2$

よって，(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{a \leqq -2,\ 4+2\sqrt{5} \leqq a}$

1.3.6 前期日程 2 日目

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※ 学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○			○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = 2x^2+ax+b$ とこの放物線に原点に関して対称な曲線が点 $(2, -8)$ を共有しているとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) $xy + 3x - 15y - 3 = 0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3) 関数 $y = 3^{4x+2} - 2{\cdot}3^{2x} + 1$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = -|\,x\,|(x-2)$ と直線 $y = -x + 2$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を F とする。また，AF と ED の交点を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とする。次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) △AEG と △DGF の面積比を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ を満たしている。次の各問に答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 A，B$(-1,\ 1)$，C$(2,\ 4)$ を頂点とする △ABC がある。その面積が 6 のとき，点 A の座標と $\tan B$ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 放物線 $y=2x^2+ax+b\cdots$① と原点に関して対称な曲線は

$$-y=2(-x)^2+a\cdot(-x)+b \quad \text{すなわち} \quad y=-2x^2+ax-b\cdots②$$

①，② はともに点 $(2, -8)$ を通るので

$$-8=2\cdot2^2+a\cdot2+b,\ \ -8=-2\cdot2^2+a\cdot2-b$$

ゆえに　$2a+b=-16,\ 2a-b=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-4,\ b=-8}$

(2) $xy+3x-15y-3=0$ から

$$\begin{aligned} xy+3x-15y&=3 \\ xy+3x-15y+3\cdot(-15)&=3+3\cdot(-15) \\ (x-15)(y+3)&=-42 \end{aligned}$$

y は自然数であるから，$y+3\geqq4$ に注意して

$$(x-15,\ y+3)=(-7,\ 6),\ (-6,\ 7),\ (-3,\ 14),\ (-2,\ 21),\ (-1,\ 42)$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (9,\ 4),\ (12,\ 11),\ (13,\ 18),\ (14,\ 39)}$

(3) $3^{2x}=t$ とおくと　$t>0$

また　$y=9(3^{2x})^2-2\cdot3^{2x}+1$

ゆえに　$y=9t^2-2t+1=9\left(t-\dfrac{1}{9}\right)^2+\dfrac{8}{9}$

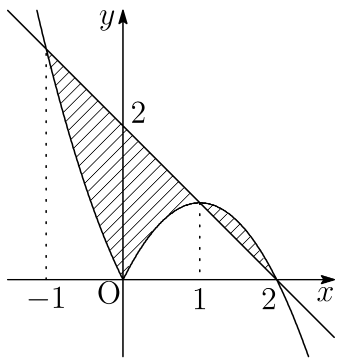
よって　$t=\dfrac{1}{9}$　すなわち　$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{8}{9}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y=-|x|(x-2)$ は

$x \geqq 0$ のとき　$y=-x(x-2)=-x^2+2x$

$x<0$ のとき　$y=-(-x)(x-2)=x^2-2x$

この曲線と直線 $y=-x+2$ の共有点の x 座標は



(i) $x \geqq 0$ のとき

$-x^2+2x=-x+2$ を解いて　$x=1,\ 2$

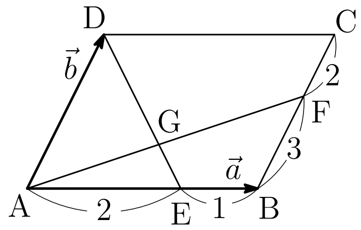
(ii) $x<0$ のとき

$x^2-2x=-x+2$ を解いて　$x=-1$

求める図形の面積 S は，図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0}\{(-x+2)-(x^2-2x)\}\,dx \\
&\qquad + \int_{0}^{1}\{(-x+2)-(-x^2+2x)\}\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_{1}^{2}\{(-x^2+2x)-(-x+2)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)\,dx + \int_{0}^{1}(x^2-3x+2)\,dx + \int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1} - \int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx \\
&= \frac{7}{6}+\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-1)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{13}{6}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) F は BC を 3 : 2 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{3}{5}\vec{b}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}}$

$$= \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \quad \cdots ①$$

3 点 A，G，F は同一直線上にあるから，定数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = k\overrightarrow{\mathrm{AF}} \qquad \cdots ②$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = k\vec{a} + \frac{3}{5}k\vec{b} \quad \cdots ③$

③ に $\vec{a} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \frac{3}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots ④$$

このとき，E，G，D は同一直線上にあるから

$$\frac{3}{2}k + \frac{3}{5}k = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{10}{21} \quad \cdots ⑤$$

よって，⑤ を ③ に代入して　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{10}{21}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}}$

(2) ②，⑤ から　AG : GF = 10 : 11　$\cdots ⑥$

⑤ を ④ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{AE}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{EG : GD} = 2 : 5 \quad \cdots ⑦$$

よって，⑥，⑦ から

$$\triangle\mathrm{AEG} : \triangle\mathrm{DGF} = 10 \cdot 2 : 11 \cdot 5 = \mathbf{4 : 11}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ において

(i) $n=1$ のとき

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1(4\cdot1^2+6\cdot1-1)}{d}\quad \text{すなわち}\quad a_1=\frac{1}{3}$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}&=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}-\frac{(n-1)\{4(n-1)^2+6(n-1)-1\}}{3}\\&=4n^2-1\\&=(2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$　$\cdots$①

① は $n=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 点 A は放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，その座標を $(a,\ a^2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ 4)-(-1,\ 1)=(3,\ 3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a,\ a^2)-(-1,\ 1)=(a+1,\ a^2-1)$$

$\triangle$ABC の面積が 6 であるから

$$\frac{1}{2}|\,3(a^2-1)-3(a+1)\,|=6$$

ゆえに　$|\,a^2-a-2\,|=4 \quad \cdots ①$

$a^2-a-2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\geqq-\dfrac{9}{4}$ であるから

① から　$a^2-a-2=4$

これを解いて　$a=-2,\ 3$

(i) $a=-2$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,\ 3)$ であるから

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{3\cdot(-1)+3\cdot3}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{6}{3\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$1+\tan^2 B=(\sqrt{5})^2 \quad ゆえに \quad \tan^2 B=4$$

$\cos B>0$ であるから，B は鋭角で，$\tan B>0$

よって　$\tan B=2$

(ii) $a=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(4,\ 8)$ であるから

$$\cos B=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{3\cdot4+3\cdot8}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{4^2+8^2}}=\frac{36}{3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$1+\tan^2 B=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 \quad ゆえに \quad \tan^2 B=\frac{1}{9}$$

$\cos B>0$ であるから，B は鋭角で，$\tan B>0$

よって　$\tan B=\dfrac{1}{3}$

(i)，(ii) から　**A$(-2,\ 4)$ のとき $\tan B=2$，A$(3,\ 9)$ のとき $\tan B=\dfrac{1}{3}$**

1.3.7　後期日程

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが，志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　　　　　　　　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**電子情報ネットワーク学科**	○	○			○
	ソフトウェアサイエンス学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - 2(a^2 - 1)x + 4$ の頂点が xy 座標平面の第 1 象限にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $x^3 + y^3 = -7$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3) $\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$，$\log_3 7 = c$ とするとき，$\log_{175} 3.5$ を a，b，c を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = x(1 - |\,x\,|)$ について，次の各問に答えよ。

(1) この曲線上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接線とこの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC において，辺 AB の中点を L，線分 CL の中点を M，AM の延長が辺 BC と交わる点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $|\,\vec{a}\,| = 1$，$|\,\vec{b}\,| = 2\sqrt{3}$，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\angle$C の大きさを求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ は公差 -3 の等差数列であり，数列 $\{b_n\}$ が次の条件を満たしているとき，次の各問に答えよ。

$$b_1 = 3,\ b_2 = 23,\ b_{n+1} - b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_{n+1} - b_n$ を求めよ。

(2) b_n の値を最大にする自然数 n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ において，関数 $f(\theta) = \cos^2\theta + a\cos\theta + 1$ の最小値が正であるときの定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=x^2-2(a^2-1)x+4$ を変形すると

$$y=\{x-(a^2-1)\}^2-a^4+2a^2+3$$

ゆえに，放物線の頂点は　$(a^2-1, -a^4+2a^2+3)$

頂点が第1象限にあるので

$$\begin{cases} a^2-1>0 \\ -a^4+2a^2+3>0 \end{cases}$$

第1式から　$(a+1)(a-1)>0$

ゆえに　$a<-1,\ 1<a$　$\cdots$①

第2式から　$a^4-2a^2-3<0$

整理して　$(a^2+1)(a^2-3)<0$

$a^2+1>0$ より　$a^2-3<0$

ゆえに　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\sqrt{3}<a<-1,\ 1<a<\sqrt{3}}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=-7$

x，y は整数であるから，$x+y$，$(x+y)^2-3xy$ は整数であり，次の場合分けをする．

(i) $x+y=1$ のとき，$(x+y)^2-3xy=-7$　ゆえに　$xy=\dfrac{8}{3}$
これは，x，y が整数であることに反する．

(ii) $x+y=-1$ のとき，$(x+y)^2-3xy=7$　ゆえに　$xy=-2$
このとき，x，y を解とする2次方程式は　$t^2+t-2=0$
これを解いて　$(x,\ y)=(1,-2),\ (-2,\ 1)$

(iii) $x+y=7$ のとき，$(x+y)^2-3xy=-1$　ゆえに　$xy=\dfrac{50}{3}$
これは，x，y が整数であることに反する．

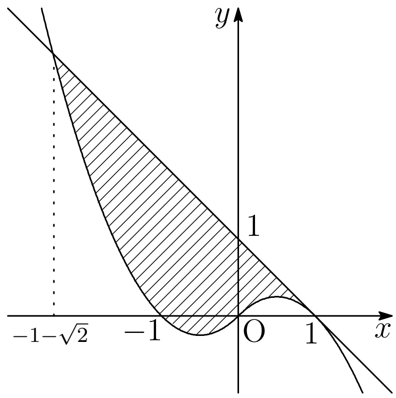
(iv) $x+y=-7$ のとき，$(x+y)^2-3xy=1$　ゆえに　$xy=16$
このとき，x，y を解とする2次方程式は　$t^2+7t+16=0$
この2次方程式は，整数解をもたない．

(i)〜(iv) から　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,-2),\ (-2,\ 1)}$

(3) $\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{a}$ であるから

$$\log_{175} 3.5 = \frac{\log_3 3.5}{\log_3 175} = \frac{\log_3 \frac{7}{2}}{\log_3(5^2 \cdot 7)} = \frac{\log_3 7 - \log_3 2}{2\log_3 5 + \log_3 7}$$
$$= \frac{c - \frac{1}{a}}{2b + c} = \boldsymbol{\frac{ac - 1}{a(2b + c)}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 曲線 $y = x(1 - |x|)$ は



$x \geqq 0$ のとき　$y = x(1 - x)$
$= -x^2 + x$

$x < 0$ のとき　$y = x(1 + x)$
$= x^2 + x$

$y = -x^2 + x$ を微分して　$y' = -2x + 1$

$x = 1$ のとき　$y' = -1$

点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは -1 であるから，この点における接線の方程式は

$$y - 0 = -1(x - 1)$$

ゆえに　$\boldsymbol{y = -x + 1}$

(2) 接線とこの直線の接点以外の共有点の x 座標は，$x < 0$ において，2 次方程式

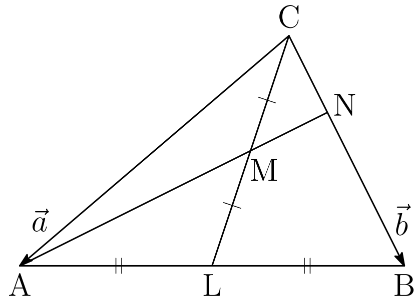
$$-x + 1 = x^2 + x \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

を解いて　$x = -1 - \sqrt{2}$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1-\sqrt{2}}^{0} \{(-x + 1) - (x^2 + x)\}\,dx + \int_{0}^{1} \{(-x + 1) - (-x^2 + x)\}\,dx$$
$$= \int_{-1-\sqrt{2}}^{0} (-x^2 - 2x + 1)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2 - 2x + 1)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-1-\sqrt{2}}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{0}^{1}$$
$$= \boldsymbol{2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

3　(1) L は線分 AB の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

M は線分 CL の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad \cdots ①$$

また，M は線分 AN 上の点であるから，① より

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CN}} \quad \cdots ② \qquad \longleftarrow \overrightarrow{\mathrm{CM}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{CN}},\ (s+t=1)$$

①，② より

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{4}\vec{b} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{3}\vec{b}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{CN}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}}$

(2) (1) の結果を $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \dfrac{1}{3}$ に代入して

$$\frac{1}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3}$$

さらに，$|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ を代入して

$$\frac{1}{9}(2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{3} \quad \text{これを解いて} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$$

ゆえに　$\cos C = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{1\times 2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{\angle \mathrm{C} = 30^\circ}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 漸化式から $b_2 - b_1 = a_1$ であるから　$a_1 = 23 - 3 = 20$

数列 $\{a_n\}$ は，初項が 20，公差 -3 の等差数列であるから

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \frac{1}{2}n\{2\cdot 20 + (n-1)\cdot(-3)\} \\ &= \frac{1}{2}n(-3n + 43) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}n(-3n + 43)}$

(2) (1) の結果から

$n \leqq 14$ のとき　$b_{n+1} - b_n > 0$　すなわち　$b_{n+1} > b_n$

$n \geqq 15$ のとき　$b_{n+1} - b_n < 0$　すなわち　$b_{n+1} < b_n$

よって　b_n の値を最大にする自然数 n は　**15**

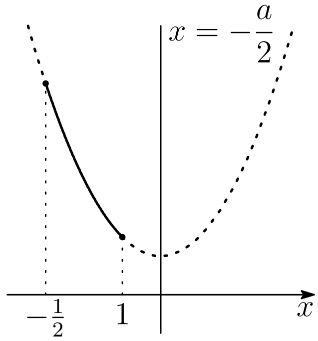
$\boxed{5}$ $\cos\theta = x$ とおくと，$0° \leqq \theta \leqq 120°$ より　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

したがって，$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ における関数

$$y = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$$

の最小値が正であればよい．したがって，次の3つの場合分けを行う．

［1］$1 < -\dfrac{a}{2}$　すなわち　$a < -2$ のとき



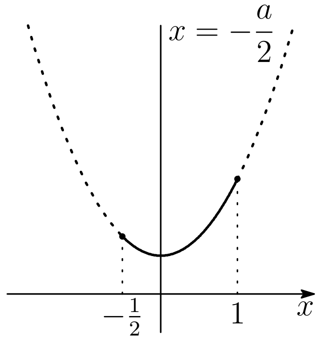
y は $x = 1$ で最小値をとるから

$$1^2 + a{\cdot}1 + 1 > 0$$

ゆえに　　$a > -2$

これは，$a < -2$ に反するので不適．

［2］$-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$　すなわち　$-2 \leqq a \leqq 1$ のとき



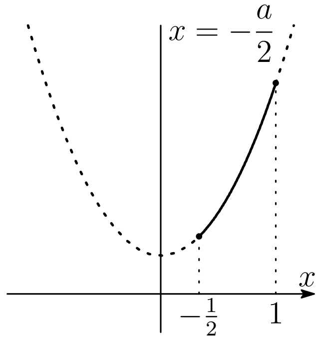
y は $x = -\dfrac{a}{2}$ で最小値をとるから

$$1 - \frac{a^2}{4} > 0$$

ゆえに　　$-2 < a < 2$

条件に注意して　$-2 < a \leqq 1$

［3］$-\dfrac{a}{2} < -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a > 1$ のとき



y は $x = -\dfrac{1}{2}$ で最小値をとるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 > 0$$

ゆえに　　$a < \dfrac{5}{2}$

条件に注意して　$1 < a < \dfrac{5}{2}$

［1］〜［3］より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-2 < a < \dfrac{5}{2}}$

1.3.8　前期日程 1 日目 (薬学部)80 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 1，2，3，4，5 の数字を記入したカードがそれぞれ 1，2，3，4，5 枚ある。これら 15 枚から同時に 3 枚のカードを取り出す。

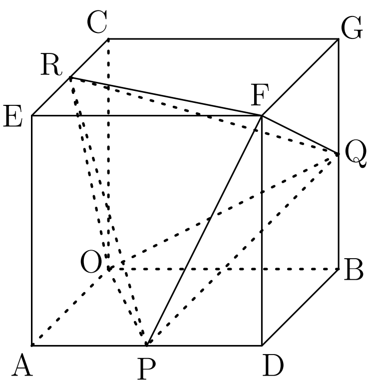
(a) 3 枚のカードに記入された数字の和が 6 以下になる確率を求めよ。

(b) 3 枚のカードに記入された数字の積が偶数になる確率を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において，BC $=$ 2AB，AC $=1$ のとき，その面積の最大値とそのときの AB の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ $t \leqq x \leqq t+1$ における関数 $f(x)=x^2$ の最大値，最小値をそれぞれ $g(t)$，$h(t)$ とするとき，$\displaystyle\int_{-2}^{2}\{g(t)-h(t)\}\,dt$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 右図の 1 辺の長さが 1 の立方体 OADB-CEFG において，辺 AD，BG，CE のそれぞれの中点を P，Q，R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の各問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。

(2) 六面体 OPQRF の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) 3枚のカードの数字の和が6以下であるのは，5と6の場合である．

3枚のカードの数字の和が5になるのは$\{1,\ 2,\ 2\}$の確率は

$$\frac{1\times {}_2\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{455}$$

3枚のカードの数字の和が6になるのは$\{1,\ 2,\ 3\}$の確率は

$$\frac{1\times {}_2\mathrm{C}_1\times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{6}{455}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{455}+\frac{6}{455}=\boldsymbol{\frac{1}{65}}$$

(b) 3枚のカードの数字の積が奇数になるのは，1，3，5の9枚のカードから3枚取り出す確率であるから

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\div\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}=\frac{12}{65}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{12}{65}=\boldsymbol{\dfrac{53}{65}}$

(2) $\mathrm{BC}>\mathrm{AB}$であるから，$\mathrm{AB}=x$とおくと$\mathrm{BC}=2x$，このとき$\triangle\mathrm{ABC}$が存在するためには，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>\mathrm{BC},\ \mathrm{AB}+\mathrm{BC}>\mathrm{AC}$$

ゆえに　$x+1>2x,\ x+2x>1$

したがって　$\dfrac{1}{3}<x<1\quad\cdots①$

$2s=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC}=x+2x+1=3x+1$とすると，$s=\dfrac{3x+1}{2}$

$\triangle\mathrm{ABC}$の面積をSとすると，ヘロンの公式により

$$\begin{aligned}S^2&=s(s-x)(s-2x)(s-1)\\&=\frac{3x+1}{2}\left(\frac{3x+1}{2}-x\right)\left(\frac{3x+1}{2}-2x\right)\left(\frac{3x+1}{2}-1\right)\\&=\frac{1}{16}(3x+1)(x+1)(1-x)(3x-1)\\&=\frac{1}{16}(-9x^4+10x^2-1)=-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\end{aligned}$$

①に注意して，$x^2=\dfrac{5}{9}$のときS^2は最大値$\dfrac{1}{9}$をとる．

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$の面積は$\mathbf{AB}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$**のとき最大値**$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$をとる．

2 $y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は y 軸である．

$t \leqq x \leqq t+1$ の中央は　$x=t+\dfrac{1}{2}$

最大値 $g(t)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］ $t+\dfrac{1}{2}<0$　すなわち　$t<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$x=t$ で最大値をとるから　$g(t)=f(t)=t^2$

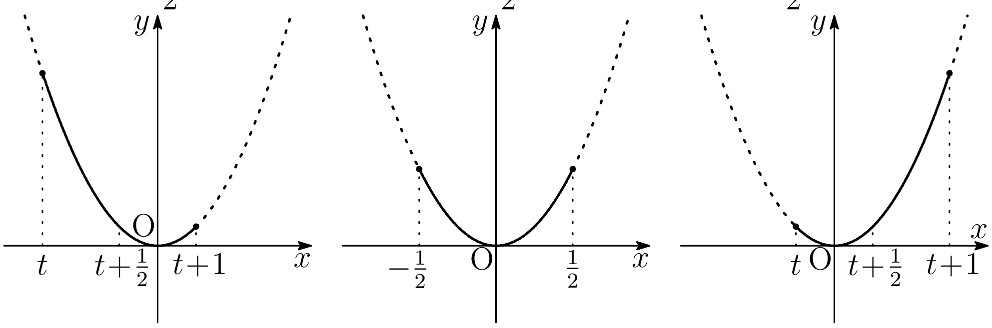
［2］ $t+\dfrac{1}{2}=0$　すなわち　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$ で最大値をとるから　$g(t)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

［3］ $0<t+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$-\dfrac{1}{2}<t$ のとき

$x=t+1$ で最大値をとるから　$g(t)=f(t+1)=(t+1)^2$

［1］ $t<-\dfrac{1}{2}$ のとき　［2］ $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　［3］ $-\dfrac{1}{2}<t$ のとき



ゆえに　$g(t)=\begin{cases} t^2 & \left(t<-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{4} & \left(t=-\dfrac{1}{2}\right) \\ (t+1)^2 & \left(-\dfrac{1}{2}<t\right) \end{cases}$

したがって　$\displaystyle\int_{-2}^{2} g(t)\,dt=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} t^2\,dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(t+1)^2\,dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}=\frac{139}{12}\quad\cdots①$$

最小値 $h(t)$ は，次の 3 つの場合に分けて求める．

［1］$t+1<0$　すなわち　$t<-1$ のとき

$x=t+1$ で最小値をとるから　$h(t)=f(t+1)=(t+1)^2$

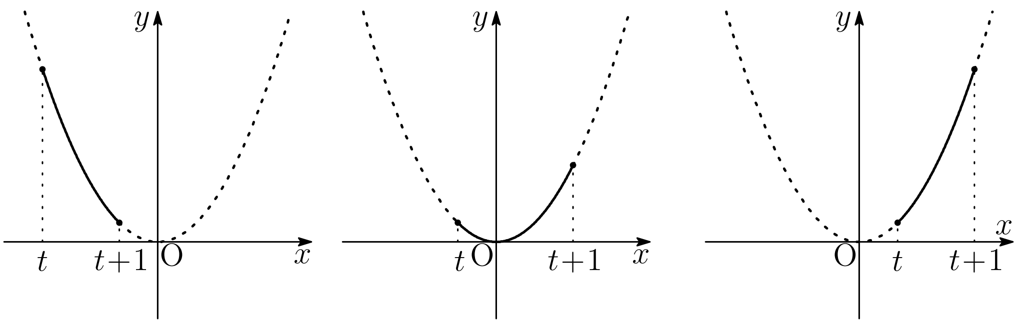
［2］$t \leqq 0 \leqq t+1$　すなわち　$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき

$x=0$ で最小値をとるから　$h(t)=f(0)=0$

［3］$0<t$ のとき

$x=t$ で最小値をとるから　$h(t)=f(t)=t^2$

［1］$t<-1$ のとき　　［2］$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき　　［3］$0<t$ のとき



ゆえに　$h(t)=\begin{cases}(t+1)^2 & (t<-1)\\ 0 & (-1 \leqq t \leqq 0)\\ t^2 & (0<t)\end{cases}$

したがって　$\displaystyle\int_{-2}^{2} h(t)\,dt = \int_{-2}^{-1}(t+1)^2\,dt + \int_0^2 t^2\,dt$

$$= \left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 3 \quad \cdots ②$$

①，② より　$\displaystyle\int_{-2}^{2}\{g(t)-h(t)\}\,dt = \int_{-2}^{2} g(t)\,dt - \int_{-2}^{2} h(t)\,dt = \frac{139}{12} - 3 = \boldsymbol{\frac{103}{12}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{b}+(-\vec{a})+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$=\boldsymbol{-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

$\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{c}\perp\vec{a}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=-|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{c}|^2\\&=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ER}}$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}+\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

(1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ より　$\triangle\mathrm{PQR}\perp\mathrm{OF}$

よって，六面体 OPQRF の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}\times\mathrm{OF}$　$\cdots$①

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=1+1+1=3\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{OF}=|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=\sqrt{3}$　$\cdots$②

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \\
&= \left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right) \\
&= |\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2 \\
&= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right) \\
&= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right) \\
&= \frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{c}|^2 \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}$

$$
=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}\quad\cdots③
$$

②，③ を ① に代入して

$$
V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\sqrt{3}=\mathbf{\frac{3}{8}}
$$

1.3.9 前期日程 2 日目 (薬学部)80 分

1 次の各問に答えよ。

(1) 次の確率を求めよ。

(a) 1 から 6 までの数字を書いたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。6 枚のカードから同時に 3 枚取り出すとき，1 枚のカードの数字が他の 2 枚のカードの数字の和に等しくなる確率

(b) 大中小 3 個のさいころを同時に 1 回投げるとき，1 個のさいころの目の数が他の 2 個のさいころの目の数の和に等しくなる確率

(2) 関数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\quad\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

2 放物線 $y=-x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,-t^2)$ における接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする。次の各問に答えよ。

(1) t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の中点 R の軌跡の方程式を求めよ。ただし，$t=0$ のときは R は原点とする。

(2) (1) で求めた軌跡と放物線 $y=-x^2$ および点 $\mathrm{T}(2,-4)$ における接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

3 $\triangle$OAB において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であり，辺 AB を $2:1$ に内分する点を C，線分 OC を $1:3$ に内分する点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) 点 D から辺 AB へ下ろした垂線を DE とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) AD の延長が辺 OB と交わる点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) 6枚のカードから3枚取り出す組合せは，${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (通り)

1枚のカードの数字が他の2枚のカードの数字の和に等しくなるのは

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\}$$

の6通りであるから，求める確率は　$\dfrac{6}{20} = \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(b) 大中小3個のさいころの同時に1回投げたときの目の出方は

$$6^3 = 216 \text{ (通り)}$$

3個のさいころ目が

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{1,\ 5,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\}$$

であるのは$6 \times 3! = 36$通りある．また，3個のさいころの目が

$$\{1,\ 1,\ 2\},\ \{2,\ 2,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 6\}$$

であるのは$3 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 9$通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{36+9}{216} = \boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$

(2)
$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) &= \sin 2x + \sqrt{3}\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \sin 2x + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)\\
&= -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\\
&= \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

ゆえに　$f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

このとき，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2x + \dfrac{2}{3}\pi \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ であるから

$2x + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{3}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = 0}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとり，

$2x + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{12}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-x^2$ を微分して　$y'=-2x$

$\mathrm{T}(t,-t^2)$ における接線の傾きは　$-2t$

ゆえに T における接線の方程式は，$t \neq 0$ のとき

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2 \quad \cdots ①$$

P の座標は，① に $y=0$ を代入して　$x=\dfrac{t}{2}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$

Q の座標は，① に $x=0$ を代入して　$y=t^2$　ゆえに　$\mathrm{Q}(0,\ t^2)$

線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}+0\right)=\frac{t}{4}, \qquad y=\frac{1}{2}(0+t^2)=\frac{t^2}{2}$$

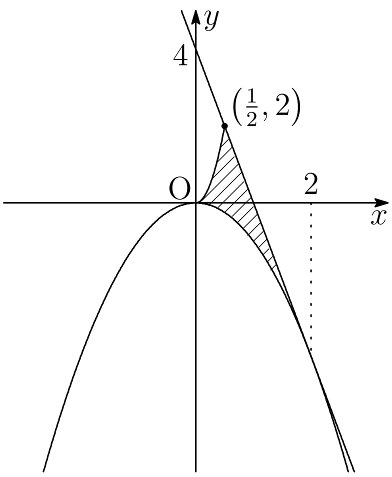
上式は $t=0$ のときも成り立つので，これらの式から t を消去して

$$\boldsymbol{y=8x^2 \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)}$$

(2) $\mathrm{T}(2,-4)$ における接線は，① に $t=2$ を代入して　$y=-4x+4$

求める図形は，図の斜線部分であり，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{8x^2-(-x^2)\}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left\{(-4x+4)-(-x^2)\right\}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 9x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2\,dx \\
&= \Big[\ 3x^3\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} + \Big[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= \frac{3}{8}+\frac{9}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$



$\boxed{3}$ (1) C は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

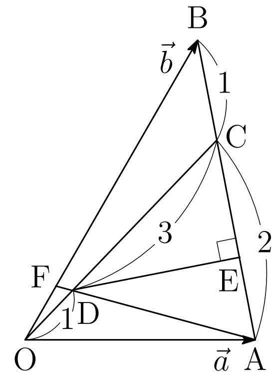
$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

D は OC を 1 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\times\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12}$$

E は直線 AB 上の点であるから

$$\overrightarrow{OE} = (1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$



とおくと (s は実数)

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD} = \left(\frac{11}{12}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{6}\right)\vec{b} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ であり，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ であるから

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\left(\frac{11}{12}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{6}\right)\vec{b}\right\}=0$$

$$\left(s-\frac{11}{12}\right)|\vec{a}|^2+\left(\frac{13}{12}-2s\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(s-\frac{1}{6}\right)|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3$ を上式に代入すると

$$\left(s-\frac{11}{12}\right)\cdot2^2+\left(\frac{13}{12}-2s\right)\cdot3+\left(s-\frac{1}{6}\right)\cdot3^2=0 \quad ゆえに \quad s=\frac{23}{84}$$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{\overrightarrow{DE} = \frac{9}{14}\vec{a}+\frac{3}{28}\vec{b}}$

(2) F は，直線 AD 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OF} = (1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$$

とおける．これに (1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{OF} = (1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12} = \left(1-\frac{11}{12}t\right)\vec{a}+\frac{1}{6}t\vec{b} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{OF}/\!/\vec{b}$ であるから

$$1-\frac{11}{12}t=0 \quad ゆえに \quad t=\frac{12}{11}$$

これを ② に代入して　　$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{11}\vec{b}$

よって　　$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=\frac{2}{11}\vec{b}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{12}=\boldsymbol{-\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{66}\vec{b}}$

1.3.10　後期日程 (薬学部)80 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = 2x^2 + ax + b$ の最小値は -8 であり，不等式 $2x^2 + ax + b < 0$ の解が $-1 < x < p$ であるとき，定数 a，b および p の値を求めよ。

(2) 初項 a_1，公比 r $(r \neq 0)$ の等比数列 $\{a_n\}$ が $a_4 - 5a_3 + 8a_2 - 4a_1 = 108$，$a_2 - a_1 = 27$ を満たしている。

(a) a_1 と r の値を求めよ。

(b) $a_n > 10^6$ となる n の取り得る値の範囲を求めよ。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (at^2 + bt + c)\,dt$ $(a > 0)$ は $x = 1$ と $x = 3$ で極値をとり，極大値が 20 である。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) 点 $(0,\ k)$ を通り，曲線 $y = f(x)$ に接する直線がちょうど 2 本引けるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathrm{AB} = 7$，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CA} = 6$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，点 A，B，C を中心とする 3 つの円 C_1，C_2，C_3 があり，C_1 と C_2，C_2 と C_3，C_3 と C_1 はそれぞれ点 D，E，F において外接しているとする。このとき，点 D，E，F における円の接線は 1 点 I で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 四角形 IFAD，四角形 IDBE，四角形 IECF の面積比を求めよ。

(2) 直線 AI と辺 BC との交点を G とするとき，$\triangle\mathrm{IGE}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積比を求めよ。

解答例

1 (1) 2次方程式

$$2x^2+ax+b=-8 \quad すなわち \quad 2x^2+ax+b+8=0$$

は，重解をもつので，$D=0$ より

$$a^2-4\cdot 2(b+8)=0 \quad ゆえに \quad a^2-8(b+8)=0 \quad \cdots ①$$

2次不等式 $2x^2+ax+b<0$ の解が $-1<x<p$ であるから，2次方程式 $2x^2+ax+b=0$ は $-1,\ p\ (p>-1)$ を解にもつので，2次方程式の解と係数の関係により

$$-1+p=-\frac{a}{2},\quad -1\cdot p=\frac{b}{2}$$

したがって　$a=-2(p-1),\ b=-2p \quad \cdots ②$

② を ① に代入すると

$$\{-2(p-1)\}^2-8(-2p+8)=0$$

整理すると　$p^2+2p-15=0$

ゆえに　$(p-3)(p+5)=0$

$p>-1$ より　$\boldsymbol{p=3}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{a=-4,\ b=-6}$

(2) (a) $a_2=a_1r,\ a_3=a_1r^2,\ a_4=a_1r^3$ であるから，これらを

$$a_4-5a_3+8a_2-4a_1=108,\quad a_2-a_1=27$$

に代入すると

第1式から　$a_1(r^3-5r^2+8r-4)=108$

ゆえに　$a_1(r-1)(r-2)^2=108 \quad \cdots ①$

第2式から　$a_1(r-1)=27 \quad \cdots ②$

② を ① に代入して　$27(r-2)^2=108$

整理して　$r^2-4r=0$

したがって　$r(r-4)=0$

$r\neq 0$ より　$\boldsymbol{r=4}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{a_1=9}$

(b) (a) の結果により　$a_n = 9\cdot 4^{n-1}$

ゆえに $9\cdot 4^{n-1} > 10^{n-1}$ となる n の取り得る値の範囲を求めればよい.

この不等式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 9\cdot 4^{n-1} > \log_{10} 10^6$$

ゆえに　$2\log_{10} 3 + 2(n-1)\log_{10} 2 > 6$

整理して　$(n-1)\log_{10} 2 > 3 - \log_{10} 3$

したがって　$n > \dfrac{3-\log_{10} 3}{\log_{10} 2} + 1 = \dfrac{3-0.4771}{0.3010} + 1 = 9.3\cdots$

よって　$\boldsymbol{n \geqq 10}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (at^2 + bt + c)\,dt$ を微分すると　$f'(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 0$ の解が $x = 1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$1 + 3 = -\frac{b}{a},\ \ 1\cdot 3 = \frac{c}{a}$$

ゆえに　$b = -4a,\ c = 3a$　$\cdots$①

このとき　$f'(x) = ax^2 - 4ax + 3a$

$= a(x-1)(x-3)$

$a > 0$ であるから，増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

① より，極大値は

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-1}^{1} (at^2 - 4at + 3a)\,dt \\ &= a\left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t\right]_{-1}^{1} = \frac{20}{3}a \end{aligned}$$

$f(1) = 20$ であるから　$\dfrac{20}{3}a = 20$　よって　$\boldsymbol{a = 3}$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{b = -12,\ c = 9}$

(2) (1) の結果により

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^{x} (3t^2 - 12t + 9)\,dt \\ &= \Big[\ t^3 - 6t^2 + 9t\ \Big]_{-1}^{x} \\ &= x^3 - 6x^2 + 9x + 16 \end{aligned}$$

接点の座標を $(\alpha,\ \alpha^3-6\alpha^2+9\alpha+16)$ とすると，接線の傾きは $3\alpha^2-12\alpha+9$ となるから，その方程式は

$$y - (\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha + 16) = (3\alpha^2 - 12\alpha + 9)(x - \alpha)$$

この直線が $(0,\ k)$ を通るから　　$k = -2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 16$　$\cdots$②

点 $(0,\ k)$ から 2 本の接線が引けるので，② を満たす α が 2 個ある．

このとき，$g(x) = -2x^3 + 6x^2 + 16$ とおくと，方程式 $g(x) = k$ が異なる 2 つの実数解をもつので，$g(x)$ について

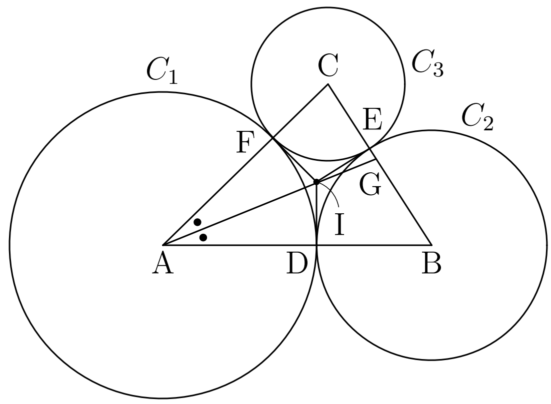
$$g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$$

$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	極小 16	$\nearrow$	極大 24	$\searrow$

よって，求める k の値は，$y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が異なる 2 つの共有点をもつときであるから　$\boldsymbol{k = 16,\ 24}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C_1, C_2, C_3 の半径を，それぞれ r_1, r_2, r_3 とすると



$$r_1 + r_2 = 7$$
$$r_2 + r_3 = 5$$
$$r_3 + r_1 = 6$$

これを解いて

$$r_1 = 4,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$$

I は △ABC の内心なので

$$r = \mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}$$

とおくと

$$\text{四角形 IFAD} = 4r,\ \text{四角形 IDBE} = 3r,\ \text{四角形 IECF} = 2r$$

よって **四角形 IFAD : 四角形 IDBE : 四角形 IECF = 4 : 3 : 2**

(2) 線分 AG は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BG} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB} + \mathrm{AC}} \times \mathrm{BC} = \frac{7}{7+6} \times 5 = \frac{35}{13}$$

ゆえに $\mathrm{GE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BG} = 3 - \dfrac{35}{13} = \dfrac{4}{13}$

したがって $\triangle\mathrm{IGE} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{GE}\cdot r = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{13}\cdot r = \dfrac{2}{13}r$

また

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \triangle\mathrm{IAB} + \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot r + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot = 9r\end{aligned}$$

よって $\triangle\mathrm{IGE} : \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{2}{13}r : 9r = \mathbf{2 : 117}$

1.4 東海大学

1.4.1 一般入試S方式(総合経営学部)70分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

1 (1) $x = \dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式を計算しなさい．

(i) $x + y = \boxed{\text{ア}}$

(ii) $xy = \boxed{\text{イ}}$

(iii) $x^2 + y^2 = \boxed{\text{ウ}}$

(iv) $\dfrac{x}{y} = \boxed{\text{エ}}$

(2) $\tan\theta = -3 \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos\theta = \boxed{\text{オ}}$ であり，$\sin\theta = \boxed{\text{カ}}$ である．

(3) 1袋200円，300円，500円の3種類のお菓子がある．これらのお菓子を使って，1200円の詰め合わせ袋は $\boxed{\text{キ}}$ 種類作れる．それらのうちで300円の袋が1つ以上入っているものは $\boxed{\text{ク}}$ 種類ある．

2 (1) 実数 α，β が $\alpha > \beta$，$\alpha + \beta = 3$，$\alpha\beta = 1$ を満たすとき，$\alpha = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\beta = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\triangle$ABC において，BC $= 4$，AC $= 6$，$\cos C = \dfrac{3}{4}$ のとき，AB $= \boxed{\text{ウ}}$ である．また，$\sin C = \boxed{\text{エ}}$ であるから，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

3 k を定数とする2次関数 $y = x^2 + (k-2)x + k + 13$ のグラフを考える．グラフが x 軸と2点で交わる k の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ または $\boxed{\text{イ}}$ である．また，グラフが x 軸と接するときの k の値は小さい順に，$k = \boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である．$k = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，接点の x 座標は $x = \boxed{\text{オ}}$ であり，$k = \boxed{\text{エ}}$ のとき，接点の x 座標は $x = \boxed{\text{カ}}$ である．グラフが x 軸と共有点をもたない k の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $x+y=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$$=\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})+4(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{8\sqrt{2}}{2-3}=\boldsymbol{-8\sqrt{2}}$$

(ii) $xy=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{4\times 4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{16}{2-3}=\boldsymbol{-16}$

(iii) (i), (ii) の結果から

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-8\sqrt{2})^2-2\cdot(-16)=\mathbf{160}$

(iv) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\div\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{5-2\sqrt{6}}{2-3}=\boldsymbol{2\sqrt{6}-5}$$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-3)^2}=\frac{1}{10}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

また $\quad \sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times(-3)=\boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

(3) 1200 円の詰め合わせは次の **5 通り**

200 円	300 円	500 円
1	0	2
2	1	1
0	4	0
3	2	0
6	0	0

これらのうちで 300 円の袋が 1 つ以上入っているものは **3 通り**

答 ア. $-8\sqrt{2}$ イ. -16 ウ. 160 エ. $2\sqrt{6}-5$ オ. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ カ. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

キ. 5 ク. 3

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) α, β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad \longleftarrow \ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

これを解いて　$\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\alpha > \beta$ であるから　　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $\boldsymbol{\beta = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C \\ &= 4^2 + 6^2 - 2\cdot4\cdot6\cdot\frac{3}{4} \\ &= 16 \end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから　　$\mathbf{AB = 4}$

$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

また　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin C = \dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{3\sqrt{7}}$

答 ア. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　イ. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　ウ. 4　エ. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　オ. $3\sqrt{7}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 次関数 $y = x^2 + (k-2)x + k + 13$ の係数について

$$\begin{aligned} D &= (k-2)^2 - 4\cdot 1\cdot (k+13) \\ &= k^2 - 8x - 48 \\ &= (k+4)(k-12) \end{aligned}$$

このグラフが x 軸と 2 点で交わるための条件は，$D > 0$ であるから

$(k+4)(k-12) > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{k < -4,\ 12 < k}$

このグラフが x 軸と接するための条件は，$D = 0$ であるから

$(k+4)(k-12) = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{k = -4,\ 12}$

接点の x 座標は $x = -\dfrac{k-2}{2}$ であるから，接点の x 座標は

$k = -4$ のとき　$\boldsymbol{x = 3,}$　　$k = 12$ のとき　$\boldsymbol{x = -5}$

このグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は，$D < 0$ であるから

$(k+4)(k-12) < 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-4 < k < 12}$

答 ア. イ. $k < -4,\ 12 < k$　ウ. -4　エ. 12　オ. 3　カ. -5
キ. $-4 < k < 12$

1.4.2　一般入試S方式(産業工学部)70分

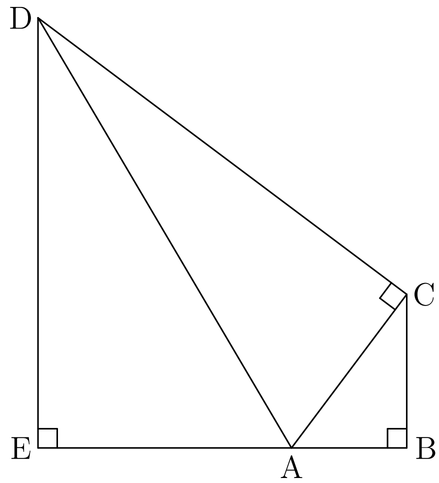
次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $1+ax=b(2x+1)$ が x についての恒等式であるような定数 a，b の値は，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 不等式 $\log_2 x+\log_2(x+3)<2$ の解は，$\boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 複素数 z が $z^2=i$ を満たすとき，$z=\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ である．ただし i は虚数単位とする．

(4) 下の図で，E，A，B は一直線上にあり，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{AED}=90^\circ$，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=12$ とする．このとき，$\mathrm{DE}=\boxed{\text{キ}}$，$\mathrm{AE}=\boxed{\text{ク}}$ である．



(5) 下の表を用いて，次の値をそれぞれ小数点以下 4 桁まで求めなさい．

(i) $\cos 160^\circ = \boxed{\text{ケ}}$

(ii) $\sin \dfrac{13\pi}{9} = \boxed{\text{コ}}$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
1°	0.0175	0.9998	16°	0.2756	0.9613	31°	0.5150	0.8572
2°	0.0349	0.9994	17°	0.2924	0.9563	32°	0.5299	0.8480
3°	0.0523	0.9986	18°	0.3090	0.9511	33°	0.5446	0.8387
4°	0.0698	0.9976	19°	0.3256	0.9455	34°	0.5592	0.8290
5°	0.0872	0.9962	20°	0.3420	0.9397	35°	0.5736	0.8192
6°	0.1045	0.9945	21°	0.3584	0.9336	36°	0.5878	0.8090
7°	0.1219	0.9925	22°	0.3746	0.9272	37°	0.6018	0.7986
8°	0.1392	0.9903	23°	0.3907	0.9205	38°	0.6157	0.7880
9°	0.1564	0.9877	24°	0.4067	0.9135	39°	0.6293	0.7771
10°	0.1736	0.9848	25°	0.4226	0.9063	40°	0.6428	0.7660
11°	0.1908	0.9816	26°	0.4384	0.8988	41°	0.6561	0.7947
12°	0.2079	0.9781	27°	0.4540	0.8910	42°	0.6691	0.7431
13°	0.2250	0.9744	28°	0.4695	0.8829	43°	0.6820	0.7314
14°	0.2419	0.9703	29°	0.4848	0.8746	44°	0.6947	0.7193
15°	0.2588	0.9659	30°	0.5000	0.8660	45°	0.7071	0.7071

(6) n を自然数とする．次の和を求め，因数分解した形で書くと，

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2 = \boxed{\text{サ}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $C_1 : y = -x^2 + ax + b$ に，直線 $l : y = 2x$ が接しているとする．

(1) b を a を用いて表すと，$b = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 放物線 C_1 と直線 l の接点の x 座標が -2 であるとき，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ である．
以後，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウ}}$ とする．

(3) 放物線 $C_2 : y = x^2 - c$ と (2) で定めた放物線 C_1 との1つの交点の x 座標が1のとき，$c = \boxed{\text{エ}}$ であり，もう1つの交点の x 座標は $\boxed{\text{オ}}$ である．
以後，$c = \boxed{\text{エ}}$ とする．

(4) (2) と (3) で定めた2つの放物線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 7枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ がある．これら7枚のカードから相異なる3枚のカードを抜き出す場合，取り出し方は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．

(i) 取り出した3枚のカードに書かれた数の和が10である確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(ii) 取り出した3枚のカードに書かれた数の積が偶数である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 6枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{\sqrt{2}}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ がある．1枚引いて数を確認してから元へ戻す操作を3回繰り返す場合，取り出し方は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

(i) 取り出した3枚のカードに書かれた数が，直角三角形の各辺の長さとなるような取り出し方は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 通りある．

(ii) 取り出した3枚のカードに書かれた数が，二等辺三角形の各辺の長さとなるような取り出し方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 右辺を展開して　$ax+1=2bx+b$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$a=2b$，$1=b$

したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

(2) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+3>0$

すなわち　$x>0$　$\cdots$①

不等式を変形すると　$\log_2 x(x+3)<\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$x(x+3)<4$

$x^2+3x-4<0$

すなわち　$(x+4)(x-1)<0$

ゆえに　$-4<x<1$　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{0<x<1}$

(3) $z=a+bi$ (a, b は実数) とおくと　$z^2=a^2-b^2+2abi$

$z^2=i$ より　$a^2-b^2+2abi=i$

a^2-b^2，$2ab$ は実数であるから

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 & \cdots ① \\ 2ab=1 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　$b=\pm a$

[1] $b=a$ のとき，これを ② に代入して　$2a^2=1$

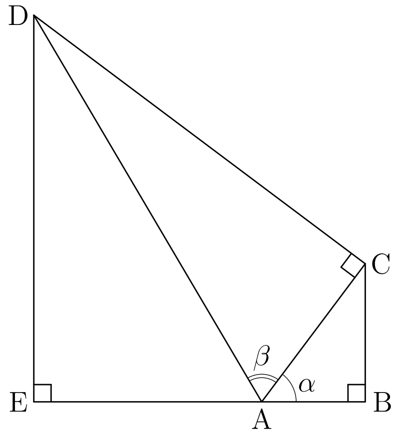
ゆえに　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(複号同順)

[2] $b=-a$ のとき，これを ② に代入して　$-2a^2=1$

この式を満たす実数 a は存在しない．

したがって　$\boldsymbol{z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$



(4) $\mathrm{CA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\mathrm{DA} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\angle\mathrm{CAB} = \alpha$，$\angle\mathrm{DAC} = \beta$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{DAE} &= \sin(180^\circ - (\alpha+\beta)) \\ &= \sin(\alpha+\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAE} &= \cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) \\ &= -\cos(\alpha+\beta) \\ &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= -\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} + \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} = \frac{33}{65}\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{DE} = \mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{DAE} = 13\times\frac{56}{65} = \boldsymbol{\frac{56}{5}}$

$\mathrm{AE} = \mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{DAE} = 13\times\frac{33}{65} = \boldsymbol{\frac{33}{5}}$

(5)　(i) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ = \boldsymbol{-0.9397}$

(ii) $\sin\frac{13\pi}{9} = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ = -\cos 10^\circ = \boldsymbol{-0.9848}$

(6)　$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)^2 \\ &= n^2\sum_{k=1}^{n} + 2n\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= n^2\times n + 2n\times\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n\{6n^2 + 6n(n+1) + (n+1)(2n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(14n^2 + 9n + 1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)}\end{aligned}$$

別解　$(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(2\cdot 2n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(2n+1)\{2(4n+1)-(n+1)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)}$$

答　ア．2　イ．1　ウ．0　エ．1　オ．カ．$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$　キ．$\dfrac{56}{5}$　ク．$\dfrac{33}{5}$
ケ．-0.9397　コ．-0.9848　サ．$\dfrac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2式から y を消去して　$-x^2+ax+b=2x$
整理すると　$x^2+(2-a)x-b=0$　$\cdots$①
① は重解をもつので，$D=0$ から

$$(2-a)^2-4\cdot 1(-b)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \boldsymbol{b=-\frac{1}{4}(2-a)^2}$$

(2) ① は -2 を重解をもつので，解と係数の関係により

$$(-2)+(-2)=-\frac{2-a}{1}, \qquad (-2)\times(-2)=\frac{-b}{1}$$

よって　$\boldsymbol{a=-2,\ b=-4}$

(3) $C_1: y=-x^2-2x-4$ と $C_2: y=x^2-c$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2x+4-c=0$$

この方程式の解の1つが1であるから

$$2\cdot 1^2+2\cdot 1+4-c=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c=8}$$

ゆえに，方程式は　$2x^2+2x+4-8=0$
すなわち　$x^2+x-2=0$
これを解いて　$x=1,-2$

よって，もう1つの交点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-2}$

(4) $C_1 : y = -x^2 - 2x - 4$ は上に凸，$C_2 : y = x^2 - 8$ は下に凸の放物線であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \{(-x^2 - 2x - 4) - (x^2 - 8)\}\,dx \\ &= -2\int_{-2}^{1} (x+2)(x-1)\,dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

答　ア．$-\dfrac{1}{4}(2-a)^2$　イ．-2　ウ．-4　エ．8　オ．-2　カ．9

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 7 枚のカードから相異なる 3 枚のカードの抜き出し方は

$${}_7\mathrm{C}_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{35} \quad (\text{通り})$$

(i) 3 枚のカードに書かれた数の和が 10 になるのは

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\}$$

の 4 通りであるから，求める確率は　$\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{35}}$

(ii) 3 枚のカードに書かれた数の積が奇数となるのは，1，3，5，7 の 4 枚から 3 枚抜き出す組合せであるから，その確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{4}{35}$$

求める確率はこの余事象の確率であるから

$$1 - \frac{4}{35} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{35}}$$

(2) 6 枚から 3 枚取り出す重複順列の総数であるから　$6^3 = \mathbf{216}$　(通り)

(i) 取り出した 3 枚のカードに書かれた数が，直角三角形の各辺の長さとなる組合せは

$$\{1, 1, \sqrt{2}\},\ \{\sqrt{2}, \sqrt{2},\ 2\},\ \{3, 4, 5\}$$

であるから，それぞれの取り出し方の総数を求めて

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = \mathbf{12} \quad (\text{通り})$$

(ii) 取り出した3枚のカードに書かれた数が，二等辺三角形の各辺の長さとなる取り出し方を，次の2つの場合に分けて求める．

［1］正三角形のとき　3辺の長さがすべて等しい場合で　6通り

［2］［1］以外の二等辺三角形のとき

$\{1, 1, \sqrt{2}\}$，$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\}$，$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$，$\{2, 2, 1\}$，$\{2, 2, \sqrt{2}\}$，
$\{2, 2, 3\}$，$\{3, 3, 1\}$，$\{3, 3, \sqrt{2}\}$，$\{3, 3, 2\}$，$\{3, 3, 4\}$，$\{3, 3, 5\}$，
$\{4, 4, 1\}$，$\{4, 4, \sqrt{2}\}$，$\{4, 4, 2\}$，$\{4, 4, 3\}$，$\{4, 4, 5\}$，$\{5, 5, 1\}$，
$\{5, 5, \sqrt{2}\}$，$\{5, 5, 2\}$，$\{5, 5, 3\}$，$\{5, 5, 4\}$

であるから，これらの取り出し方の総数は　$21 \times \dfrac{3!}{2!} = 63$　(通り)

したがって，求める総数は　$6 + 63 = \mathbf{69}$　(通り)

答 ア．35　イ．$\dfrac{4}{35}$　ウ．$\dfrac{31}{35}$　エ．216　オ．12　カ．69

1.4.3 一般入試A方式2月7日(総合経営学部)70分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$ のとき，xy と x^2+y^2 を計算すると，$xy=$ $\boxed{\text{ア}}$，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{イ}}$ となる．

(2) $x^2+2x-1<0$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ $<x<$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 直線 $y=2x$ と直線 $y=-2x$ のなす角を α とし，直線 $y=2x$ と x 軸の正の部分とのなす角を β とする．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．このとき，$\tan\beta=$ $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\tan(\alpha+\beta)=$ $\boxed{\text{カ}}$ であるから，$\tan\alpha=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2桁の自然数のうち，4の倍数の集合を A とし，6の倍数の集合を B とする．

(1) A，B の要素の個数はそれぞれ，$\boxed{\text{ア}}$ 個と $\boxed{\text{イ}}$ 個である．

(2) A，B の共通部分 $A\cap B$ の要素の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個であり，和集合 $A\cup B$ の要素の個数は $\boxed{\text{エ}}$ 個である．

(3) 2桁の自然数のうち，4の倍数であるが6の倍数でない数の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，4の倍数でないが6の倍数である数の個数は $\boxed{\text{カ}}$ 個であり，4の倍数でも6の倍数でもない数の個数は $\boxed{\text{キ}}$ 個である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが3点 $(-1,-23)$，$(2,\ 7)$，$(5,\ 1)$ を通るとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，$c=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．この2次関数の定義域を $0\leqq x\leqq 8$ に制限すれば，y は $x=$ $\boxed{\text{エ}}$ で最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{カ}}$ で最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる．また，定義域を $-7\leqq x\leqq -2$ に制限すれば，y は $x=$ $\boxed{\text{ク}}$ で最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{コ}}$ で最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $xy = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7})}{2\times 2} = \dfrac{3-7}{4} = \mathbf{-1}$

$x+y = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} = \sqrt{3}$

したがって　$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{3}\,)^2 - 2\cdot(-1) = \mathbf{5}$

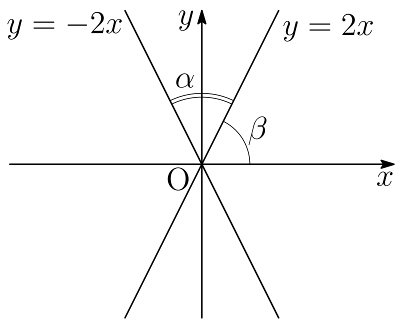
(2) 2 次方程式 $x^2+2x-1=0$ を解くと　$x = -1 \pm \sqrt{2}$

よって不等式 $x^2+2x-1<0$ の解は　$\boldsymbol{-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}}$

(3) 右の図から

$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2}$

$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{-2}$



上の 2 式から

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \tan\{(\alpha+\beta)-\beta\} \\ &= \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta} \\ &= \frac{-2-2}{1+(-2)\cdot 2} = \mathbf{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

答　ア. -1　イ. 5　ウ. $-1-\sqrt{2}$　エ. $-1+\sqrt{2}$　オ. 2　カ. -2　キ. $\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$A = \{4{\cdot}3,\ 4{\cdot}4,\ 4{\cdot}5,\ \cdots,\ 4{\cdot}24\}$$

$$B = \{6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ 6{\cdot}4,\ \cdots,\ 6{\cdot}16\}$$

$$A \cap B = \{12{\cdot}1,\ 12{\cdot}2,\ 12{\cdot}3,\ \cdots,\ 12{\cdot}8\}$$

全体集合を U とすると　$n(U) = 99 - 10 + 1 = 90$

(1) $n(A) = 24 - 3 + 1 = \mathbf{22,}$　　$n(B) = 16 - 2 + 1 = \mathbf{15}$

(2) $n(A \cap B) = \mathbf{8}$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 22 + 15 - 8 = \mathbf{29} \end{aligned}$$

(3) 4 の倍数であるが 6 の倍数でない数の個数は

$$n(A) - n(A \cap B) = 22 - 8 = \mathbf{14}$$

4 の倍数でないが 6 の倍数である数の個数は

$$n(B) - n(A \cap B) = 15 - 8 = \mathbf{7}$$

4 の倍数でも 6 の倍数でもない数の個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 90 - 29 = \mathbf{61} \end{aligned}$$

答　ア. 22　イ. 15　ウ. 8　エ. 29　オ. 14　カ. 7　キ. 61

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが3点 $(-1, -23)$，$(2,\ 7)$，$(5,\ 1)$ を通るから

$$-23 = a - b + c \quad \cdots ①$$
$$7 = 4a + 2b + c \quad \cdots ②$$
$$1 = 25a + 5b + c \quad \cdots ③$$

② − ① から　$3a + 3b = 30$
ゆえに　$a + b = 10 \quad \cdots ④$

③ − ② から　$21a + 3b = -6$
ゆえに　$7a + b = -2 \quad \cdots ⑤$

④，⑤ を解くと　$\boldsymbol{a = -2,\ b = 12}$
これらを ① に代入して　$\boldsymbol{c = -9}$

したがって　$y = -2x^2 + 12x - 9$

よって　$y = -2(x - 3)^2 + 9$

したがって，頂点が $(3,\ 9)$ で上に凸の放物線である．

定義域が $0 \leqq x \leqq 8$ のとき　$\boldsymbol{x = 3}$ **で最大値** $\mathbf{9}$ をとり，
$\boldsymbol{x = 8}$ **で最小値** $\mathbf{-41}$ をとる．

定義域が $-7 \leqq x \leqq -2$ のとき　$\boldsymbol{x = -2}$ **で最大値** $\mathbf{-41}$ をとり，
$\boldsymbol{x = -7}$ **で最小値** $\mathbf{-191}$ をとる．

答 ア．-2　イ．12　ウ．-9　エ．3　オ．9　カ．8　キ．-41
ク．-2　ケ．-41　コ．-7　サ．-191

1.4.4　一般入試 A 方式 2 月 8 日 (総合経営学部)70 分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\sqrt{10}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$ であり，$2a + b = \boxed{\text{ウ}}$，$b + \dfrac{1}{b} = \boxed{\text{エ}}$，$b^2 + \dfrac{1}{b^2} = \boxed{\text{オ}}$ である．

(2) $\dfrac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10^6}}$ を計算すると $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3) $\log_{10} 2 = 0.3010$ として，次の数を小数点以下 3 桁まで四捨五入して求めると，$\log_{10} 5 = \boxed{\text{キ}}$，$\log_2 5 = \boxed{\text{ク}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1 から 301 までの整数の集合を A とする．

(1) 3 の倍数かつ 7 の倍数である A の要素の個数は $\boxed{\text{ア}}$ 個である．

(2) 3 の倍数または 7 の倍数である A の要素の個数は $\boxed{\text{イ}}$ 個である．

(3) 3 でも 7 でも割り切れない A の要素の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個である．

(4) 3 の倍数であり，7 で割り切れない A の要素の個数は $\boxed{\text{エ}}$ 個である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を正の定数として，2 次関数 $y = x^2 - 6x + 5$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値と最小値を考える．$0 < a < 3$ のときの最大値は $\boxed{\text{ア}}$，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．$3 \leqq a < 6$ のときの最大値は $\boxed{\text{ウ}}$，最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である．また，$a = 6$ のときの最大値は $\boxed{\text{オ}}$，最小値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，$6 < a$ のときの最大値は $\boxed{\text{キ}}$，最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $3=\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}=4$ であるから $\boldsymbol{a=3}$

$a+b=\sqrt{10}$ より $b=\sqrt{10}-a=\boldsymbol{\sqrt{10}-3}$

したがって $2a+b=2\cdot3+(\sqrt{10}-3)=\boldsymbol{\sqrt{10}+3}$

$$\begin{aligned} b+\frac{1}{b}&=\sqrt{10}-3+\frac{1}{\sqrt{10}-3}\\ &=\sqrt{10}-3+\frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}\\ &=\sqrt{10}-3+(\sqrt{10}+3)\\ &=\mathbf{2\sqrt{10}} \end{aligned}$$

上式から $b^2+\dfrac{1}{b^2}=\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2-2$

$$=(2\sqrt{10})^2-2=\mathbf{38}$$

(2) $\dfrac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10^6}}=\sqrt[5]{\dfrac{10}{10^6}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{10^5}}=\mathbf{\dfrac{1}{10}}$

(3) $\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=\mathbf{0.699}$

$\log_2 5=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}5}=\dfrac{0.301}{0.699}=0.4306\cdots=\mathbf{0.431}$

答 ア. 3 イ. $\sqrt{10}-3$ ウ. $\sqrt{10}+3$ エ. $2\sqrt{10}$ オ. 38 カ. $\dfrac{1}{10}$
キ. 0.699 ク. 0.431

$\boxed{\mathbf{2}}$　全体集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 301\}$

3の倍数の集合を B，7の倍数の集合を C とする．

$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot100\}$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots,\ 7\cdot43\}$

$B\cap C=\{21\cdot1,\ 21\cdot2,\ 21\cdot3,\ \cdots,\ 21\cdot14\}$

(1) 3の倍数かつ7の倍数である A の要素の個数は

$$n(B\cap C)=\mathbf{14}$$

(2) 3の倍数または7の倍数である A の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(B\cup C)&=n(B)+n(C)-n(B\cap C)\\ &=100+43-14=\mathbf{129} \end{aligned}$$

(3) 3でも7でも割り切れない A の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{B}\cap\overline{C})&=n(\overline{B\cup C})\\ &=n(A)-n(B\cup C)\\ &=301-129=\mathbf{172} \end{aligned}$$

(4) 3の倍数であり，7で割り切れない A の要素の個数は

$$n(B)-n(B\cap C)=100-14=\mathbf{86}$$

答 ア．14　イ．129　ウ．172　エ．86

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2次関数 $y = x^2 - 6x + 5$ を変形して　$y = (x-3)^2 - 4$

したがって，軸の方程式が $x = 3$ で下に凸の放物線である．

［1］$0 < a < 3$ のとき

$x = 0$ で **最大値 5**，$x = a$ で **最小値** $\boldsymbol{a^2 - 6a + 5}$

［2］$3 \leqq a < 6$ のとき

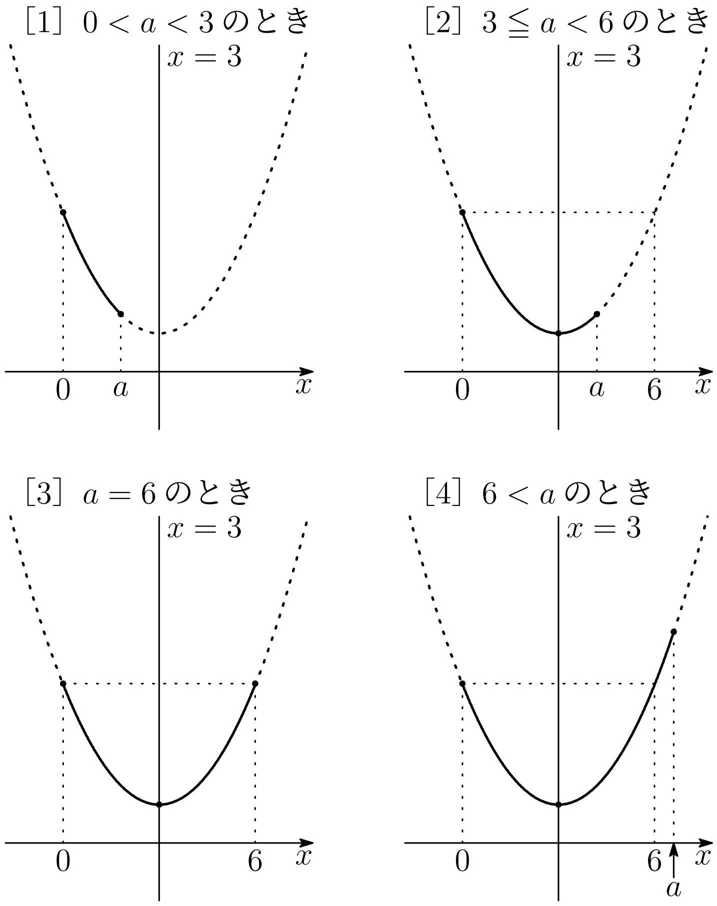
$x = 0$ で **最大値 5**，$x = 3$ で **最小値** $\boldsymbol{-4}$

［3］$a = 6$ のとき

$x = 0,\ 6$ で **最大値 5**，$x = 3$ で **最小値** -4

［4］$6 \leqq a$ のとき

$x = a$ で **最大値** $\boldsymbol{a^2 - 6a + 5}$，$x = 3$ で **最小値** $\boldsymbol{-4}$



答　ア．5　イ．$a^2 - 6a + 5$　ウ．5　エ．-4　オ．5　カ．-4

キ．$a^2 - 6a + 5$　ク．-4

1.4.5　一般入試A方式2月9日(総合経営学部)70分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{1}$ (1) $y = 4 - \sin^2 x - 4\cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 次の式を展開すると，
$(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の分母を有理化して整理すると $a = \boxed{\text{エ}}$ である．この a を用いて $(a-6)(a-3)$ を計算すると $\boxed{\text{オ}}$ となる．また，$a^2 - 6a = \boxed{\text{カ}}$ となる．

(4) $(x-2)(x^2-x+2)+x^2-2x+3$ を実数の範囲で因数分解すると $\boxed{\text{キ}}$ となる．

$\boxed{2}$ 大小2個のサイコロを投げ，出た目の数をそれぞれ x，y とし，分数 $\dfrac{y}{x}$ を作る．

(1) $\dfrac{y}{x} = 2$，$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{5}$ となる確率はそれぞれ $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\dfrac{y}{x} = 1$ となる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\dfrac{y}{x} < 1$ となる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $\dfrac{y}{x}$ が整数になる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\dfrac{y}{x}$ が1以上の分数であって整数にならない確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $\dfrac{y}{x}$ の値のとり方は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

$\boxed{3}$ (1) 鋭角三角形ABCにおいて，$\mathrm{AC} = 6$，$\mathrm{BC} = 5$ とし，その面積を $6\sqrt{6}$ とする．このとき，$\sin C = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\cos C = \boxed{\text{イ}}$ である．また，辺ABの長さは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，外接円の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) 長さが20の線分AB上に点Pをとり，APを1辺とする正三角形とBPを1辺とする正三角形を作る．これら2つの正三角形の面積の和が最小となるのは $\mathrm{AP} = \boxed{\text{オ}}$ のときであり，そのときの面積の和は $\boxed{\text{カ}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $4-\sin^2 x-4\cos x=\cos^2 x-4\cos x+3$ であるから

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 2\pi$ より

$$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1\quad(-1\leqq t\leqq 1)$$

この関数のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $t=2$ である．

$t=-1$ のとき**最大値 8** をとり，$t=1$ のとき**最小値 0** をとる．

(2) $\quad(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=\{(x+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}\{(x-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}$

$=(x^2+2\sqrt{2}x-1)(x^2-2\sqrt{2}x-1)$

$=\{(x^2-1)+2\sqrt{2}x\}\{(x^2-1)-2\sqrt{2}x\}$

$=(x^2-1)^2-(2\sqrt{2}x)^2$

$=x^4-2x^2+1-8x^2$

$=\boldsymbol{x^4-10x^2+1}$

(3) $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\boldsymbol{6+2\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}(a-6)(a-3)&=\{(6+2\sqrt{6})-6\}\{(6+2\sqrt{6})-3\}\\&=2\sqrt{6}(3+2\sqrt{6})\\&=\boldsymbol{6\sqrt{6}+24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2-6a&=a(a-6)\\&=(6+2\sqrt{6})\{(6+2\sqrt{6})-6\}\\&=(6+2\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{6}\\&=\boldsymbol{12\sqrt{6}+24}\end{aligned}$$

(4) $\quad(x-2)(x^2-x+2)+x^2-2x+3$

$=x^3-2x^2+2x-1$

$=x^3-1-2x(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)$

$=(x-1)\{(x^2+x+1)-2x\}$

$=\boldsymbol{(x-1)(x^2-x+1)}$

答 ア．8　イ．0　ウ．x^4-10x^2+1　エ．$6+2\sqrt{6}$　オ．$6\sqrt{6}+24$

カ．$12\sqrt{6}+24$　キ．$(x-1)(x^2-x+1)$

$\boxed{\textbf{2}}$ 大小2個のサイコロの目の出方は 6×6 の36通り

(1) $\dfrac{y}{x} = 2$ となるのは $(x,\ y) = (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6)$ の3通り

よって，求める確率は $\dfrac{3}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{5}$ となるのは $(x,\ y) = (5,\ 1)$ の1通り

よって，求める確率は $\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2) $\dfrac{y}{x} = 1$ となるのは

$$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6) \text{ の6通り}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

$\dfrac{y}{x} < 1$ となるのは

$x = 2$ のとき $y = 1$

$x = 3$ のとき $y = 1,\ 2$

$x = 4$ のとき $y = 1,\ 2,\ 3$

$x = 5$ のとき $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$x = 6$ のとき $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

の $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ の15通り

よって，求める確率は $\dfrac{15}{36} = \mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3) $\dfrac{y}{x}$ が整数となるのは

$x = 1$ のとき $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$x = 2$ のとき $y = 2,\ 4,\ 6$

$x = 3$ のとき $y = 3,\ 6$

$x = 4$ のとき $y = 4$

$x = 5$ のとき $y = 5$

$x = 6$ のとき $y = 6$

の $6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ の14通り

よって，求める確率は $\dfrac{14}{36} = \mathbf{\dfrac{7}{18}}$

$\dfrac{y}{x}$ が 1 以上の分数であって整数にならないのは

$x=2$ のとき　$y=3,\ 5$

$x=3$ のとき　$y=4,\ 5$

$x=4$ のとき　$y=5,\ 6$

$x=5$ のとき　$y=6$

の $2+2+2+1$ の 7 通り

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{7}{36}}$

(4) $\dfrac{y}{x}<1$ となる値の取り方を調べると

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6},\ \frac{1}{3}=\frac{2}{6},\ \frac{2}{3}=\frac{4}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$$

の 11 通りある．同様に $\dfrac{y}{x}>1$ となる値も 11 通りある．これらの値の取り方と $\dfrac{y}{x}=1$ となる値の取り方を含めて，$11+11+1$ の **23 通り**.

答 ア. $\dfrac{1}{12}$　イ. $\dfrac{1}{36}$　ウ. $\dfrac{1}{6}$　エ. $\dfrac{5}{12}$　オ. $\dfrac{7}{18}$　カ. $\dfrac{7}{36}$　キ. 23

3 (1) $\mathrm{AC}=6$，$\mathrm{BC}=5$，$S=6\sqrt{6}$ を $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\sin C$ に代入すると

$$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin C \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ から

$$\cos^2 C=1-\sin^2 C=1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

C は鋭角より，$\cos C>0$ であるから　$\cos C=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C \\ &= 5^2 + 6^2 - 2\cdot5\cdot6\cdot\frac{1}{5} \\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから　$\mathbf{AB = 7}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$

したがって　$R = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C} = \dfrac{1}{2} \times 7 \div \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = \dfrac{35}{4\sqrt{6}} = \boldsymbol{\dfrac{35\sqrt{6}}{24}}$

(2) $\mathrm{AP} = x$ とすると，$\mathrm{BP} = 20 - x$

AP，BP を 1 辺とする 2 つの正三角形の面積の和を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}x^2\sin 60^\circ + \frac{1}{2}(20-x)^2\sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{x^2 + (20-x)^2\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 20x + 200) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x-10)^2 + 50\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって，$x = \mathrm{AP} = \mathbf{10}$ のとき，S は**最小値** $\mathbf{50\sqrt{3}}$ をとる．

答 ア．$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　イ．$\dfrac{1}{5}$　ウ．7　エ．$\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$　オ．10　カ．$50\sqrt{3}$

1.4.6 一般入試 A 方式 2 月 9 日 (産業工学部・農学部) 70 分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 多項式 $f(x)$ を $x-3$ で割ると余りは 7，$x-4$ で割ると余りは 3 である．このとき，$f(x)$ を $(x-3)(x-4)$ で割ると余りは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $5^x = 7^y = 10$ のとき，$10^{\frac{x+y}{xy}} = \boxed{\text{イ}}$ である．

(3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ を解くと，$x = \boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$0 < x < \pi$ とする．

(4) (i) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = S_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

が成り立つとき，a_n を n を用いて表すと，$a_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

(ii) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 2T_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

が成り立つとき，b_n を n を用いて表すと，$b_n = \boxed{\text{オ}}$ である．

(5) 関数 $f(x)$ が，$f(x) = x^2 + 2x + 4\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x) = \boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 5$ のとき $\alpha^2 - 2\alpha - \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} = \boxed{\text{ア}}$ である．

したがって，$x = \alpha$ は方程式 $x^4 - 2x^3 - \boxed{\text{ア}}x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である．

逆に，方程式 $x^4 - 2x^3 - \boxed{\text{ア}}x^2 - 2x + 1 = 0$ の解の1つを $x = \alpha$ とすると $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 5$ または $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \boxed{\text{イ}}$ であり，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 5$ のとき $\alpha = \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) 4次方程式

$$x^4 - 2x^3 + bx^2 - 2x + 1 = 0 \quad \cdots ①$$

の実数解の個数を調べたい．

$X = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと，方程式 ① から X についての方程式

$$X^2 - \boxed{\text{オ}}X + \boxed{\text{カ}} = 0 \quad \cdots ②$$

が得られる．

(i) 方程式 ② が実数解をもつような b の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ii) 方程式 ① が実数解をもつような b の範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である．

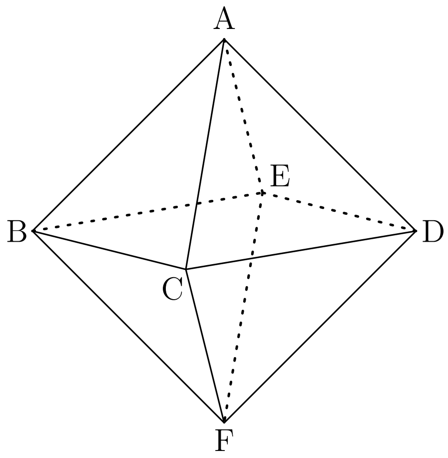
$b = \boxed{\text{ケ}}$ のとき，方程式 ① はちょうど3つの実数解をもち，それらは小さい順に $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 右の図のような一辺の長さが 2 の正八面体 ABCDEF がある．

(1) BD = $\boxed{\text{ア}}$ である．$\angle$ACF を θ_1 とおくと，$\sin\theta_1 = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 辺 BC と辺 DE の中点をそれぞれ M，N とし，$\angle$AMN を θ_2 とおくと，$\cos\theta_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ の内積は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) この正八面体 ABCDEF に内接する球の半径は $\boxed{\text{オ}}$ であり，その球の体積は $\boxed{\text{カ}}$ である．



解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x-4)$ で割った余りを $ax+b$ とし，商を $Q(x)$ とすると，次の式が成り立つ．

$$f(x)=(x-3)(x-4)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$f(3)=3a+b$，$f(4)=4a+b$

また，$x-3$ で割った余りが 7 であるから　$f(3)=7$

$x-4$ で割った余りが 3 であるから　$f(4)=3$

よって　$3a+b=7$，$4a+b=3$

これを解くと　$a=-4$，$b=19$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{-4x+19}$

(2) $10^{\frac{x+y}{xy}}=10^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=10^{\frac{1}{y}}\times 10^{\frac{1}{x}}$

$5^x=7^y=10$ から　$10^{\frac{1}{y}}=7$，$10^{\frac{1}{x}}=5$

したがって　$10^{\frac{x+y}{xy}}=10^{\frac{1}{y}}\times 10^{\frac{1}{x}}=7\times 5=\mathbf{35}$

(3) 左辺を変形すると　$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

$0<x<\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi$　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{12}\pi}$

(4) (i)　$a_1=1$

$a_{n+1}=S_n+1$　$\cdots$①

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_{n-1}+1$　$\cdots$②

$a_2=S_1+1=a_1+1=1+1=2$　$\cdots$③

① − ② から　$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}$

ここで，$S_n-S_{n-1}=a_n$ であるから

$a_{n+1}-a_n=a_n$　すなわち　$a_{n+1}=2a_n$　$\cdots$④

③，④ から　$a_n=2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$

初項は $a_1=1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$

(ii)
$$b_1 = 1$$
$$b_{n+1} = 2T_n + 1 \quad \cdots ①$$
$n \geqq 2$ のとき　$b_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \cdots ②$
$$b_2 = 2T_1 + 1 = 2b_1 + 1 = 2\cdot1 + 1 = 3 \quad \cdots ③$$
① − ② から　$b_{n+1} - b_n = 2(T_n - T_{n-1})$

ここで，$T_n - T_{n-1} = b_n$ であるから
$$b_{n+1} - b_n = 2b_n \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = 3b_n \quad \cdots ④$$
③，④ から　$b_n = 3\cdot3^{n-2} = 3^{n-1}$

初項は $b_1 = 1$ なので，上の b_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は　$\boldsymbol{b_n = 3^{n-1}}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = k$ とおくと
$$f(x) = x^2 + 2x + 4k$$
よって　$$k = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t + 4k)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 4kt\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{3} + 4k$$
すなわち　$k = \dfrac{4}{3} + 4k$　これを解いて　$k = -\dfrac{4}{9}$

したがって　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{16}{9}}$

答　ア．$-4x + 19$　イ．35　ウ．$\dfrac{5}{12}\pi$　エ．2^{n-1}　オ．3^{n-1}　カ．$x^2 + 2x - \dfrac{16}{9}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2=5^2-2=23$ より

$$\alpha^2-2\alpha-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=23-2\cdot5=\mathbf{13}$$

ゆえに　　$\alpha^4-2\alpha^3-13\alpha^2-2\alpha+1=0$

したがって，$x=\alpha$ は方程式 $x^4-2x^3-\mathbf{13}x^2-2x+1=0$ の解である．

逆に，方程式 $x^4-2x^3-\mathbf{13}x^2-2x+1=0$ の解の1つを α とすると，$\alpha\neq0$ であるから

$$\alpha^2-2\alpha-13-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

ゆえに　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-15=0$

したがって　$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-5\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}+3\right)=0$

よって　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$　または　$\boldsymbol{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-3}$

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$ のとき，$\alpha^2-5\alpha+1=0$ を解いて　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$

(2) (i) $x^4-2x^3+bx^2-2x+1=0$　$\cdots$①

$x=0$ は①の解でないから

$$x^2-2x+b-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=X$ とおくと　$X^2-\mathbf{2}X+\boldsymbol{b}-\mathbf{2}=0$　$\cdots$②

②が実数解をもつとき，$D\geqq0$ であるから

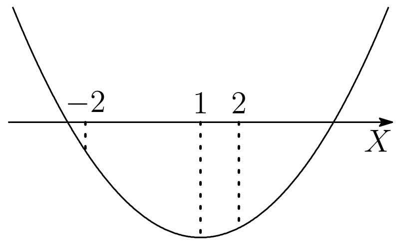
$$D/4=(-1)^2-1\cdot(b-2)\geqq0\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b\leqq3}$$

(ii) x の方程式 $x+\dfrac{1}{x}=X$　すなわち　$x^2-Xx+1=0$

この方程式の係数について

$$D=(-X)^2-4\cdot1\cdot1=(X+2)(X-2)\quad\cdots③$$

方程式が実数解をもつとき，$D\geqq0$ より　$X\leqq-2,\ 2\leqq X$　$\cdots$④



$f(X) = X^2 - 2X + b - 2$ とおくと

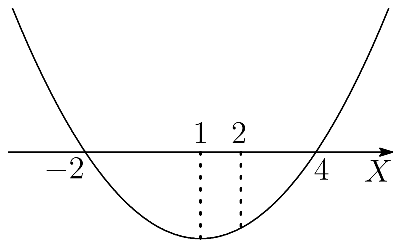
$$f(X) = (X-1)^2 + b - 3$$

$f(X) = 0$ の解が ④ を満たすとき

$$f(-2) \leqq 0$$

ゆえに　$(-2)^2 - 2\cdot(-2) + b - 2 \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{b \leqq -6}$



③ から $x + \dfrac{1}{x} = \pm 2$ のとき，この方程式は重解をもつ．右のグラフより，方程式 ① が 3 つの実数解をもつための条件は，④ に注意して

$$f(-2) = 0$$

ゆえに　$(-2)^2 - 2\cdot(-2) + b - 2 = 0$

よって　$\boldsymbol{b = -6}$

右の図から，このとき方程式 ① の解は

$x + \dfrac{1}{x} = -2$　すなわち　$x^2 + 2x + 1 = 0$ を解いて　$\boldsymbol{x = -1}$

$x + \dfrac{1}{x} = 4$　すなわち　$x^2 - 4x + 1 = 0$ を解いて　$\boldsymbol{x = 2 \pm \sqrt{3}}$

答 ア．13　イ．-3　ウ．エ．$\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$　オ．2　カ．$b-2$　キ．$b \leqq 3$
ク．$b \leqq -6$　ケ．-6　コ．-1　サ．$2-\sqrt{3}$　シ．$2+\sqrt{3}$

3 (1) BD は正方形 BCDE の対角線であるから　$\mathrm{BD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$

EA = AC = 2，CE = $2\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{CE}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{AC}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{EAC} = 90^\circ$$

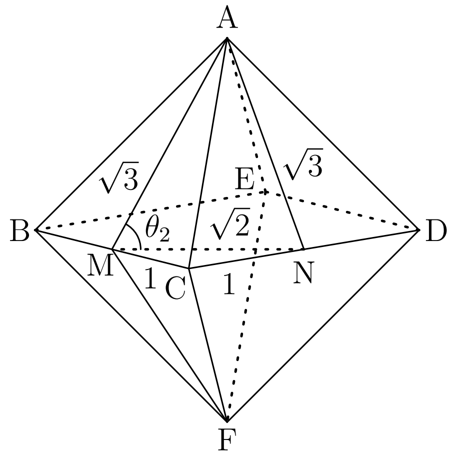
EA = AC = CF = FE，$\angle$EAC = 90° であるから，四角形 EACF は正方形である．よって，$\sin\theta_1 = \sin\angle\mathrm{ACF} = \sin 90^\circ = \boldsymbol{1}$

(2) $\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{CM}^2 + \mathrm{CN}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{CA}^2 - \mathrm{CM}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\mathrm{NA} = \sqrt{\mathrm{CA}^2 - \mathrm{CN}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{AMN}$ に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \frac{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{MN}^2 - \mathrm{NA}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MN}}\\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AMF} = \cos 2\theta_2 = 2\cos^2\theta_2 - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MF}} = |\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MF}}|\cos\angle\mathrm{AMF} = \sqrt{3}\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{-1}$

(3) AF は正方形 EACF の対角線であるから　$\mathrm{AF} = 2\sqrt{2}$

正八面体 ABCDEF の体積を V，表面積を S，および内接する球の半径を r とする．

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{四角形 BCDE}) \times \mathrm{AF} = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$S = 8 \times \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$$

これらを $V = \dfrac{1}{3}Sr$ に代入して

$$\frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{3}\cdot 8\sqrt{3}r \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

よって，内接する球の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{6}}{27}\pi}$

答　ア．$2\sqrt{2}$　イ．1　ウ．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　エ．-1　オ．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　カ．$\dfrac{8\sqrt{6}}{27}\pi$

1.4.7 一般入試 A 方式 2 月 10 日 (産業工学部・農学部)70 分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$ の展開式において，x^2 の係数が $-\dfrac{1}{2}$ であるならば，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ で，定数項は $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，a は実数の定数である．

(2) 不等式 $x^3-5x^2+2x+8 \geqq 0$ を解くと $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 三角形 ABC において AB $=2$，BC $=3$，CA $=4$ とする．

(i) $\cos B=$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

(ii) 三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) 座標平面上の 2 つのベクトルを $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ とする．
$s\vec{a}+t\vec{b}=(5,\ 4)$ のとき，$s=$ $\boxed{\text{キ}}$，$t=$ $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) $\tan\theta=\dfrac{12}{5}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ であるとき，$\sin\theta=$ $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(6) n を自然数とする．次の和を求め，因数分解した形で書くと，

$$2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots+2n\cdot 1=\boxed{\text{コ}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-(2a+3)x-(3a+2)$ とおく．

(1) a の値にかかわらず，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ は方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つである．

(2) $f(x)$ の極小値について考える．

(i) $f'(x)=0$ の解は，$x=$ $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(ii) $-3<a$ のとき，$y=f(x)$ が正の極小値をもつような a の範囲は，$\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $f(x)=0$ が 2 重解をもつような a の値は 3 つあり，それらは $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ である．

3 2つの容器AとBがある．容器Aには濃度10%の食塩水が400g入っていて，容器Bには濃度15%の食塩水が400g入っている．次の操作を考える．

操作: 容器Aと容器Bからそれぞれ100gの食塩水をとる．次に容器Aからとった食塩水100gを容器Bに，容器Bからとった食塩水100gを容器Aにそれぞれ入れ，濃度が均一になるようによくかきまぜる．

(1) 上記の操作を1回行ったとき，容器Aの食塩水の濃度は $\boxed{\text{ア}}$ %であり，容器Bの食塩水の濃度は $\boxed{\text{イ}}$ %である．
上記の操作を n 回行ったときの容器Aの食塩水の濃度を a_n% とする．したがって $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 上記の操作を n 回行ったとき，容器Bの食塩水の濃度を a_n を用いて表すと $\boxed{\text{ウ}}$ %である．

(3) a_{n+1} と a_n の間には $a_{n+1} = pa_n + q$ という関係が成り立つ．
ただし，$p = \boxed{\text{エ}}$，$q = \boxed{\text{オ}}$ である．

(4) (i) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(ii) 容器Aの食塩水の濃度がはじめて12.25%より大きくなるのは，$\boxed{\text{キ}}$ 回操作を行ったときである．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$ の一般項は

$$ {}_4\mathrm{C}_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r}x^{4-2r} $$

x^2 の係数が $-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$ 4-2r=2,\ \ {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r} = -\frac{1}{2} $$

第 1 式から，$r=1$．これを第 2 式に代入して

$$ {}_4\mathrm{C}_1 a^3 = -\frac{1}{2} \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}} $$

$4-2r=0$ のとき　$r=2$

よって，定数項は　${}_4\mathrm{C}_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{4-2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(2) $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ とすると

$$ f(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+8=0 $$

よって，$f(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$ f(x)=(x+1)(x^2-6x+8) $$

したがって

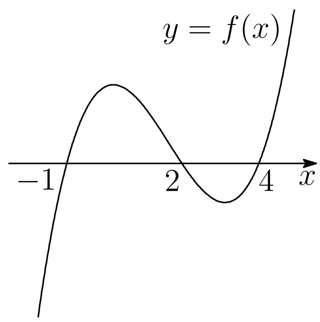
$$ f(x)=(x+1)(x-2)(x-4) $$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -6x & +8 & \\ \cline{2-5}
x+1\,\big) & x^3 & -5x^2 & +2x & +8 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x^2 & +2x & \\
 & & -6x^2 & -6x & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & +8 \\
 & & & 8x & +8 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$y=f(x)$ のグラフは，x 軸と -1，2，4 で交わるので，右のグラフから

$$ x^3-5x^2+2x+8 \geqq 0 $$

の解は　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 2,\ 4 \leqq x}$



(3)　(i) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

(ii) $\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}$

(4)　$s\vec{a}+t\vec{b} = s(1,\ 3)+t(-1,\ 1) = (s-t,\ 3s+t)$ であるから，
$s\vec{a}+t\vec{b} = (5,\ 4)$ より

$$(s-t,\ 3s+t) = (5,\ 4)$$

よって　$s-t=5,\ 3s+t=4$

これを解いて　$\boldsymbol{s = \dfrac{9}{4},\ t = -\dfrac{11}{4}}$

(5)　$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{169}{25}$$　ゆえに　$\cos^2\theta = \dfrac{25}{169}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ であるから　$\cos\theta < 0$

したがって　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{25}{169}} = -\dfrac{5}{13}$

よって　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{12}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{12}{13}}$

(6) $2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots+2n\cdot 1$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k\{2n-(2k-1)\}$$
$$=2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-4\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=2(2n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)-4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=n(n+1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)}$$

答 ア. $-\dfrac{1}{2}$ イ. $\dfrac{3}{2}$ ウ.エ. $-1\leqq x\leqq 2,\ 4\leqq x$ オ. $-\dfrac{1}{4}$ カ. $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$
キ. $\dfrac{9}{4}$ ク. $-\dfrac{11}{4}$ ケ. $-\dfrac{12}{13}$ コ. $\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

2 (1) $f(x)$ を a について整理し，因数分解すると

$$\begin{aligned}f(x)&=a(x^2-2x-3)+(x^3-3x-2)\\&=a(x+1)(x-3)+(x+1)(x^2-x-2)\\&=a(x+1)(x-3)+(x+1)^2(x-2)\\&=(x+1)\{a(x-3)+(x+1)(x-2)\}\end{aligned}$$

a の値にかかわらず，$\boldsymbol{x=-1}$ は方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つである．

(2) (i) $f(x)=x^3+ax^2-(2a+3)x-(3a+2)$ を微分して

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+2ax-(2a+3)\\&=(x-1)(3x+2a+3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ の解は $\quad\boldsymbol{x=-\dfrac{2a+3}{3},\ 1}$

(ii) $-3<a$ のとき $\quad -\dfrac{2a+3}{3}<1$

したがって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2a+3}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき，$f(1)>0$ であればよいから

$$1^3+a\cdot1^2-(2a+3)\cdot1-(3a+2)>0 \quad ゆえに \quad a<-1$$

よって，$-3<a$ に注意して $\quad\boldsymbol{-3<a<-1}$

(3) (1) の結果から $f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x-(3a+2)\}$

$f(x)=0$ が 2 重解をもつとき，次の 2 つの場合に分けられる．

［1］ 2 次方程式 $x^2+(a-1)x-(3a+2)=0$ が重解でない解 -1 をもつとき，

$$(-1)^2+(a-1)\cdot(-1)-(3a+2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=0$$

実際，$a=0$ のとき，この方程式 $x^2-x-2=0$ は条件を満たす.

［2］ 2 次方程式 $x^2+(a-1)x-(3a+2)=0$ が -1 でない重解をもつとき，係数について

$$\begin{aligned}(a-1)^2-4\cdot1\cdot\{-(3a+2)\}&=0\\ a^2+10a+9&=0\\ (a+1)(a+9)&=0\\ a&=-1,-9\end{aligned}$$

実際， $a=-1$ のとき，方程式は $x^2-2x+1=0$ (重解 1)

$a=-9$ のとき，方程式は $x^2-10x+25=0$ (重解 5)

ゆえに，これらは条件を満たす.

よって，求める a の値は $\boldsymbol{a=0,-1,-9}$

答 ア．-1 イ．ウ．$-\dfrac{2a+3}{3}$, 1 エ．$-3<a<-1$ オ．カ．キ．$0,-1,-9$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) 容器 A の濃度は $\dfrac{300\times0.1+100\times0.15}{300+100}\times100=\mathbf{11.25}$ (%)

容器 B の濃度は $\dfrac{300\times0.15+100\times0.1}{300+100}\times100=\mathbf{13.75}$ (%)

(2) 容器 A と容器 B に入っている食塩の質量の和は

$$400\times0.1+400\times0.15=100 \text{ (g)}$$

容器 A の濃度が a_n のとき，容器 A に入っている食塩の質量は

$$400\times\frac{a_n}{100}=4a_n \text{ (g)}$$

このとき，容器 B に入っている食塩の質量は $100-4a_n$ (g)

よって，容器 B の濃度は

$$\frac{100-4a_n}{400}\times100=\boldsymbol{25-a_n} \text{ (\%)}$$

(3)　(2) の結果から

$$a_{n+1} = \frac{300 \times \dfrac{a_n}{100} + 100 \times \dfrac{25 - a_n}{100}}{400} \times 100 = \boldsymbol{\frac{1}{2}a_n + \frac{25}{4}}$$

(4)　(i)　(3) の結果から

$$a_{n+1} - \frac{25}{2} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{25}{2}\right), \qquad a_1 - \frac{25}{2} = -\frac{5}{4}$$

したがって　$a_n - \dfrac{25}{2} = -\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{25}{2} - \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(ii)　(i) の結果を利用して

$$\frac{25}{2} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 12.25$$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{1}{5}$

よって，**4** 回操作を行ったときである．

答　ア．11.25　イ．13.75　ウ．$25 - a_n$　エ．$\dfrac{1}{2}$　オ．$\dfrac{25}{4}$

カ．$\dfrac{25}{2} - \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　キ．4

1.4.8　一般入試 A 方式 2 月 11 日 (産業工学部・農学部)70 分

次の空欄を埋めなさい．
解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a>0$ とする．$a-2+\dfrac{2}{a+1}$ は $a=\boxed{\text{ア}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる．

(2) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) 2 乗して $-1+2\sqrt{6}\,i$ となる複素数は，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ である．ただし，i は虚数単位である．

(4) 正の実数 a に対して，$f(a)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (3x^2-6x+5)\,dx$ とおく．
$f(a)$ は $a=\boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる．

(5) 正の実数 x を小数点以下 1 位で四捨五入して得られる整数を $N(x)$ で表す．$|x-N(x)|$ を，x と**整数の距離**とよぶ．

(i) $N(\log_2 6)=\boxed{\text{ク}}$ である．

(ii) $\log_2 7$，$\log_2 9$，$\log_2 15$，$\log_2 17$ を，整数との距離が小さい順に並べたとき，3 番目は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,-2,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 6,-1)$，$\mathrm{C}(-3,\ 4,\ 5)$ がある．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}},\boxed{\text{ウ}})$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{エ}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{オ}}$

(4) 線分 AB を $\boxed{\text{エ}}:\boxed{\text{オ}}$ に内分する点 P の座標は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{キ}}$

(6) 点 A から線分 BC に垂線 AQ を下ろすと，点 Q の座標は $\boxed{\text{ク}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $G : y = -4x^2 + 2x$ を考える．G 上の点 $\mathrm{A}(t, -4t^2 + 2t)$ $\left(0 < t < \dfrac{1}{2}\right)$ から x 軸に垂線 AH を下ろす．また，原点を O とおく．

(1) △OAH の面積を $S(t)$ とおくと，$S(t) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $S(t)$ は，$t = \boxed{\text{イ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

(3) 直線 OA と同じ傾きをもつ放物線 G の接線 l を考える．l と G の接点の座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．また，l の方程式を $y = ax + b$ と書くと，$a = \boxed{\text{オ}}$，$b = \boxed{\text{カ}}$ である．

(4) 接線 l と x 軸との交点を B，直線 $x = t$ との交点を C とする．$S(t)$ が最大になるとき

$$\frac{\triangle\mathrm{BCH}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{OAH}\text{ の面積}} = \boxed{\text{キ}}$$

である

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a>0$ より $a+1>0$，$\dfrac{2}{a+1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} a-2+\frac{2}{a+1} &= (a+1)+\frac{2}{a+1}-3 \\ &\geqq 2\sqrt{(a+1)\times\frac{2}{a+1}}-3 \\ &= 2\sqrt{2}-3 \end{aligned}$$

ゆえに　$a-2+\dfrac{2}{a+1}-3 \geqq 2\sqrt{2}-3$

等号が成り立つのは　$a+1=\dfrac{2}{a+1}$

ゆえに　$(a+1)^2=2$

$a=\pm\sqrt{2}-1$

$a>0$ より　$a=\sqrt{2}-1$

よって，$a-2+\dfrac{2}{a+1}$ $(a>0)$ は $\boldsymbol{a=\sqrt{2}-1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}-3}$ をとる．

(2) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$$

ゆえに　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{16}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{15}{32}$

よって

$$\begin{aligned} \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \boldsymbol{-\frac{32}{15}} \end{aligned}$$

(3) 2 乗して $-1+2\sqrt{6}\,i$ となる複素数を $a+bi$ (a, b は実数) とおくと

$$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$$

ゆえに　$a^2-b^2+2abi = -1+2\sqrt{6}\,i$

a^2-b^2，$2ab$ は実数であるから

$$\begin{cases} a^2-b^2=-1 & \cdots ① \\ ab=\sqrt{6} & \cdots ② \end{cases}$$

ここで，a^2，$-b^2$ を解とする 2 次方程式は

$$(x-a^2)(x+b^2)=0$$
$$x^2-(a^2-b^2)x-(ab)^2=0$$

①，② より　$x^2+x-6=0$

これを解いて　$x=2, -3$

ゆえに　$a^2=2$，$-b^2=-3$

② に注意して　$a=\pm\sqrt{2},\ b=\pm\sqrt{3}$　(複号同順)

よって，求める複素数は　$\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i,\quad -\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$

(4) $f(a) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (3x^2-6x+5)\,dx$

$$= \frac{1}{a}\Big[\, x^3-3x^2+5x \,\Big]_0^a$$
$$= \frac{1}{a}(a^3-3a^2+5a)$$
$$= a^2-3a+5$$

ゆえに　$f(a) = \left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$ **のとき　最小値** $\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$ **をとる**

(5) (i) $4\sqrt{2}<6<8$ であるから

$$\log_2 4\sqrt{2} < \log_2 6 < \log_2 8$$

ゆえに　$2.5 < \log_2 6 < 3$

よって　$\boldsymbol{N(\log_2 6)=3}$

(ii) $4\sqrt{2} < 7 < 8$ であるから　$2.5 < \log_2 7 < 3$

$8 < 9 < 8\sqrt{2}$ であるから　$3 < \log_2 9 < 3.5$

$8\sqrt{2} < 15 < 16$ であるから　$3.5 < \log_2 15 < 4$

$16 < 17 < 16\sqrt{2}$ であるから　$4 < \log_2 17 < 4.5$

$$|\log_2 7 - N(\log_2 7)| = |\log_2 7 - 3| = \log_2 \frac{8}{7}$$

$$|\log_2 9 - N(\log_2 9)| = |\log_2 9 - 3| = \log_2 \frac{9}{8}$$

$$|\log_2 15 - N(\log_2 15)| = |\log_2 15 - 4| = \log_2 \frac{16}{15}$$

$$|\log_2 17 - N(\log_2 17)| = |\log_2 17 - 4| = \log_2 \frac{17}{16}$$

$\dfrac{17}{16} < \dfrac{16}{15} < \dfrac{9}{8} < \dfrac{8}{7}$ であるから　$\log_2 \dfrac{17}{16} < \log_2 \dfrac{16}{15} < \log_2 \dfrac{9}{8} < \log_2 \dfrac{8}{7}$

よって，整数との距離が3番目に小さいのは　$\mathbf{\log_2 15}$

答　ア．$\sqrt{2}-1$　イ．$2\sqrt{2}-3$　ウ．$-\dfrac{32}{15}$　エ．オ．$\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$

カ．$\dfrac{3}{2}$　キ．$\dfrac{11}{4}$　ク．3　ケ．$\log_2 15$

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{AB} = (5,\ 6, -1) - (1, -2,\ 3) = \mathbf{(4,\ 8, -4)}$

(2) $\overrightarrow{AC} = (-3,\ 4,\ 5) - (1, -2,\ 3) = (-4,\ 6,\ 2)$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot(-4) + 8\cdot 6 + (-4)\cdot 2 = \mathbf{24}$

(3) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(4,\ 8, -4) = (-4, -8,\ 4)$

$\overrightarrow{BC} = (-3,\ 4,\ 5) - (5,\ 6, -1) = (-8, -2,\ 6)$

よって　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -4\cdot(-8) + (-8)\cdot(-2) + 4\cdot 6 = \mathbf{72}$

(4) 線分 AB を 24 : 72 すなわち 1 : 3 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{3\cdot 1 + 1\cdot 5}{1+3},\ \frac{3\cdot(-2) + 1\cdot 6}{1+3},\ \frac{3\cdot 3 + 1\cdot(-1)}{1+3}\right) \quad \text{ゆえに}\quad \mathbf{(2,\ 0,\ 2)}$$

(5) $\overrightarrow{CP} = (2,\ 0,\ 2) - (-3,\ 4,\ 5) = (5, -4, -3)$

ゆえに　$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB} = 5\cdot 4 + (-4)\cdot 8 + (-3)\cdot(-4) = \mathbf{0}$

(6) 原点を O とすると

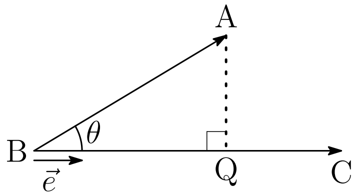
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= (5,\ 6, -1) + \frac{72}{(-8)^2+(-2)^2+6^2}(-8, -2,\ 6) \\ &= \left(-\frac{7}{13},\ \frac{60}{13},\ \frac{41}{13}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{Q}\left(-\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{13}},\ \dfrac{\mathbf{60}}{\mathbf{13}},\ \dfrac{\mathbf{41}}{\mathbf{13}}\right)$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角を θ とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} \cdots ①$$



とおくと，A から BC に下ろした垂線の足 Q について

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = (|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cos\theta)\vec{e}$$

また，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}$ であるから，これと ① を上式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

答　ア. 4　イ. 8　ウ. -4　エ. 24　オ. 72　カ. $(2,\ 0,\ 2)$　キ. 0
ク. $\left(-\dfrac{7}{13},\ \dfrac{60}{13},\ \dfrac{41}{13}\right)$

$\boxed{3}$ (1) O$(0,\ 0)$, A$(t, -4t^2+2t)$, H$(t,\ 0)$ $\left(0<t<\dfrac{1}{2}\right)$ であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}t(-4t^2+2t)=\boldsymbol{-2t^3+t^2}$$

(2) $S'(t)=-6t^2+2t=-2t(3t-1)$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	極大 $\frac{1}{27}$	↘	

よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$ **をとる**

(3) 直線 OA の傾きは　$\dfrac{(-4t^2+2t)-0}{t-0}=-4t+2$

$y'=-8x+2$ より，l と G の接点の x 座標は

$-8x+2=-4t+2$　これを解いて　$x=\dfrac{t}{2}$

よって，接点の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{t}{2}, -t^2+t\right)}$

ゆえに，l は点 $\left(\dfrac{t}{2}, -t^2+t\right)$ を通り，傾き $-4t+2$ の直線

$$y-(-t^2+t)=(-4t+2)\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

すなわち　　$\boldsymbol{y=(-4t+2)x+t^2}$

(4) A の y 座標は　$y=-4t^2+2t$

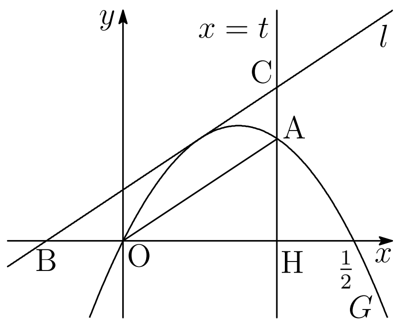
C の y 座標は，(3) の結果に $x=t$ を代入して　$y=-3t^2+2t$

$\triangle$BCH $\backsim$ $\triangle$OAH であるから

$$\frac{\text{CH}}{\text{AH}}=\frac{-3t^2+2t}{-4t^2+2t}=\frac{2-3t}{2-4t}$$

ゆえに　$\dfrac{\triangle\text{BCH}}{\triangle\text{OAH}}=\left(\dfrac{2-3t}{2-4t}\right)^2$

$S(t)$ が最大となる $t=\dfrac{1}{3}$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{\triangle\text{BCH}}{\triangle\text{OAH}}=\dfrac{9}{4}}$



答 ア．$-2t^3+t^2$　イ．$\dfrac{1}{3}$　ウ．$\dfrac{1}{27}$　エ．$\left(\dfrac{t}{2}, -t^2+t\right)$　オ．$-4t+2$　カ．t^2

キ．$\dfrac{9}{4}$

1.4.9 一般入試 B 方式 (総合経営学部) 70 分

次の空欄を埋めなさい．問題文中の各空欄にはそれぞれ 0〜9 の数字の一つが入ります．各空欄の番号は解答番号を表します．解答は，解答用紙の解答番号に対応した解答欄にマークしなさい．
問い $\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$ を通して，解答は，分数の場合には既約分数の形で，また根号を含む場合には根号の中が最小の自然数になるように表しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 4$ ならば $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$ である．

(2) 袋の中に赤玉が 3 個，白玉が 2 個，黒玉が 4 個入っている．この中から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 つの玉の色が同じになる確率は $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}\boxed{7}}$ である．また同時に 3 個の玉を取り出したとき，その中に含まれる色の種類が 2 種類以下になる確率は $\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}}$ である．

(3) k を実数の定数とする．放物線 $y = x^2 - x + 6$ が直線 $y = x + k$ と異なる 2 点で交わるような k の値の範囲は $k > \boxed{10}$ であり，このとき，2 つの交点間の距離が 4 ならば $k = \boxed{11}$ である．

(4) x を実数とするとき，方程式 $16^{x+\frac{1}{2}} - 33 \times 2^{2x} + 2^3 = 0$ を解くと，

$x = \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$，$-\boxed{14}$ である．

2 (1) a を正の定数とする．2つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 2x + 5$ と $C_2 : y = -3x^2 + ax - 4$ は共有点をもち，その点で共通の接線をもつとする．このとき，$a = \boxed{15}\boxed{16}$ であり，共通の接線の方程式は $y = \boxed{17}x + \dfrac{\boxed{18}\boxed{19}}{\boxed{20}}$ となる．

(2) b を定数とする．2つの放物線 $C_3 : y = 2x^2$ と $C_4 : y = -x^2 + b$ が共有点をもち，その点においてそれぞれの接線が直交するとき，$b = \dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ であり，このとき，C_3，C_4 の囲む面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ となる．

3 (1) 方程式 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ は，中心の座標が $(\boxed{25}, \boxed{26})$，半径が $\boxed{27}$ の円を表す．

(2) k を定数とする．円 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ が直線 $y = kx$ から切り取る線分の長さが最大となるときの k の値は $k = \dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$ である．このとき，この2つの図形の交点は x 座標が小さい順に $\left(\dfrac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}}, \dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}}, \dfrac{\boxed{38}\boxed{39}}{\boxed{40}}\right)$ となる．

(3) (2) で求めた k の値に対して不等式 $y \geqq kx$，$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \leqq 0$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D 上を動くとき，$x + y$ の最大値は $\boxed{41} + \boxed{42}\sqrt{\boxed{43}}$ である．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$ から $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$$

ゆえに $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$

よって $\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}}$ $\cdots$①

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから ① より $\sin\theta>0$ $\cdots$②

①，② から $\cos\theta>0$ $\cdots$③

したがって

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2&=\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

① から $=1+2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

②，③ より，$\sin\theta+\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(2) 2 個の玉を取り出すとき，2 個の玉の色が同じであるのは

A：2 個とも赤，B：2 個とも白，C：2 個とも黒

の場合であり，事象 A，B，C は互いに排反である．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\\&=\frac{3}{36}+\frac{1}{36}+\frac{6}{36}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}\end{aligned}$$

3 個の玉を取り出すとき，3 個の玉の色が異なる事象を D とすると，
その確率は

$$P(D)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{3\times2\times4}{84}=\frac{2}{7}$$

よって，3 個の玉の色が 2 種類以下であるのは，D の余事象であるから，
求める確率は

$$P(\overline{D})=1-P(D)=1-\frac{2}{7}=\boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

(3) $y=x^2-x+6\cdots$①，$y=x+k\cdots$② から y を消去して整理すると

$$x^2-2x+6-k=0 \quad \cdots③$$

① と ② が異なる2点で交わるとき，③ について $D>0$ であるから

$$D/4=(-1)^2-1\cdot(6-k)>0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k>5}$$

このとき，③ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=6-k \quad \cdots④$$

② から2つの交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+k)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta+k)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+k)-(\alpha+k)\}^2\\&=2(\beta-\alpha)^2\\&=2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta\end{aligned}$$

上式に $\mathrm{AB}=4$ および ④ を代入すると

$$4^2=2\cdot2^2-8(6-k) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=7}$$

(4) $16^{x+\frac{1}{2}}=4\cdot(4^x)^2$，$2^{2x}=4^x$ であるから

$$4\cdot(4^x)^2-33\cdot4^x+8=0$$

$4^x=t\cdots$① とおくと　$t>0$

ゆえに　$4t^2-33t+8=0$

$(t-8)(4t-1)=0$

$t>0$ に注意して　$t=8,\ \dfrac{1}{4}$

① より　$4^x=8$　を解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

$4^x=\dfrac{1}{4}$　を解いて　$x=-1$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2},-1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x^2-2x+5\cdots$①，$y=-3x^2+ax-4\cdots$② から y を消去すると

$$4x^2-(a+2)x+9=0 \quad \cdots③$$

この方程式は，重解をもつので，$D=0$ より

$$\{-(a+2)\}^2-4\cdot4\cdot9=0$$

ゆえに　$(a+2)^2=12^2$

$$a+2=\pm12$$

$$a=-2\pm12$$

$a>0$ より　$\boldsymbol{a=10}$

$a=10$ を ③ に代入して

$$4x^2-12x+9=0 \quad これを解いて \quad x=\frac{3}{2}$$

① から，接点の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{17}{4}\right)$

① を微分して　$y'=2x-2$

この点における接線の傾きは　$y'=2\cdot\dfrac{3}{2}-2=1$

したがって，この点における接線の方程式は

$$y-\frac{17}{4}=1\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad よって \quad \boldsymbol{y=x+\frac{11}{4}}$$

(2) $C_3: y=2x^2\cdots$①，$C_4: y=-x^2+b\cdots$② の共有点の x 座標は

$$2x^2=-x^2+b \quad これを解いて \quad x=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$$

① を微分して　$y'=4x$,　　② を微分して　$y'=-2x$

①，② の共有点における接線の傾きは，それぞれ

$$\pm4\sqrt{\frac{b}{3}},\ \mp2\sqrt{\frac{b}{3}} \quad (複号同順)$$

であり，その接線が直交するので

$$\pm4\sqrt{\frac{b}{3}}\times\left(\mp2\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=-1$$

ゆえに　$-\dfrac{8b}{3}=-1$

よって　$\boldsymbol{b=\dfrac{3}{8}}$

したがって，共有点の x 座標は　$x=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

このとき，C_3，C_4 で囲む面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left\{\left(-x^2+\frac{3}{8}\right)-2x^2\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left(-3x^2+\frac{3}{8}\right)dx=2\int_{0}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\left(-3x^2+\frac{3}{8}\right)dx$$
$$=2\left[-x^3+\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$\boxed{3}$ (1) $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ を変形すると　$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

よって，**中心が (4，3)，半径 2 の円**である．

(2) 直線 $y=kx$ が円の中心 $(4,\ 3)$ を通るとき，円が直線から切り取る線分の長さが最大になるから

$$3=k\cdot4\quad これを解いて\quad \boldsymbol{k=\frac{3}{4}}$$

このとき，円と直線の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x & \cdots① \\ (x-4)^2+(y-3)^2=2^2 & \cdots② \end{cases}$$

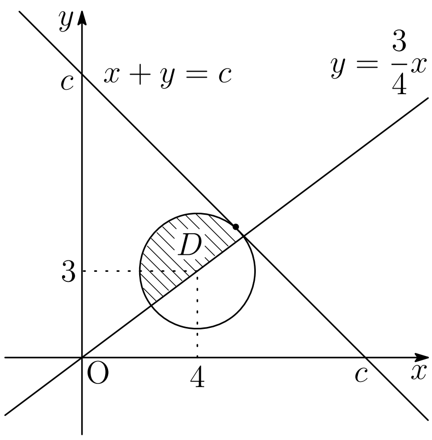
の解であるから，① を ② に代入して

$$(x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x-3\right)^2=2^2$$
$$(x-4)^2+\left\{\frac{3}{4}(x-4)\right\}^2=4$$
$$\frac{25}{16}(x-4)^2=4$$
$$(x-4)^2=\frac{64}{25}$$
$$x=4\pm\frac{8}{5}$$

よって　$x=\dfrac{28}{5},\ \dfrac{12}{5}$

これらを ① に代入することにより共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{28}{5},\ \frac{21}{5}\right),\ \left(\frac{12}{5},\ \frac{9}{5}\right)}$

(3) D の表す領域は，右図のとおりである．$\mathrm{P}(x,\ y)$ が D 上を動くとき，$x+y=c$ とおくと，これは傾きが -1，切片が c である直線を表す．
右図のように，この直線が円に接するとき c は最大となる．このとき，点 $(4,\ 3)$ から直線 $x+y-c=0$ までの距離が 2 であるから



$$\frac{|4+3-c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$$

ゆえに　　$c=7\pm2\sqrt{2}$

右図から　　$\boldsymbol{c=7+2\sqrt{2}}$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	1	4	6	2	5	1	8	5	7	5
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	7	3	2	1	1	0	1	1	1	4
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	3	8	2	8	4	3	2	3	4	1
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	2	5	9	5	2	8	5	2	1	5
問	41	42	43							
答	7	2	2							

1.4.10　一般入試B方式(産業工学部・農学部)70分

次の空欄を埋めなさい．問題文中の各空欄にはそれぞれ0〜9の数字の一つが入ります．各空欄の番号は解答番号を表します．解答は，解答用紙の解答番号に対応した解答欄にマークしなさい．
問い $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ を通して，解答は，分数の場合には既約分数の形で，また根号を含む場合には根号の中が最小の自然数になるように表しなさい．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) x，y を実数とするとき，$x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10$ を x についての2次式と考え，平方完成すると，$\{x+(\boxed{1}y+\boxed{2})\}^2+y^2-\boxed{3}y+\boxed{4}$ となるので，この式は $x=-\boxed{5}$，$y=\dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{8}\boxed{9}}{\boxed{10}}$ をとる．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{\boxed{11}\boxed{12}}{\boxed{13}\boxed{14}}$ であり，数列 $\{b_n\}$ が $b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(n=1,2,\cdots)$ であるとき，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\dfrac{n(n+\boxed{15})}{\boxed{16}\boxed{17}(n+\boxed{18})(n+\boxed{19})}$ である．ただし，$\boxed{18}<\boxed{19}$ とする．

(3) A，B2チームが1回試合をしたとき，それぞれが勝つ確率はともに $\dfrac{1}{4}$ であり，引き分ける確率は $\dfrac{1}{2}$ であるとする．この2チームが何回か試合をして先に2勝した方を優勝チームとするとき
3試合目でAが優勝チームとなる確率は $\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}\boxed{22}}$ であり，
4試合目でAが優勝チームとなる確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}\boxed{25}}$ である．

(4) $\triangle$ABC において3辺の長さが $\mathrm{AB}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=3+\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2\sqrt{3}$ とするとき，$\angle\mathrm{B}=\boxed{26}\boxed{27}^\circ$ であり，この三角形の面積は $\dfrac{\boxed{28}+\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{31}}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC の内部に $4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たす点 P がある．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{34}}{\boxed{35}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるから，AP を延長した直線と BC との交点を D とすると，AP : PD $=\boxed{36}:\boxed{37}$ である．

(2) $\triangle$ABC と $\triangle$APB の面積をそれぞれ $S_1:S_2$ とすると，$S_1:S_2=\boxed{38}:\boxed{39}$ である．

(3) $\triangle$ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とするとき EG と AB が平行になるのは $k=\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ のときで，このとき $\triangle$ABC の面積は $\triangle$AEG の面積の $\boxed{42}\boxed{43}$ 倍になる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=|x^2-4x|+2x$ のグラフを C とする．

(1) $y=|x^2-4x|+2x$ の絶対値をはずして整理すると，
$x\leqq\boxed{44}$ または $\boxed{45}\leqq x$ のとき $y=x^2-\boxed{46}x$
$\boxed{44}<x<\boxed{45}$ のとき $y=-x^2+\boxed{47}x$
となる．

(2) x の方程式 $|x^2-4x|+2x=k$ が 4 つの異なる実数解をもつような定数 k の値の範囲を $a<k<b$ とすると，$a=\boxed{48}$，$b=\boxed{49}$ である．

(3) (2) の a の値に対して直線 $y=a$ とグラフ C の囲む図形の面積は $\dfrac{\boxed{50}\boxed{51}}{\boxed{52}}$ となる．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) x について整理し，平方完成をすると

$$\begin{aligned}&x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10\\=&x^2+2(2y+1)x+5y^2-3y+10\\=&\{x+(2y+1)\}^2-(2y+1)^2+5y^2-3y+10\\=&\{x+(\mathbf{2}y+\mathbf{1})\}^2+y^2-\mathbf{7}y+\mathbf{9}\end{aligned}$$

さらに，y^2-7y+9 を平方完成すると

$$\begin{aligned}&x^2+5y^2+2x-3y+4xy+10\\=&(x+2y+1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\end{aligned}$$

上式は $x+2y+1=0$，$y-\dfrac{7}{2}=0$ のとき最小となる．

したがって，$\boldsymbol{x=-8}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{7}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{13}{4}}$ をとる．

(2) $a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n^2-1}&=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって　$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\mathbf{\frac{10}{21}}$$

$b_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{2}\times\frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{(n+2)(n+3)-6}{6(n+2)(n+3)}\\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

(3) 3試合目でAが優勝するのは，次の2つの場合に分けられる．

	1回	2回	3回
①	A	$\overline{A}$	A
②	$\overline{A}$	A	A

(A：Aが勝つ，$\overline{A}$：Bが勝つか引き分け)

① の確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{64}$

② の確率は $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{64}$

① と ② は互いに排反であるから，求める確率は $\dfrac{3}{64}+\dfrac{3}{64}=\boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

4 試合目で A が優勝するのは，次の 2 つの場合に分けられる．

［1］2 勝 1 敗 1 分で A が勝つ場合

	1 回	2 回	3 回	4 回
①	A	B	△	A
②	A	△	B	A
③	B	A	△	A
④	B	△	A	A
⑤	△	A	B	A
⑥	△	B	A	A

(△：引き分け)

①〜⑥ の確率は等しく，このときの確率は

$$3! \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64}$$

［2］2 勝 0 敗 2 分で A が勝つ場合

	1 回	2 回	3 回	4 回
①	A	△	△	A
②	△	A	△	A
③	△	△	A	A

(△：引き分け)

①〜③ の確率は等しく，このときの確率は

$${}_3\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{64}$$

よって，［1］，［2］から　$\dfrac{3}{64} + \dfrac{3}{64} = \boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

(4)　△ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} \\ &= \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} \\ &= \frac{6(3+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって　　$\angle\mathbf{B} = \mathbf{45^\circ}$

また，この三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ = \boldsymbol{\frac{9+3\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ から

ゆえに　$4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$

整理して　$9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$　$\cdots$①

上式から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{9}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$　$\cdots$②

AP を延長した直線と BC との交点が D であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　$\cdots$③

したがって　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\frac{5}{9}:\left(1-\frac{5}{9}\right)=\mathbf{5:4}$

(2) ② および (1) の結果から，D は線分 AB を 2 : 3 に内分する点であり，P は線分 AD を 5 : 4 に内分する点である．

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADB}=(2+3):2=5:2$

$\triangle\mathrm{ADB}:\triangle\mathrm{APD}=(5+4):5=9:5$

上の 2 式から　$\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ADB}}\times\frac{\triangle\mathrm{ADB}}{\triangle\mathrm{APD}}=\frac{5}{2}\times\frac{9}{5}$

したがって　$\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{APB}}=\frac{9}{2}$

よって　$S_1:S_2=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{APB}=\mathbf{9:2}$

(3) BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$

G は AM を 2 : 1 に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　$\cdots$④

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}-k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}k\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}k\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

上式から，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であるとき

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{9}k=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=\frac{3}{2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に $k = \dfrac{3}{2}$ および ③ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots ⑤$$

D は線分 AB を 2 : 3 に内分する点で，M は AB の中点であるから

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DM} = 1 : \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2+3}\right) = 1 : \frac{1}{10}$$

上式から，△ADM の面積は △ABC の $\dfrac{1}{10}$ である．さらに，④，⑤ から

$$\frac{\triangle\mathrm{AEG}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{18}$$

よって，△ABC の面積は △AEG の面積の **18** 倍である．

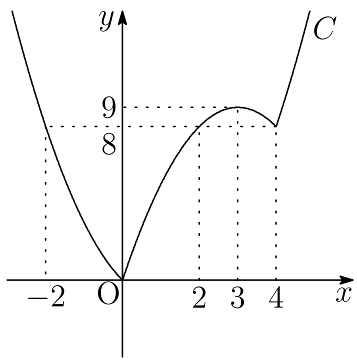
3 (1) $x \leqq 0,\ 4 \leqq x$ のとき　$x^2 - 4x \geqq 0$

$0 < x < 4$ のとき　$x^2 - 4x < 0$

よって　$\boldsymbol{x \leqq 0,\ 4 \leqq x}$　のとき　$y = (x^2 - 4x) + 2x = \boldsymbol{x^2 - 2x}$

$\boldsymbol{0 < x < 4}$　のとき　$y = -(x^2 - 4x) + 2x = \boldsymbol{-x^2 + 6x}$

(2) (1) の結果から $y = |x^2 - 4x| + 2x$ のグラフは，右の図のようになる．



したがって，$y = |x^2 - 4x| + 2x$ と $y = k$ が異なる 4 点で交わるとき，x の方程式 $|x^2 - 4x| + 2x = k$ が 4 つの異なる実数解をもつ．そのときの k の値の範囲は

$$\boldsymbol{8 < k < 9}$$

(3) (2) より，$y = 8$ と C と囲む図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{0} \{8 - (x^2 - 2x)\}dx + \int_{0}^{2} \{8 - (-x^2 + 6x)\}dx \\
&\qquad + \int_{2}^{4} \{(-x^2 + 6x) - 8\}dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_{0}^{2} - \int_{2}^{4} (x-2)(x-4)\,dx \\
&= \frac{28}{3} + \frac{20}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)(4-2)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{52}{3}}
\end{aligned}$$

答

問	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答	2	1	7	9	8	7	2	1	3	4
問	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答	1	0	2	1	5	1	2	2	3	3
問	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答	3	2	3	3	2	4	5	9	3	3
問	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
答	2	1	3	2	9	5	4	9	2	3
問	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
答	2	1	8	0	4	2	6	8	9	5
問	51	52								
答	2	3								

1.5 熊本学園大学

1.5.1 A日程1日目 70分

全　学　部 (全　学　科) (A日程)

平成20年2月9日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で9題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の各問に答えよ。

(1) 次の (i), (ii) のそれぞれについて，3 数を小さい順に並べよ。

(i) $2^{\frac{1}{2}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt[3]{8}$ (ii) $\log_3 8$ $\log_8 3$ $\log_2 8$

(2) $0° < \theta < 90°$ の範囲で $\sin\theta = \dfrac{3}{8}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

2. 次の各問に答えよ。

(1) $(1-i)^3 + (1+i)^2 + 5$ を簡単にせよ。

(2) 3 次方程式 $2x^3 - ax^2 + b - 2 = 0$ の 1 つの解が $1+i$ であるとき，実数 a と b をそれぞれ求めよ。

3. 次の方程式と不等式をそれぞれ解け。

(1) $\log_3 9 + \log_3 x > 1$

(2) $\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 2 = 1$

4. さいころ A は正四面体であり，外側の面には 1 から 4 の数字が書いてある。さいころ B は正十二面体であり，外側の面には 1 から 12 の数字が書いてある。A と B を机の上で同時にころがして机と接した面に書いてある数字を合計したとき，それが素数である確率を求めよ。

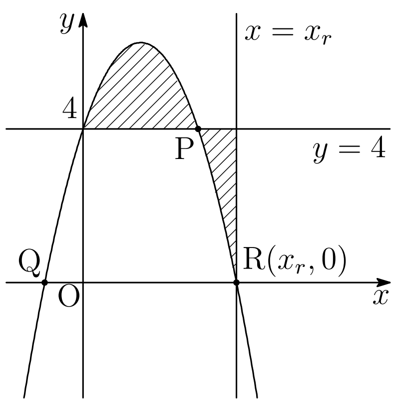
5. 曲線 $y = 2x^2 + 3x - 4$ と $y = 3x^2 - 4x + 1$ の頂点を結んだ線分の中点の座標を求めよ。

6. 3 直線 $y = 0$，$x = 0$，$y = ax + b$ が $0 \leqq x \leqq 3$，$-2 \leqq y \leqq 0$ の範囲で 3 つの交点をもつとする。これら 3 つの交点をすべて通る円のうち最大の半径をもつ円の方程式，およびそのときの a と b の値を求めよ。

7. 右図の放物線は $y = -x^2 + 3x + 4$ である。O は原点 (0, 0) である。以下の問に答えよ。

(1) 曲線 $y = -x^2 + 3x + 4$ と $y = 4$ との交点 P，および x 軸との交点 Q，R の座標を求めよ。

(2) 斜線部分の領域の面積を求めよ。



8. 2 直線 $2x - y + 3 = 0$，$x - 2y - 1 = 0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。二等分線は 2 つあるので，2 つの方程式を求めること。

9. 関数 $f(x) = \int_0^{3x} (t^2 + t - 6)\,dt$ の極大値と極小値およびそのときの x の値を求めよ。

解答例

1. (1)　(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^1$

指数の大小を調べると　$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} < 1$

底2が1より大きいので　$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{2}} < 2^1$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2^{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{8}}$

(ii) 底3が1より大きいから

$$\log_3 3 < \log_3 8 < \log_3 9 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < \log_3 8 < 2$$

$\log_8 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 8} = \dfrac{1}{\log_3 8}$ であるから　$\dfrac{1}{2} < \log_8 3 < 1$

また　$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

よって　$\boldsymbol{\log_8 3 < \log_3 8 < \log_2 8}$

(2) $0° < \theta < 90°$ より $\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{55}}{8}}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{8} \div \dfrac{\sqrt{55}}{8} = \boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{55}}}$

2. (1)　$(1-i)^3 + (1+i)^2 + 5$

$= (1 - 3i + 3i^2 - i^3) + (1 + 2i + i^2) + 5$

$= (1 - 3i - 3 + i) + (1 + 2i - 1) + 5$

$= \boldsymbol{3}$

(2) $1 + i$ が方程式 $2x^3 - ax^2 + b - 2 = 0$ の解であるから

$$2(1+i)^3 - a(1+i)^2 + b - 2 = 0$$

ゆえに　$2(-2+2i) - a{\cdot}2i + b - 2 = 0$

整理して　$(b-6) + (-2a+4)i = 0$

a, b は実数であるから　$b - 6 = 0$, $-2a + 4 = 0$

よって　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 6}$

3. (1) $\log_3 9 + \log_3 x > 1$

すなわち $\log_3 x > -1$

ゆえに $\log_3 x > \log_3 \dfrac{1}{3}$

底 3 が 1 より大きいから $\boldsymbol{x > \dfrac{1}{3}}$

(2)
$$\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 2 = 1$$
$$\log_3(x-1) - \log_3 2 = 1$$

ゆえに $\log_3 \dfrac{x-1}{2} = 1$

したがって $\dfrac{x-1}{2} = 3^1$ これを解いて $\boldsymbol{x = 7}$

4. 2 つのさいころ A，B の目の出方の総数は $4 \times 12 = 48$ (通り)

A と B の目の和が素数であるのは

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = &(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (1,10), (1,12),\\ &(2,1), (2,3), (2,5), (2,9), (2,11),\\ &(3,2), (3,4), (3,8), (3,10),\\ &(4,1), (4,3), (4,7), (4,9)\end{aligned}$$

の 19 通りである．

したがって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{19}{48}}$

5.
$$y = 2x^2 + 3x - 4 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{8}$$
$$y = 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

これらの放物線の頂点の座標は，それぞれ

$$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{41}{8}\right), \ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

であるから，この 2 つの頂点の中点の座標は

$$\left(\frac{-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{2}, \ \frac{-\frac{41}{8} + \left(-\frac{1}{3}\right)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(-\frac{1}{24}, \ -\frac{131}{48}\right)}$$

6. 3つの交点は，x 軸上の点 $(x,\ 0)$ $(0 \leqq x \leqq 3)$，y 軸上の点 $(0,\ y)$ $(-2 \leqq y \leqq 0)$ および原点であるから，これらの3点を通る円の直径は，$(x,\ 0)$，$(0,\ y)$ を結ぶ線分である．ゆえに，これら3点を通る円でその半径が最大であるのは，2点 $(3,\ 0)$，$(0, -2)$ を直径とする円である．したがって，2点 $(3,\ 0)$，$(0, -2)$ を通る直線は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{2}{3}x-2$$

よって　　$\boldsymbol{a=\frac{2}{3},\ b=-2}$

円の直径は　　$\sqrt{(0-3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{13}$

円の中心は　　$\left(\dfrac{3+0}{2},\ \dfrac{0+(-2)}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{3}{2},\ -1\right)$

したがって，この円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}$$

7. (1) 放物線 $y=-x^2+3x+4$ と直線 $y=4$ の交点Pの x 座標は

$-x^2+3x+4=4$

すなわち　$x^2-3x=0$

ゆえに　$x(x-3)=0$

図から $x>0$ であるから　$x=3$　よって　**P(3, 4)**

放物線 $y=-x^2+3x-4$ と x 軸との共有点の x 座標は

$-x^2+3x+4=0$

すなわち　$x^2-3x-4=0$

ゆえに　$(x+1)(x-4)=0$

よって　$x=-1,\ 4$

図から　　**Q(−1, 0)，R(4, 0)**

(2) よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(-x^2+3x+4)-4\}\,dx+\int_3^4 \{4-(-x^2+3x+4)\}\,dx \\ &= \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx+\int_3^4 (x^2-3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=\boldsymbol{\frac{19}{3}} \end{aligned}$$

8. 点 $(X,\ Y)$ から 2 直線 $2x-y+3=0$，$x-2y-1=0$ に下ろした垂線の長さが等しいので

$$\frac{|2X-Y+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|X-2Y-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

すなわち　$|2X-Y+3|=|X-2Y-1|$

ゆえに　$2X-Y+3=\pm(X-2Y-1)$

したがって　$X+Y+4=0,\quad 3X-3Y+2=0$

よって，点 $(X,\ Y)$ の満たす図形の方程式は，2 直線

$$\boldsymbol{x+y+4=0,\quad 3x-3y+2=0}$$

9.
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{3x}(t^2+t-6)\,dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-6t\right]_0^{3x} \\ &= 9x^3+\frac{9}{2}x^2-18x \end{aligned}$$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=27x^2+9x-18=9(x+1)(3x-2)$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，**$x=-1$ のとき極大値 $\dfrac{27}{2}$**，**$x=\dfrac{2}{3}$ のとき極小値 $-\dfrac{22}{3}$**

1.5.2 A日程2日目 70分

商学部第一部	(商学科)	(A日程)
経済学部	(国際経済学科)	
社会福祉学部第一部	(子ども家庭福祉学科)	

平成20年2月10日実施

(70分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

$$(3-2i)x+(-2+4i)y=-1+6i$$

2. 次の方程式を解け。

(1) $|\,96-2^{x+3}\,|=32$　　(2) $\begin{cases} 3x^2-11x-4=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\pi=1 \end{cases}$

3. 以下の問に答えよ。

(1) 命題「三角形の三つの内角の大きさを A，B，C としたとき，$\cos A\cos B\cos C<0$ ならば三角形は鈍角三角形である」の真偽を調べよ。

(2) 命題「$a \geqq 3$ ならば直線 $y=x-4$ は放物線 $y=x^2+ax-3$ と交わる」の逆の真偽を調べよ。

(3) 命題「実数 x，y について $(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 16$ ならば $x^2+y^2 \leqq 1$」の逆の真偽を調べよ。

4. 関数 $f(x)=x^2-5x+4$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ と x 軸の 2 つの交点の座標を求めよ。

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(m,\ m^2-5m+4)$ における接線の式を求めよ。

(3) (1) で求めた 2 つの交点における $y=f(x)$ の接線の式を求めよ。

5. 点 P，Q，R を中心とする 3 つの互いに外接する円の半径はそれぞれ 7cm，4cm，3cm である。∠RPQ を A，∠PQR を B，∠QRP を C とするとき，$\sin A:\sin B:\sin C$ を求めよ。

6. $f(x)=x^2$，$g(x)=3x^2-2x$ とする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは 3 点で交わる。交点を x 座標の小さいものから点 A，B，C とするとき，以下の問に答えよ。

(1) 点 A，B，C の座標を求めよ。

(2) 点 A と点 B を結ぶ線分および $y=g(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) $y=x^a$ のグラフが点 C を通るとき，$\log_{a^2} f(x)$ は，$\beta\log_3 x$ という形で表すことができる。β の値を求めよ。ただし，$x>0$ とする。

7. 各面に数字を一つずつ書いた立方体 (正六面体) がある。数字は 1，2，3，6 のいずれかで，どの数字も少なくとも一つの面に書かれている。この立方体をサイコロのように使ったときに，出る目の期待値が 3 である。1，2，3，6 のそれぞれの面の数を求めよ。

8. 3次関数 $f(x)$ は $x=2$ で極小値 -10 をとる。また $f'(-1)=0$，$f'(0)=-12$ である。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。また $-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

1. 整理すると　$(3x-2y)+(-2x+4y)i=-1+6i$

$3x-2y$，$-2x+4y$ は実数であるから

$$3x-2y=-1,\ \ -2x+4y=6$$

これを解いて　$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$

2. (1) $|\,96-2^{x+3}\,|=32$ から

$$96-2^{x+3}=\pm 32$$

ゆえに　$2^{x+3}=64,\ 128$

$$2^{x+3}=2^6,\ 2^7$$

したがって　$x+3=6,\ 7$

よって　$\boldsymbol{x=3,\ 4}$

(2) $\begin{cases} 3x^2-11x-4=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\pi=1 \end{cases}$

第1式から　$(x-4)(3x+1)=0$

$$x=4,\ \ -\frac{1}{3}$$

このうち，第2式を満たすものは　$\boldsymbol{x=4}$

3. (1) $\cos A\cos B\cos C<0$ のとき，A，B，C のひとつだけが鈍角で，残りの2つが鋭角である．ゆえに，$\triangle$ABC は鈍角三角形である．よって，命題は**真**である．

(2) $y = x - 4$ と $y = x^2 + ax - 3$ から y を消去すると

$$x - 4 = x^2 + ax - 3 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a-1)x + 1 = 0$$

直線と放物線が共有点をもつとき

$$(a-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 \geqq 0$$
$$(a+1)(a-3) \geqq 0$$

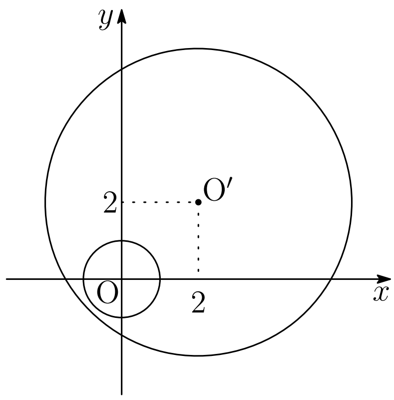
ゆえに　$a \leqq -1,\ 3 \leqq a$

本命題の逆

「直線 $y = x - 4$ は放物線 $y = x^2 + ax - 3$ と交わるならば $a \geqq 3$」

は**偽**である．

(3) $x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域は円



$$x^2 + y^2 = 1 \cdots ①$$

の内部である．
$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqq 16$ の表す領域は円

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16 \cdots ②$$

の内部である．
これらの円の中心を O，O′ とすると

$$\mathrm{OO'} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

①，② の円の半径は 1，4 であるから

$$\sqrt{8} + 1 < 4$$

ゆえに，円 ① は，円 ② の内部にある．
したがって，本命題の逆

「実数 x，y について $x^2 + y^2 \leqq 1$ ならば $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqq 16$」

は**真**である．

4. (1) x 軸との交点の x 座標は

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ 4$$

ゆえに，x 軸との交点の座標は　**(1，0)，(4，0)**

(2) $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 2x - 5$

点 $(m,\ m^2 - 5m + 4)$ における接線の傾きは　$2m - 5$

ゆえに，この点における接線の方程式は

$$y - (m^2 - 5m + 4) = (2m - 5)(x - m)$$

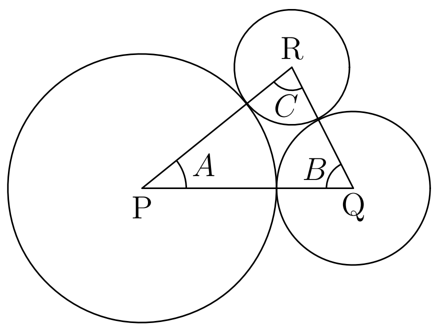
よって　$\boldsymbol{y = (2m - 5)x - m^2 + 4}$

(3) 2 点 $(1,\ 0)$，$(4,\ 0)$ における接線の方程式は，

$m = 1$，$m = 4$ をそれぞれ (2) の結果に代入して

$$\boldsymbol{y = -3x + 3,\ y = 3x - 12}$$

5. 右の図から



$$\mathrm{QR} = 4 + 3 = 7$$
$$\mathrm{RP} = 3 + 7 = 10$$
$$\mathrm{PQ} = 7 + 4 = 11$$

正弦定理により

$$\sin A : \sin B : \sin C = \mathrm{QR} : \mathrm{RP} : \mathrm{PQ}$$
$$= \boldsymbol{7 : 10 : 11}$$

6. (1) $y = x^3 \cdots$①，$y = 3x^2 - 2x \cdots$② とおく．

① と ② の共有点の x 座標は

$$x^3 = 3x^2 - 2x$$

ゆえに　$x(x-1)(x-2) = 0$

よって　$x = 0,\ 1,\ 2$

これらの値を ① に代入して　**A(0，0)，B(1，1)，C(2，8)**

(2) 2 点 A(0, 0)，B(1, 1) を通る直線の方程式は　$y = x$

$y = 3x^2 - 2x$ は下に凸の放物線であるから，線分 AB とこの放物線で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{x - (3x^2 - 2x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-3x^2 + 3x)\,dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(3) $y = x^\alpha$ のグラフが点 C(2, 8) を通るから

$$8 = 2^\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 3$$

したがって　$\log_{\alpha^2} f(x) = \log_{3^2} x^3 = \dfrac{\log_3 x^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}\log_3 x$

よって　$\boldsymbol{\beta = \frac{3}{2}}$

7. 1，2，3，6 の面の数が，それぞれ a，b，c，d であるとすると

面の数から　$a + b + c + d = 6$　$\cdots$①

期待値が 3 であるから　$\dfrac{a + 2b + 3c + 6d}{6} = 3$

すなわち　$a + 2b + 3c + 6d = 18$　$\cdots$②

② − ① より　$b + 2c + 5d = 12$　$\cdots$③

③ において，b，c，d は自然数であるから　$d = 1$

$d = 1$ を ③ に代入して　$b + 2c = 7$　$\cdots$④

① から　$b + c \leqq 4$　$\cdots$⑤

④，⑤ から　$b = 1$，$c = 3$

$b = 1$，$c = 3$，$d = 1$ を ① に代入して　$a = 1$

よって，1，2，3，6 の面の数はそれぞれ　**1，1，3，1**

8. $f(x)$ は 3 次関数であるから，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく

(1) $f(x)$ を微分すると　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \cdots ①$

$x = -1,\ 2$ で $f'(x) = 0$ であるから，解と係数の関係により

$$-1 + 2 = -\frac{2b}{3a},\ \ -1 \cdot 2 = \frac{c}{3a}$$

$$b = -\frac{3a}{2},\ \ c = -6a$$

これらを ① に代入して　$f'(x) = 3ax^2 - 3ax - 6a$

$f'(0) = -12$ であるから　$-6a = -12$　ゆえに　$a = 2$

よって　　$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$

(2) (1) の結果を積分して

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$f(2) = -10$ であるから

$$2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + C = -10 \quad \text{ゆえに} \quad C = 10$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10}$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-35	$\nearrow$	極大 17	$\searrow$	極小 -10	$\nearrow$	1

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ **で最大値 17，**$\boldsymbol{x = -3}$ **で最小値** $\boldsymbol{-35}$ をとる．

1.5.3 A 日程 3 日目 70 分

商 学 部 第 一 部 (ホスピタリティ・マネジメント学科) (A日程)
経 済 学 部 (経 済 学 科)
社会福祉学部第一部 (福 祉 環 境 学 科)

平成 20 年 2 月 11 日実施

(70 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 8 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 方程式 $|2x-1|+|x-2|=1-\dfrac{7}{2}x$ を解け。

2. $\dfrac{7x-16}{(x+2)(x^2-3x+5)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx+c}{x^2-3x+5}$ が x についての恒等式になるように a，b，c の値を定めよ。

3. 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ が2つの異なる解 $x=\alpha$ と $x=\beta$ をもつとき，以下の命題の真偽を述べよ。ただし，a，b は実数である。

(1) α と β が互いに共役な複素数であるならば，$b>0$ である。

(2) α と β が実数であれば，2次方程式 $x^2-2bx+a^2+b^2-4b=0$ も2つの実数解を持つ。

(3) 2次方程式 $x^2+cx-d=0$ の2つの解が $x=\alpha-a$ と $x=\beta-a$ であれば，$c=a$，$d=b$ である。

4. 直線 ℓ_m は点 $(2,\ 14)$ を通り，点 $(6,\ 12)$ で直線 ℓ_C と垂直に交わる。円 C は y 軸に接し，点 $(1,\ 7)$ を通り，その中心は直線 ℓ_C 上にある。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 直線 ℓ_C の方程式を求めよ。

(2) 円 C の中心の x 座標を a として，円 C の半径および中心の座標を a で表せ。

(3) a の値を求めよ。

5. $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ のとき，関数 $y=\dfrac{1}{\cos^2\theta}(1+\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta)$ について，以下の問に答えよ。

(1) $t=\tan\theta$ とおいて y を t の関数として表すとともに，t の値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値とそのときの θ の値，および y の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

6. 多くの玉を入れることができる袋に，最初，白と黒の玉が 1 個ずつ入っている。袋から 1 個玉を取り出すごとに，同じ色の玉をもう 1 個つけて袋に戻すものとする。このとき以下の問に答えよ。

(1) 2 回目に取り出す玉が白である確率を求めよ。

(2) 3 回目に玉を取り出すとき，玉が白である確率と黒である確率が等しくなる場合の確率を求めよ。

(3) 最初から n 回連続で白を取り出す確率を求めよ。

7. $f(x) = \log_a x$，$a > 1$ とする。$f(16) = 2$ であるとき，以下の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(8)$ の値を求めよ。

(3) x が 1 から a^k まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率を k を用いて表せ。ただし，$k > 0$ とする。

8. $f(x) = ax + b$ とする。$\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x^3 + x^2$ であるとき，a と b の値を求めよ。

解答例

1. ［1］$x < \dfrac{1}{2}$ のとき，$|\,2x-1\,| = -2x+1$，$|\,x-2\,| = -x+2$ であるから

方程式は　$(-2x+1)+(-x+2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = -4$

これは，$x < \dfrac{1}{2}$ を満たすから，解である.

［2］$\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$ のとき，$|\,2x-1\,| = 2x-1$，$|\,x-2\,| = -x+2$ であるから

方程式は　$(2x-1)+(-x+2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = 0$

これは，$\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$ に反するから，解ではない.

［3］$2 \leqq x$ のとき，$|\,2x-1\,| = 2x-1$，$|\,x-2\,| = x-2$ であるから

方程式は　$(2x-1)+(x-2) = 1 - \dfrac{7}{2}x$

これを解いて　$x = \dfrac{8}{13}$

これは，$2 \leqq x$ に反するから，解ではない.

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x = -4}$

2. 等式の両辺に $(x+2)(x^2-3x+5)$ を掛けると，次の等式が得られる．

$$7x-16=a(x^2-3x+5)+(x+2)(bx+c)$$

右辺を x について整理すると

$$7x-16=(a+b)x^2+(-3a+2b+c)x+(5a+2c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b,\ \ 7=-3a+2b+c,\ \ -16=5a+2c$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=-2,\ b=2,\ c=-3}$

3. (1) $x^2-ax+b=0$ が互いに共役な複素数をもつための条件は　$D<0$

ゆえに　　$(-a)^2-4{\cdot}1{\cdot}b<0$　すなわち　$b>\dfrac{a^2}{4}\geqq 0$

このとき，$b>0$ であるから，本命題は**真**である．

(2) α と β が実数であるとき，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の係数について

$(-a)^2-4{\cdot}1{\cdot}b\geqq 0$　すなわち　$a^2-4b\geqq 0$　$\cdots$①
2 次方程式 $x^2-2bx+a^2+b^2-4b=0$ の判別式 D は

$$D/4=(-b)^2-1{\cdot}(a^2+b^2-4b)=-(a^2-4b)$$

① より，$D\leqq 0$ となるから，本命題は**偽**である．

(3) 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=b\quad \cdots①$$

2 次方程式 $x^2+cx-d=0$ の解が $\alpha-a$，$\beta-a$ であるから，解と係数の関係により

$(\alpha-a)+(\beta-a)=-c,\quad (\alpha-a)(\beta-a)=-d$

ゆえに　　$(\alpha+\beta)-2a=-c,\quad \alpha\beta-a(\alpha+\beta)+a^2=-d$

① により　　$a-2a=-c,\quad b-a{\cdot}a+a^2=-d$

よって　　$c=a,\quad d=-b$

よって，本命題は**偽**である．

4. (1) 直線 ℓ_m は，2 点 $(2,\ 14)$，$(6,\ 12)$ を通るので，その傾きは

$$\frac{12-14}{6-2} = -\frac{1}{2}$$

ℓ_C は，ℓ_m に垂直なので，その傾きは 2 であり，点 $(6,\ 12)$ を通るので，ℓ_C の方程式は

$$y-12 = 2(x-6) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x}$$

(2) 円 C の中心は直線 ℓ_C 上にあるから，$(a,\ 2a)$ とおける．
また C は，y 軸に接し点 $(1,\ 7)$ を通るので，中心の x 座標 a は　$a > 0$
ゆえに，円の半径は　a
よって，**C は中心 $(a,\ 2a)$，半径 a の円である $(a > 0)$．**

(3) (2) から円 C の方程式は　$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = a^2 \quad (a > 0)$
これが点 $(1,\ 7)$ を通るから

$$(1-a)^2 + (7-2a)^2 = a^2$$

整理して　$2a^2 - 15a + 25 = 0$

ゆえに　$(a-5)(2a-5) = 0$

$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{a = 5,\ \dfrac{5}{2}}$

5. (1) $t = \tan\theta\ (0° \leqq \theta \leqq 45°)$ より　$0 \leqq t \leqq 1$

また　$$y = \frac{1}{\cos^2\theta}(1 + \sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta)$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \tan^2\theta - 4\tan\theta$$

ここで，$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ であるから

$$y = 2\tan^2\theta - 4\tan\theta + 1$$

よって　$\boldsymbol{y = 2t^2 - 4t + 1 \quad (0 \leqq t \leqq 1)}$

(2) (1) の結果から　$y = 2(t-1)^2 - 1$

よって　$t = 0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0°}$　**のとき　最大値 1**

$t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 45°}$ **のとき　最小値 -1**

6. (1)　［1］1回目白，2回目白である確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

［2］1回目黒，2回目白である確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

［1］，［2］は互いに排反であるから　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) 1回目と2回目に白と黒が1回ずつ出る確率であるから

［1］1回目黒，2回目白である確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

［2］1回目白，2回目黒である確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

［1］，［2］は互いに排反であるから　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3) 最初から n 回連続して白を取り出す確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

7. (1) $f(16)=2$ より

$$\log_a 16=2 \quad ゆえに \quad a^2=16$$

$a>1$ であるから　$\boldsymbol{a=4}$

(2) $f(8)=\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3) x が1から 4^k まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(4^k)-f(1)}{4^k-1}=\frac{\log_4 4^k-\log_4 1}{4^k-1}=\boldsymbol{\frac{k}{4^k-1}}$$

8. $f(t)=at+b$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= \int_0^x (x-t)(at+b)\,dt \\ &= x\int_0^x (at+b)\,dt - \int_0^x (at^2+bt)\,dt \\ &= x\left[\frac{at^2}{2}+bt\right]_0^x - \left[\frac{at^3}{3}+\frac{bt^2}{2}\right]_0^x \\ &= x\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right) - \left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right) \\ &= \frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x^3+x^2$ より，同じ次数の項の係数が等しいので

$$\frac{a}{6}=1,\ \frac{b}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=6,\ b=2}$$

1.5.4 A 日程 4 日目 70 分

経　済　学　部
(リーガルエコノミクス学科)
外　国　語　学　部 (東アジア学科)
社会福祉学部第一部 (社会福祉学科)
(A 日程)

平成 20 年 2 月 12 日実施

(70 分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 8 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. $a = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$b = \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，以下の式の値を求めよ。

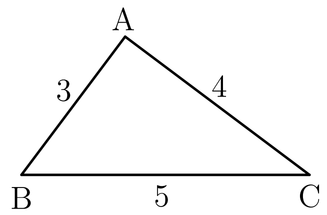
(1) $a+b$

(2) a^2-b^2

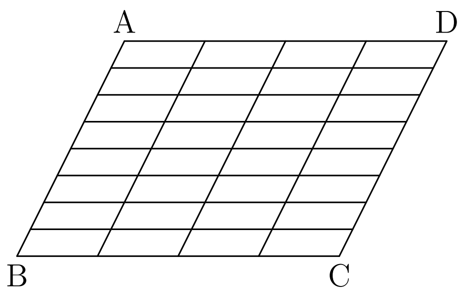
(3) $\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}$

(4) $a^2-\sqrt{7}a+1$

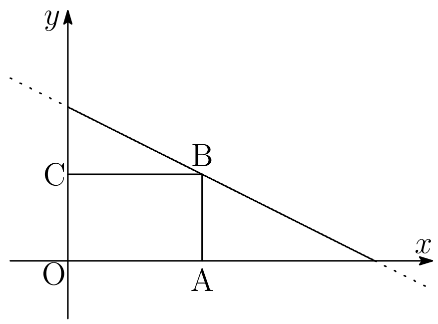
2. 右図のような△ABC を xy 平面上に置いて頂点 B を原点 $(0,\ 0)$ に，辺 BC を x 軸に重ねる。このとき，頂点 A の座標と，△ABC の重心 G の座標を求めよ。ただし，A の x 座標と y 座標はともに正であるとする。



3. 平行四辺形 ABCD の辺 AB と CD 上にそれらをそれぞれ 8 等分する点をとり，それらの点を AD と BC に平行な線分で結ぶ。また，辺 AD と BC 上にもそれらをそれぞれ 4 等分する点をとり，同様に AB と CD に平行な線分で結ぶ (右図)。この図形に平行四辺形は全部でいくつあるか。また，それらのうちで平行四辺形 ABCD と辺をまったく共有しない平行四辺形はいくつあるか。



4. 右図のように長方形 OABC の頂点 B が直線 $x+2y=10$ 上にある。長方形の頂点 A の座標を $(t,\ 0)$ とするとき，以下の問に答えよ。ただし，頂点 O は原点 $(0,\ 0)$ にあり，x，y は正であるとする。



(1) t の値の範囲を求めよ。

(2) 長方形の頂点 C の y 座標を t の式で表せ。

(3) 長方形 OABC の面積 S を t の式で表せ。

(4) 長方形 OABC の面積 S が最大となるときの t の値と，そのときの S の値を求めよ。

5. 方程式 $|\,1-\log_2 x^4\,|=1$ を解け。ただし，$x>0$ である。

6. 方程式 $9^x-3^{x+1}-4=0$ を解け。

7. △ABC において ∠ABC = 60°，AB + BC = 6，AB > BC で，その外接円の半径が 3 である。いま辺 BC 上に点 D をとる。このとき △ABD の面積と △ACD の面積の比が 1 : 2 であるという。以下の問に答えよ。

(1) 辺 AC の長さを求めよ。

(2) 辺 AB，BD の長さを求めよ。

(3) △ABD の面積を求めよ。

8. 2 次関数 $y=f(x)$ について $f(0)=3$，$f(-1)=12$ および $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\frac{5}{2}$ が成立する。このとき以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフにおける $x=1$ での接線の方程式を求めよ。

解答例

1. (1) $a+b=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

(2) $a-b=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})-2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\sqrt{3}$

したがって，上式および (1) の結果より

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\sqrt{7}\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{21}}$$

(3) $ab=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=1$

上式および (1) の結果から

$$\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{b^3+a^3}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{(ab)^2}=\frac{(\sqrt{7})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{7}}{1^2}=\boldsymbol{4\sqrt{7}}$$

(4) a，b を解とする 2 次方程式の 1 つは

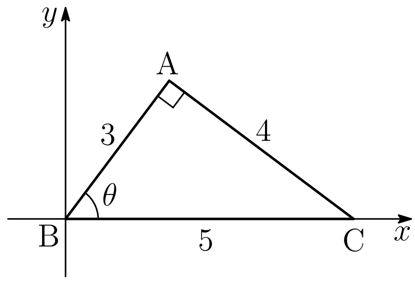
$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

ゆえに　$x^2-\sqrt{7}x+1=0$

a はこの方程式の解であるから　$\boldsymbol{a^2-\sqrt{7}a+1=0}$

2. $\angle\text{BAC} = 90^\circ$ であるから，$\angle\text{ABC} = \theta$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{3}{5},\quad \sin\theta = \frac{4}{5}$$



したがって，A の座標は

$$(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)}$$

よって，$\triangle\text{ABC}$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{\frac{9}{5}+0+5}{3},\ \frac{\frac{12}{5}+0+0}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\left(\frac{34}{15},\ \frac{4}{5}\right)}$$

3. 9 本の平行な直線から 2 本の組を選ぶ方法は，${}_9\text{C}_2$ 通りある．また，そのおのおの組に対して，5 本の平行な直線から 2 本の組を選ぶ方法は，${}_5\text{C}_2$ 通りある．

よって，平行四辺形の総数は　${}_9\text{C}_2 \times {}_5\text{C}_2 = \dfrac{9\cdot8}{2\cdot1} \times \dfrac{5\cdot4}{2\cdot1} = \mathbf{360}$ (個)

また，平行四辺形 ABCD と辺を共有しない平行四辺形の総数は，AD，BC を除いた 7 本の平行な直線から 2 本の組を選び，そのおのおのの組に対して，AB，CD を除いた 3 本の平行な直線から 2 本の組を選ぶ方法であるから

$${}_7\text{C}_2 \times {}_3\text{C}_2 = 21 \times 3 = \mathbf{63}\ \text{(個)}$$

4. (1) 直線 $x + 2y = 10$ の x 軸との共有点の座標は，$y = 0$ を代入して　$x = 0$

図から t は正であるから　$\boldsymbol{0 < t < 10}$

(2) C の y 座標は，B の y 座標と等しいので，$x + 2y = 10$ に $x = t$ を代入して

$t + 2y = 10$　よって　$\boldsymbol{y = 5 - \dfrac{t}{2}}$

(3) (1),(2) の結果から　$\boldsymbol{S = t\left(5 - \dfrac{t}{2}\right)}$　$\boldsymbol{(0 < t < 10)}$

(4) (3) の結果から　$S = -\dfrac{1}{2}(t-5)^2 + \dfrac{25}{5}$

よって　**$\boldsymbol{t = 5}$ のとき $\boldsymbol{S}$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{25}{2}}$**

5. $|1 - \log_2 x^4| = 1$ から　$1 - \log_2 x^4 = \pm 1$

ゆえに　$\log_2 x^4 = 0,\ 2$　すなわち　$x^4 = 1,\ 4$

$x > 0$ であるから　$\boldsymbol{x = 1,\ \sqrt{2}}$

6. $9^x=(3^x)^2$，$3^{x+1}=3\cdot 3^x$ であるから，$3^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　　$t^2-3t-4=0$

ゆえに　　$(t+1)(t-4)=0$

$t>0$ より　　$t=4$

したがって　$3^x=4$　よって　$\boldsymbol{x=\log_3 4}$

7. (1) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=2R$

ゆえに　$\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=2\cdot 3$

よって　$\mathrm{AC}=b=6\sin 60^\circ=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

(2) $c+a=6\cdots$① であるから，余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ により

$$(3\sqrt{3})^2=c^2+a^2-2ca\cos 60^\circ$$

したがって　　$27=c^2+a^2-ca$

ゆえに　　$27=(c+a)^2-3ca$

① より　　$27=6^2-3ca$

よって　　$ca=3\quad\cdots$②

①，② より c，a を解とする2次方程式は　$x^2-6x+3=0$

これを解いて　　$x=3\pm\sqrt{6}$

$c>a$ であるから　$c=3+\sqrt{6}$，$a=3-\sqrt{6}$

よって　　$\mathbf{AB}=\boldsymbol{3+\sqrt{6}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ACD}=1:2$ であるから　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=1:2$ より

$$\mathrm{BD}=\frac{1}{1+2}\mathrm{BC}=\frac{1}{3}a=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}$$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}ca\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ACD}=1:2$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{1+2}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

8. (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=5$ であるから　$f'(3)=5$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと　$f'(x)=2ax+b$

$f(0)=3$，$f(-1)=12$，$f'(3)=5$ より

$$c=3,\ a-b+c=12,\ 6a+b=5$$

これを解いて　$a=2,\ b=-7,\ c=3$

ゆえに　　$\boldsymbol{f(x)=2x^2-7x+3}$

(2) $f(x)=2x^2-7x+3$ を微分すると　$f'(x)=4x-7$

ゆえに　　$f(1)=-2$，$f'(1)=-3$

求める接線の方程式は，点 $(1,-2)$ を通り，傾き -3 の直線であるから

$$y-(-2)=-3(x-1)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{y=-3x+1}$$

1.5.5 A 日程 5 日目 70 分

$$\left.\begin{array}{l}\text{商 学 部 第 一 部 (経 営 学 科)}\\ \text{外 国 語 学 部 (英 米 学 科)}\end{array}\right\}\text{(A 日程)}$$

平成 20 年 2 月 13 日実施

(70 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 8 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 解答欄には解答のみ記入すること。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^3 - 5x^2 + x + 1$

(2) $3x^2 - x + 2y - z - 6xy + 3xz$

2. 以下の問いに答えよ。

(1) 次の式を簡単にせよ。

$$36^{\log_6 2}$$

(2) 次の方程式を解け。

$$\log_3 x = \log_9(x+2)$$

(3) 次の定積分を求めよ。ただし，π は π のままで計算すること。

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-1)^2\,dx$$

3. 次の式の値を求めよ。

$$\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{2\pi}{12}\tan\frac{3\pi}{12}\tan\frac{4\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}$$

4. $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$，$\mathrm{CA} = 6$，$\mathrm{AB} = 8$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ。

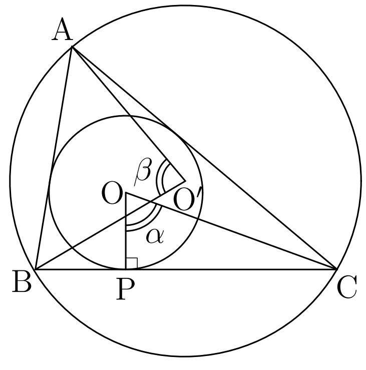
(2) 線分 AD の長さを求めよ。

5. 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動させると $y = 2x^2 - 1$ になる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) a，b，c が (1) で求めた値のとき，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と y 軸の交点における放物線の接線の方程式を求めよ。

6. 右図において，$\angle\mathrm{ACO}$ が 20° のとき，α と β の値を求めよ。ただし，O と O$'$ はそれぞれ $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円および外接円の中心であり，線分 OP は O から辺 BC に下ろした垂線である。



7. ある高校のクラスで夏休み中に海に行った者と山に行った者の人数を調べると，全35人中，海に行った者は20人，山に行った者は18人だった。また，海にも山にも行かなかった者は6人いた。以下の問いに答えよ。

(1) 海と山の両方に行った者は何人いるか。

(2) 海には行ったが，山には行かなかった者は何人いるか。

8. 1年生3人，2年生2人，3年生4人が円卓に座る座席をくじ引きで決める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2年生2人が隣り合う確率を求めよ。

(2) 各学年の生徒全員がまとまって座る確率を求めよ。

(3) 1年生が互いに隣り合わないように座る確率を求めよ。

解答例

1. (1) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$ とすると

$$P(1) = 3{\cdot}1^3 - 5{\cdot}1^2 + 1 + 1 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$3x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x-1)(3x^2 - 2x - 1)$$

したがって

$$3x^3 - 5x^2 + x + 1 = \boldsymbol{(x-1)^2(3x+1)}$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & 3x^2 & -2x & -1 & \\ \hline
x-1 & 3x^3 & -5x^2 & +x & +1 \\
 & 3x^3 & -3x^2 & & \\ \hline
 & & -2x^2 & +x & \\
 & & -2x^2 & +2x & \\ \hline
 & & & -x & +1 \\
 & & & -x & +1 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

(2) 最も次数の低い文字について整理する．

$$\begin{array}{ll}
 & 3x^2 - x + 2y - z - 6xy + 3xz \\
z\text{ で整理すると} & = 3x^2 - x + 2y - 6xy + z(3x-1) \\
y\text{ で整理すると} & = x(3x-1) - 2y(3x-1) + z(3x-1) \\
\text{ゆえに} & = \boldsymbol{(3x-1)(x-2y+z)}
\end{array}$$

2. (1) $36^{\log_6 2} = 6^{2\log_6 2} = 6^{\log_6 4} = \mathbf{4}$

> $a > 0,\ a \neq 1$ で，$M > 0$ であるとき，次が成り立つ．
>
> $a^m = M \iff m = \log_a M$　ゆえに　$a^{\log_a M} = M$

(2) $\log_3 x = \log_9(x+2)$

真数は正であるから

$x > 0$　かつ　$x+2>0$　すなわち　$x>0$

方程式を変形すると　$\log_3 x = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}$

ゆえに　$2\log_3 x = \log_3(x+2)$

$\log_3 x^2 = \log_3(x+2)$

したがって　$x^2 = x+2$

よって　$(x+1)(x-2)=0$

$x>0$ であるから　$\boldsymbol{x=2}$

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi}(x-1)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(x^2-2x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{-\pi}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^3+2\pi}$$

3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であるから

$$\tan\frac{4\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\frac{2\pi}{12}}$$

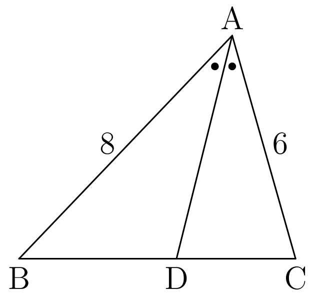
$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}$$

したがって　$\tan\dfrac{\pi}{12}\tan\dfrac{2\pi}{12}\tan\dfrac{3\pi}{12}\tan\dfrac{4\pi}{12}\tan\dfrac{5\pi}{12}$

$$= \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{2\pi}{12}\tan\frac{3\pi}{12}\times\frac{1}{\tan\frac{2\pi}{12}}\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} = \tan\frac{\pi}{4} = \mathbf{1}$$

4. (1) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{12\sqrt{3}}$

(2) $\mathrm{AD} = x$ とすると



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot\frac{1}{2} = 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADC} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot x\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}x\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ADC} = \triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$2x + \frac{3}{2}x = 12\sqrt{3} \quad これを解いて \quad x = \boldsymbol{\frac{24\sqrt{3}}{7}}$$

5. (1) $y = ax^2 + bx + c$ は $y = 2x^2 - 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである．$y = 2x^2 - 1$ はこの平行移動により

$$y + 2 = 2(x-2)^2 - 1 \quad すなわち \quad y = 2x^2 - 8x + 5$$

よって　$\boldsymbol{a = 2,\ b = -8,\ c = 5}$

(2) $y = 2x^2 - 8x + 5$ を微分すると　$y' = 4x - 8$

$x = 0$ のとき　$y' = -8$

求める接線は，点 $(0,\ 5)$ を通る傾き -8 の直線であるから

$$\boldsymbol{y = -8x + 5}$$

6. O は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心であるから　$\angle\mathrm{BCO} = \angle\mathrm{ACO} = 20^\circ$

$\triangle\mathrm{COP}$ は直角三角形であるから

$$\alpha = 90^\circ - \angle\mathrm{ACO} = 90^\circ - 20^\circ = \mathbf{70^\circ}$$

$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ACO} + \angle\mathrm{BCO} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

O' は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心であるから

$$\beta = 2 \times \angle\mathrm{ACB} = 2 \times 40^\circ = \mathbf{80^\circ}$$

7. クラス全体の集合を U とし，その中で海に行った者の集合を A，山に行った者の集合を B とする．

(1) 条件から　$n(U)=35$，$n(A)=20$，$n(B)=18$，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=6$

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B) \end{aligned}$$

したがって　$6=35-n(A\cup B)$　ゆえに　$n(A\cup B)=29$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ により

$$29=20+18-n(A\cap B) \quad \text{したがって} \quad n(A\cap B)=\mathbf{9}\ (\text{人})$$

(2) 海には行ったが，山には行かなかった人数は

$$n(A)-n(A\cap B)=20-9=\mathbf{11}\ (\text{人})$$

8. 1 年生 3 人，2 年生 2 人，3 年生 4 人の計 9 人の円順列の総数は

$$(9-1)!\ (\text{通り})$$

(1) 2 年生 2 人をひとまとめにする．

1 年生 3 人，2 年生ひとまとめ，3 年生 4 人の円順列の総数は

$$(8-1)!\ (\text{通り})$$

また，ひとまとめにした 2 年生 2 人の並び方は，2! 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{(8-1)!\times 2!}{(9-1)!}=\dfrac{7!\times 2}{8!}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2) 各学年の生徒をひとまとめにする．

各学年の生徒をひとまとめにした円順列の総数は　$(3-1)!$ (通り)

ひとまとめにした 1 年生 3 人の並び方は　$3!$ (通り)

ひとまとめにした 2 年生 2 人の並び方は　$2!$ (通り)

ひとまとめにした 3 年生 4 人の並び方は　$4!$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{(3-1)!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 4!}{(9-1)!}=\mathbf{\dfrac{1}{70}}$

(3) 2 年生 2 人，3 年生 4 人の円順列の総数は　$(6-1)!$ (通り)

2，3 年生 6 人の生徒間の 6ヶ所に 1 年生 3 人を並べる方法は　${}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{(6-1)!\times {}_6\mathrm{P}_3}{(9-1)!}=\mathbf{\dfrac{5}{14}}$

1.6　熊本保健科学大学

1.6.1　一般推薦

$\boxed{3}$ 次の各問いの空欄に当てはまるものを下の①〜④の中から一つ選び，ア，イ，ウ，$\cdots$ で示された解答欄に記入しなさい。

問1 $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$，$y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ のとき，$\dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \boxed{\text{ア}}$ である。

① 2　② 4
③ 8　④ 16

問2 連立不等式 $\begin{cases} 2x + 3 > 6 \\ 4x + 3 < x + 9 \end{cases}$ を解くと $\boxed{\text{イ}}$ である。

① $x < \dfrac{3}{2}$，$x > 2$　② $\dfrac{3}{2} < x < 2$
③ $x < 0$，$x > 3$　④ $0 < x < 3$

問3 2次方程式 $6x^2 - 7x - 3 = 0$ を解くと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

① $x = -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}$　② $x = -\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{3}{2}$
③ $x = \dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}$　④ $x = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{3}{2}$

問4 放物線 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動した2次関数のグラフの方程式は $\boxed{\text{エ}}$ である。

① $y = (x - 2)^2 - 3$　② $y = (x - 2)^2 + 3$
③ $y = (x + 2)^2 - 3$　④ $y = (x + 2)^2 + 3$

問5 2次関数 $y = 2x^2 - 5x + 2$ のグラフと x 軸との共有点の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

① 0　② 1
③ 2　④ 3

問6　2次不等式 $2x^2 - 5x - 3 \leqq 0$ の解は $\boxed{\text{カ}}$ である。

①　$x \leqq -3,\ x \geqq \dfrac{1}{2}$　　②　$-3 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$

③　$x \leqq -\dfrac{1}{2},\ x \geqq 3$　　④　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$

問7　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\cos\theta = \boxed{\text{キ}}$ である。

①　$\dfrac{1}{4}$　　②　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

③　$\dfrac{3}{4}$　　④　$\dfrac{\sqrt{23}}{4}$

問8　$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{AC} = 8$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ である三角形ABCの面積は $\boxed{\text{ク}}$ である。

①　10　　②　$10\sqrt{2}$

③　$10\sqrt{3}$　　④　20

問9　1，2，3，4，5の5つの数の中から3個を選んで3桁の整数を作るとき，できる奇数は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。ただし，同じ数字を重複して使ってもよいものとする。

①　15　　②　27

③　60　　④　75

問10　3個のさいころを1回投げて出る目の数の和が10以下になる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

①　$\dfrac{3}{54}$　　②　$\dfrac{73}{216}$

③　$\dfrac{1}{2}$　　④　$\dfrac{139}{216}$

4 次の各問いの空欄に当てはまるものを答えなさい。なお，問題文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，数字 (0〜9)，または符号 (−) が入り，ア，イ，ウ，$\cdots$ の一つ一つには，これらのいずれか一つが対応する。それらを，ア，イ，ウ，$\cdots$ で示された解答欄に記入しなさい。また，分数形で解答が求められる場合には，既約分数で答えなさい。

例：$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $\dfrac{23}{7}$ と答えたいときは，アに「2」，イに「3」，ウに「7」を記入する。

例：$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として，エに「−」，オに「4」，カに「5」を記入する。符号は分子につけ，分母につけてはならない。

問1 次の各問に答えよ。

(1) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ のとき，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2) $\mathrm{BC} = 8$，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ である三角形 ABC の外接円の半径は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) $\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = \sqrt{21}$，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2}{3}$ である三角形 ABC において，$\mathrm{AC} = \boxed{\text{ク}}$ である。

問2 男子4人，女子3人，合わせて7人の生徒がいる。

(1) 7人の生徒が横1列に並ぶとき，両端が女子である並び方は全部で $\boxed{\text{ケコセ}}$ 通りある。

(2) 7人の生徒が横1列に並ぶとき，男子と女子が交互に並ぶ並び方は全部で $\boxed{\text{シスセ}}$ 通りある。

(3) 7人の生徒が円形のテーブルのまわりに座るとき，女子3人が全員隣り合って座る座り方は全部で $\boxed{\text{ソタチ}}$ 通りある。

解答例

$\boxed{\mathbf{3}}$ 問 1　$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$

$$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=2$$

したがって　$\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{(2\sqrt{5})^2-2\cdot2}{2}=\mathbf{8}$

(答) ③

問 2　$2x+3>6$ より　$x>\dfrac{3}{2}$　$\cdots$①

$4x+3<x+9$ より　$x<2$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}<x<2}$

(答) ②

問 3　左辺を因数分解すると　$(3x+1)(2x-3)=0$

よって　$3x+1=0$　または　$2x-3=0$

したがって，解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{2}}$

(答) ②

【別解】 解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot6\cdot(-3)}}{2\cdot6} \\ &= \frac{7\pm\sqrt{121}}{12}=\frac{7\pm11}{12} \\ &= \frac{18}{12},\ \frac{-4}{12}=\boldsymbol{\frac{3}{2},-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

問 4　(答) ②

【解説】 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの方程式は $y=a(x-p)^2+q$ である．

問5　2次関数 $y = 2x^2 - 5x + 2$ の係数について

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$$

よって，x 軸との共有点の個数は **2個**

(答) ③

問6　左辺を因数分解すると　$(x-3)(2x+1) \leqq 0$

したがって　$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

(答) ④

問7　$0° < \theta < 90°$ のとき　$\cos\theta > 0$

ゆえに　$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(答) ③

問8　$c = 5$，$b = 8$，$A = 60°$ であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

(答) ③

問9　百の位と十の位の選び方は，1，2，3，4，5 の5通りで，
一の位の選び方は1，3，5の3通りであるから

$$5 \times 5 \times 3 = \mathbf{75} \ \text{(通り)}$$

(答) ④

問10　3個のさいころの出る目の総数は　$6^3 = 216$

3個のさいころの目を x，y，z とすると，$x + y + z \leqq 10$　$\cdots$ ①

[1]　$x + y = 2$ のとき

$(x, y) = (1, 1)$ の1通り

これに対して，① より $z \leqq 8$ であるから

$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$　の6通り

このとき　$1 \times 6 = 6$ (通り)

[2]　$x + y = 3$ のとき

$(x, y) = (1, 2),\ (2, 1)$　の2通り

これに対して，① より $z \leqq 7$ であるから

$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$　の6通り

このとき　$2 \times 6 = 12$ (通り)

［3］ $x+y=4$ のとき

$$(x, y)=(1,3),\ (2,2),\ (3,1) \quad \text{の 3 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 6$ であるから

$$z=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \quad \text{の 6 通り}$$

このとき　$3 \times 6=18$ (通り)

［4］ $x+y=5$ のとき

$$(x, y)=(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1) \quad \text{の 4 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 5$ であるから

$$z=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad \text{の 5 通り}$$

このとき　$4 \times 5=20$ (通り)

［5］ $x+y=6$ のとき

$$(x, y)=(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1) \quad \text{の 5 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 4$ であるから

$$z=1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad \text{の 4 通り}$$

このとき　$5 \times 4=20$ (通り)

［6］ $x+y=7$ のとき

$$(x, y)=(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1) \quad \text{の 6 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 3$ であるから

$$z=1,\ 2,\ 3 \quad \text{の 3 通り}$$

このとき　$6 \times 3=18$ (通り)

［7］ $x+y=8$ のとき

$$(x, y)=(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2) \quad \text{の 5 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 2$ であるから

$$z=1,\ 2 \quad \text{の 2 通り}$$

このとき　$5 \times 2=10$ (通り)

［8］ $x+y=9$ のとき

$$(x, y)=(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3) \quad \text{の 4 通り}$$

これに対して，① より $z \leqq 1$ であるから

$$z=1 \quad \text{の 1 通り}$$

このとき　$4 \times 1=4$ (通り)

［1］〜［8］により

$$\frac{6+12+18+20+20+18+10+4}{216}=\frac{108}{216}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(答) ③

$\boxed{\mathbf{4}}$ 問1 (1) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき　$\sin\theta > 0$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2} = \dfrac{2}{5}$

よって　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{5} \div \dfrac{\sqrt{21}}{5} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{21}}{21}}$

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{8}{\sin 45^\circ} = 2R$

よって　$R = \dfrac{8}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(3) $c=3$，$a=\sqrt{21}$，$\cos A = \dfrac{2}{3}$ を余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ に適用すると

$$(\sqrt{21})^2 = b^2 + 3^2 - 2 \cdot b \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}$$

整理して　$b^2 - 4b - 12 = 0$

ゆえに　$(b+2)(b-6) = 0$

$b > 0$ より　$b = \mathbf{6}$

(答) ア．2　イ．2　ウ．1　エ．2　オ．1　カ．4　キ．2　ク．6

問2 (1) 両端の女子の並び方は，${}_3\mathrm{P}_2$ 通りある．

間に並ぶ残り5人の並び方は，$5!$ 通りある．

よって，積の法則により　${}_3\mathrm{P}_2 \times 5! = 6 \times 120 = \mathbf{720}$ (通り)

(2) 「男女男女男女男」の並びである．

男子4人の並び方は，$4!$ 通りあり，

女子3人の並び方は，$3!$ 通りある．

よって，積の法則により　$4! \times 3! = 24 \times 6 = \mathbf{144}$ (通り)

(3) 女子3人のひとまとめと男子4人の5つの円順列は，$(5-1)!$ 通りある．

女子3人の座り方は，$3!$ 通りある．

よって，積の法則により　$(5-1)! \times 3! = 24 \times 6 = \mathbf{144}$ (通り)

(答) ケ．7　コ．2　サ．0　シ．1　ス．4　セ．4　ソ．1　タ．4　チ．4

1.6.2　一般前期 (衛生技術学科・理学療法学専攻)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $x-y=2$, $xy=1$ のとき，$x^3-y^3=\boxed{アイ}$ である。

問 2 放物線 $y=x^2-kx+k+1$ が x 軸から切り取る線分の長さが 1 のとき，$k=\boxed{ウエ}$, $\boxed{オ}$ である。

問 3 放物線 $y=x^2-2ax+b$ は点 $(3,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。このとき，$a=\boxed{カ}$, $b=\boxed{キ}$ である。

問 4 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。関数 $y=\sin^2 x+\cos x+1$ は，$x=\boxed{クケ}^\circ$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ をとる。

問 5 三角形 ABC において，AB $=5$, BC $=7$, CA $=6$ のとき，$\cos A=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}$ である。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $P(x)=x^{99}+ax+1$ (a は定数) とする。$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 5 のとき，$a=\boxed{ア}$ である。このとき，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは，$\boxed{イウ}$ である。

問 2 $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ とする。方程式 $\cos 2x-3\cos x-1=0$ を解くと，$x=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi$ である。

問 3 不等式 $(\log_3 x)^2-4\log_9 3x-6<0$ を解くと，$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}<x<\boxed{クケ}$ である。

問 4 曲線 $y=x^3-3x^2-3x+1$ の接線が直線 $y=6x+1$ と平行になるとき，接点の x 座標は，$x=\boxed{コサ}$, $\boxed{シ}$ である。

問 5 2 つの放物線 $y=x^2-5x+4$, $y=-x^2+3x-2$ で囲まれた部分の面積は，$\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である。

$\boxed{3}$ a を $0 \leqq a \leqq 1$ を満たす定数とし，2次関数 $f(x) = x^2 - (4a-2)x - 8a + 4$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値を M，最小値を m とする。

問1 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は，$(\boxed{\text{ア}}a - \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウエ}}a^2 - \boxed{\text{オ}}a + \boxed{\text{カ}})$ であり，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は，$\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケ}}$ である。

問2 M，m をそれぞれ a の式で表しなさい。また，それぞれのとりうる値の範囲を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問3 $-1 \leqq x \leqq 3$ において，最小値が0以上，かつ，最大値が15以下となるとき，a のとりうる値の範囲を求めなさい。
(解答の過程をすべて記入すること)

$\boxed{4}$ 円 $C : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ と直線 $l : 2x - y + k = 0$ について，次の問いに答えなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問1 円 C の中心の座標と半径 r を求めなさい。

問2 円 C と直線 l が接するときの k の値と，そのときの接点の座標を求めなさい。

問3 円 C と直線 l が異なる2点P，Qで交わり，$\mathrm{PQ} = 2$ のとき，k の値を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=(x-y)\{(x-y)^2+3xy\}$$

$$=2(2^2+3\cdot 1)=\mathbf{14}$$

問 2 放物線 $y = x^2-kx+k+1$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2-kx+k+1=0$ の解であり，これらの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=k,\ \ \alpha\beta=k+1$$

このとき，$|\beta-\alpha|=1$ であるから　$(\beta-\alpha)^2=1$

ゆえに　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

したがって　$k^2-4(k+1)=1$

整理して　$k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0$

よって　$\boldsymbol{k=-1,\ 5}$

問 3 直線 $y=2x-1$ 上に頂点があるので，その座標を $(p,\ 2p+1)$ とし，また，放物線の方程式の x^2 の係数が 1 であるから，その方程式を

$$y=(x-p)^2+2p-1$$

とおける．これが点 $(3,\ 4)$ を通るので

$4=(3-p)^2+2p-1$

整理して　$p^2-4p+4=0$

ゆえに　$(p-2)^2=0$

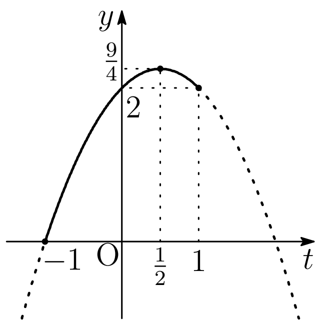
これを解いて　$p=2$

したがって　$y=(x-2)^2+2\cdot 2-1$　すなわち　$y=x^2-4x+7$

係数を比較して　$-2a=-4,\ b=7$　よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=7}$

問 4 $\sin^2 x+\cos x+1=(1-\cos^2 x)+\cos x+1$

$$=-\cos^2 x+\cos x+2$$



$\cos x=t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき $-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$y=-t^2+t+2$$

すなわち　$y=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって　$t=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x=60^\circ}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ をとる．

問５ $a=7,\ b=6,\ c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{12}{2\cdot6\cdot5}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

(答) ア．1　イ．4　ウ．−　エ．1　オ．5　カ．2　キ．7　ク．6　ケ．0
コ．9　サ．4　シ．1　ス．5　セ．6　ソ．6

$\boxed{2}$ **問１** $P(x)$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ であるから，$P(1)=5$ より

$$1^{99}+a\cdot1+1=5\quad これを解いて\quad \boldsymbol{a=3}$$

$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$$P(-1)=(-1)^{99}+3\cdot(-1)+1=\boldsymbol{-3}$$

問２ 左辺を変形すると　$(2\cos^2x-1)-3\cos x-1=0$
整理して　$2\cos^2x-3\cos x-2=0$
ゆえに　$(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$
$\cos x-2\neq0$ であるから　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$
$\pi\leqq x\leqq2\pi$ より　　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3}\pi}$

問３ $(\log_3x)^2-4\log_9 3x-6<0$ の左辺を変形すると

$$(\log_3x)^2-4\cdot\frac{\log_3 3x}{\log_3 9}-6<0$$

ゆえに　$(\log_3x)^2-4\cdot\dfrac{\log_3 3+\log_3 x}{2}-6<0$

整理して　$(\log_3x)^2-2\log_3x-8<0$

$$(\log_3x+2)(\log_3x-4)<0$$
$$-2<\log_3x<4$$
$$\log_3 3^{-2}<\log_3x<\log_3 3^4$$

底３は１より大きいから　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{9}<x<81}$

問 4 $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 6x - 3$

接線の傾きが 6 であるときの x 座標であるから

$$3x^2 - 6x - 3 = 6$$

整理して　$x^2 - 2x - 3 = 0$

ゆえに　$(x+1)(x-3) = 0$

よって　$\boldsymbol{x = -1,\ 3}$

問 5 方程式 $x^2 - 5x + 4 = -x^2 + 3x - 2$ を解くと　$x = 1,\ 3$

放物線 $y = x^2 - 5x + 4$ は下に凸，放物線 $y = -x^2 + 3x - 2$ は上に凸であるから，この 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(-x^2 + 3x - 2) - (x^2 - 5x + 4)\}dx \\ &= -2\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

(答) ア．3　イ．−　ウ．3　エ．4　オ．3　カ．1　キ．9　ク．8　ケ．1
コ．−　サ．1　シ．3　ス．8　セ．3

$\boxed{\mathbf{3}}$ **問 1**

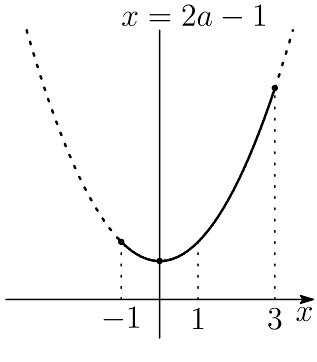
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (4a-2)x - 8a + 4 \\ &= x^2 - 2(2a-1)x - 8a + 4 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 - (2a-1)^2 - 8a + 4 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 - 4a^2 - 4a + 3 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(2a-1, -4a^2 - 4a + 3)}$

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$-1 \leqq 2a - 1 \leqq 1$

ゆえに，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1}$

問 2 問 1 の結果から，定義域 $-1 \leqq x \leqq 3$ の中央値 1 は軸 $x = 2a - 1$ より右側にあるので，$x = 3$(定義域の右端) で最大値をとる．$x = 2a - 1$ は定義域内の値であるから，$x = 2a - 1$ で最小値をとる．ゆえに



$$M = f(3) = \boldsymbol{-20a + 19}$$
$$m = f(2a-1) = \boldsymbol{-4a^2 - 4a + 3}$$

$M = -20a + 19$，$m = -4\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ であるから，$0 \leqq a \leqq 1$ により

$$\boldsymbol{-1 \leqq M \leqq 19,\ \ -5 \leqq m \leqq 3}$$

問3　$m \geqq 0$ より　　$-4a^2-4a+3 \geqq 0$

したがって　　$4a^2+4a-3 \leqq 0$

ゆえに　　$(2a+3)(2a-1) \leqq 0$

よって　　$-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

$M \leqq 15$ より　　$-20a+19 \leqq 15$

ゆえに　　$-20a \leqq -4$

よって　　$a \geqq \dfrac{1}{5}$　$\cdots$②

①，② および $0 \leqq a \leqq 1$ の共通部分を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{5} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．$-$　エ．4　オ．4　カ．3　キ．$-$　ク．1　ケ．1

$\boxed{4}$ **問1**　方程式 $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ を変形すると

$$(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)=-5+1+9$$

すなわち　　$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

よって，中心が点 **(1，3)** で，半径 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ の円である．

問2　$x^2+y^2-2x-6y+5=0 \cdots$①，$y=2x+k \cdots$② とおいて，
2式から y を消去して整理すると

$$5x^2+2(2k-7)x+k^2-6k+5=0 \quad \cdots③$$

判別式は　$D/4=(2k-7)^2-5(k^2-6k+5)=-(k+4)(k-6)$

円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$(k+4)(k-6)=0$ を解いて　　$k=-4,\ 6$

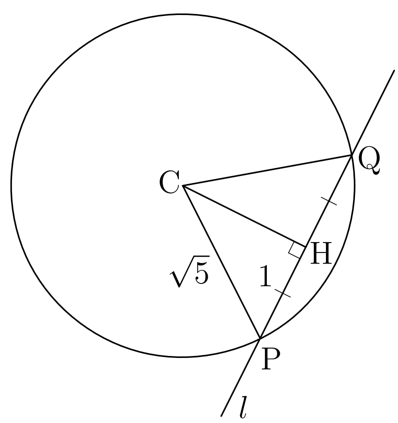
このとき，③ の重解は　　$x=-\dfrac{2(2k-7)}{2\cdot 5}=-\dfrac{2k-7}{5}$　$\cdots$④

④，② により，$\boldsymbol{k=-4}$ **のとき，接点 (3，2)**

　　　　　　$\boldsymbol{k=6}$ **のとき，接点 $(-1,\ 4)$**

問3　円の中心 C(1, 3) から直線 l に垂線 CH を
引くと，PQ $=2$ より PH $=1$ であるから

$$\mathrm{CH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$



このとき，点 C と直線 $l : 2x-y+k=0$
の距離が 2 であるから

$$\frac{|2\cdot 1-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

ゆえに　　$|k-1|=2\sqrt{5}$

よって　　$\boldsymbol{k=1\pm 2\sqrt{5}}$

1.6.3　一般前期 (看護学科・作業療法学専攻)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $x-y=2$，$xy=1$ のとき，$x^3-y^3=\boxed{\text{アイ}}$ である。

問 2 放物線 $y=x^2-kx+k+1$ が x 軸から切り取る線分の長さが 1 のとき，$k=\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ である。

問 3 放物線 $y=x^2-2ax+b$ は点 $(3,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。このとき，$a=\boxed{\text{カ}}$，$b=\boxed{\text{キ}}$ である。

問 4 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。関数 $y=\sin^2 x+\cos x+1$ は，$x=\boxed{\text{クケ}}^\circ$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

問 5 三角形 ABC において，AB $=5$，BC $=7$，CA $=6$ のとき，$\cos A=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 a，b は有理数とする。

$\dfrac{a}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=1+4\sqrt{3}$ のとき，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$ である。

問 2 $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{3}{6}$，$\dfrac{4}{6}$，$\dfrac{5}{6}$，$\cdots$，$\dfrac{100}{6}$ のうち，既約分数の個数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 個である。

問 3 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 のうち，異なる数字 3 個を使って 3 桁の整数をつくるとき，奇数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個できる。

問 4 3 個のさいころを同時に投げるとき，3 の倍数の目がちょうど 2 個出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

問 5 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形 ABC において，$\angle$A の二等分線と BC との交点を D とする。BD $=3$，DC $=4$ のとき，AB $=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

3 a を $0 \leqq a \leqq 1$ を満たす定数とし，2 次関数 $f(x) = x^2 - (4a-2)x - 8a + 4$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値を M，最小値を m とする。

問 1 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は，$(\boxed{\text{ア}}\,a - \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\,a^2 - \boxed{\text{オ}}\,a + \boxed{\text{カ}})$ であり，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は，$\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケ}}$ である。

問 2 M，m をそれぞれ a の式で表しなさい。また，それぞれのとりうる値の範囲を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問 3 $-1 \leqq x \leqq 3$ において，最小値が 0 以上，かつ，最大値が 15 以下となるとき，a のとりうる値の範囲を求めなさい。
(解答の過程をすべて記入すること)

4 大人 A，B，C，D と子供 a，b，c，d の合計 8 人について，A と a，B と b，C と c，D と d はそれぞれ親子である。(解答の過程をすべて記入すること)

問 1 8 人を 4 人ずつ 2 組に分ける方法は何通りあるか求めなさい。

問 2 8 人が一列に並ぶとき，どの大人も隣り合わない並び方は何通りあるか求めなさい。

問 3 8 人が円形に並ぶとき，どの親子も向き合う並び方は何通りあるか求めなさい。

問 4 8 人が円形に並ぶとき，どの親子も隣り合う並び方は何通りあるか求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= (x-y)\{(x-y)^2 + 3xy\}$$
$$= 2(2^2 + 3\cdot 1) = \mathbf{14}$$

問 2 放物線 $y = x^2 - kx + k + 1$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - kx + k + 1 = 0$ の解であり，これらの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = k,\ \ \alpha\beta = k + 1$$

このとき，$|\beta - \alpha| = 1$ であるから　$(\beta - \alpha)^2 = 1$

ゆえに　$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

したがって　$k^2 - 4(k+1) = 1$

整理して　$k^2 - 4k - 5 = 0$

$(k+1)(k-5) = 0$

よって　$\boldsymbol{k = -1,\ 5}$

問 3 直線 $y = 2x - 1$ 上に頂点があるので，その座標を $(p,\ 2p+1)$ とし，また，放物線の方程式の x^2 の係数が 1 であるから，その方程式を

$$y = (x-p)^2 + 2p - 1$$

とおける．これが点 $(3,\ 4)$ を通るので

$4 = (3-p)^2 + 2p - 1$

整理して　$p^2 - 4p + 4 = 0$

ゆえに　$(p-2)^2 = 0$

これを解いて　$p = 2$

したがって　$y = (x-2)^2 + 2\cdot 2 - 1$　すなわち　$y = x^2 - 4x + 7$

係数を比較して　$-2a = -4,\ b = 7$　よって　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 7}$

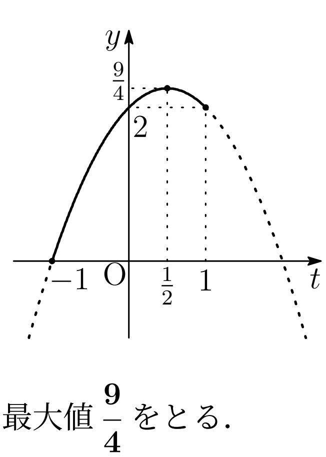
問 4 $\sin^2 x + \cos x + 1 = (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1$

$$= -\cos^2 x + \cos x + 2$$

$\cos x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき $-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$y = -t^2 + t + 2$$

すなわち　$y = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$



よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = 60^\circ}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ をとる．

問5　$a=7$，$b=6$，$c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{2\cdot 6\cdot 5}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

(答) ア．1　イ．4　ウ．－　エ．1　オ．5　カ．2　キ．7　ク．6　ケ．0
コ．9　サ．4　シ．1　ス．5　セ．6　ソ．6

$\boxed{2}$ **問1**　左辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{2-\sqrt{3}}+\frac{b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}&=\frac{a(2+\sqrt{3})+b\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=(2a-3b)+(a+2b)\sqrt{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$(2a-3b)+(a+2b)\sqrt{3}=1+4\sqrt{3}$
　　　　$(2a-3b-1)+(a+2b-4)\sqrt{3}=0$

$2a-3b-1$，$a+2b-4$ は有理数であるから

$$2a-3b-1=0,\ a+2b-4=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

【解説】 $(2a-3b-1)+(a+2b-4)\sqrt{3}=0\cdots(*)$ において，
$a+2b-4\neq 0$ であると仮定すると，

$$\sqrt{3}=-\frac{2a-3b-1}{a+2b-4}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾を生じる．
ゆえに，$a+2b-4=0$ となり，$(*)$ より $2a-3b-1=0$

問2　100 以下の自然数の集合を U とし，U の部分集合で，2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とすると

$$A=\{2\cdot 1,\ 2\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ \cdots,\ 2\cdot 50\}$$
$$B=\{3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 3,\ \cdots,\ 3\cdot 33\}$$
$$A\cap B=\{6\cdot 1,\ 6\cdot 2,\ 6\cdot 3,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$$

ゆえに　$n(A)=50$，$n(B)=33$，$n(A\cap B)=16$

よって　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
　　　　　　　$=50+33-16=67$

既約分数の個数は，分子が2の倍数でも3の倍数でない数の個数 $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ であるから

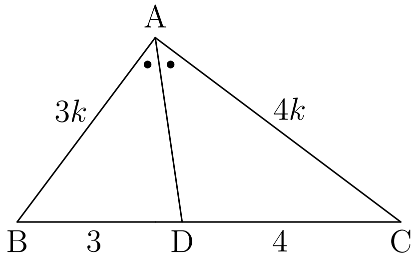
$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B) \\ &= 100-67=\mathbf{33}\ (\text{個}) \end{aligned}$$

問3 奇数となるのは，一の位が1，3，5のときで，選び方は3通り．
百の位には，一の位の数字と0を除く数字から4個取って並べる．
十の位には，一の位と百の位の数字を除く4個取って並べる．
よって，求める個数は　$3\times4\times4=\mathbf{48}$ (個)

問4 1個のさいころを投げるとき，3の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{1}{3}$
よって，3の倍数の目がちょうど2個出る確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

問5 ADは∠Aの二等分線であるから



$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:4$$

$k>0$ を用いて　$\mathrm{AB}=3k$，$\mathrm{AC}=4k$
$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$$

$5k=3+4$ であるから　$k=\dfrac{7}{5}$

よって　$\mathrm{AB}=3\times\dfrac{7}{5}=\mathbf{\dfrac{21}{5}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．3　エ．3　オ．4　カ．8　キ．2　ク．9　ケ．2
コ．1　サ．5

$\boxed{3}$ **問1**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-(4a-2)x-8a+4 \\ &= x^2-2(2a-1)x-8a+4 \\ &= \{x-(2a-1)\}^2-(2a-1)^2-8a+4 \\ &= \{x-(2a-1)\}^2-4a^2-4a+3 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(2a-1,-4a^2-4a+3)}$

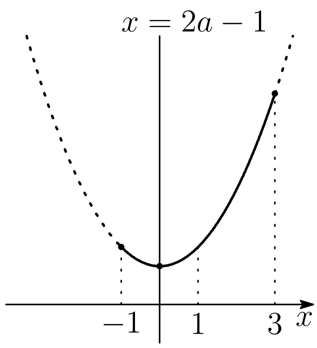
$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$-1\leqq 2a-1\leqq 1$

ゆえに，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 1}$

問2 問1の結果から，定義域 $-1 \leqq x \leqq 3$ の中央値 1 は軸 $x=2a-1$ より右側にあるので，$x=3$(定義域の右端) で最大値をとる．$x=2a-1$ は定義域内の値であるから，$x=2a-1$ で最小値をとる．ゆえに

$M=f(3)=\boldsymbol{-20a+19}$

$m=f(2a-1)=\boldsymbol{-4a^2-4a+3}$



$M=-20a+19$，$m=-4\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+4$ であるから，$0 \leqq a \leqq 1$ により

$$\boldsymbol{-1 \leqq M \leqq 19,\ -5 \leqq m \leqq 3}$$

問3 $m \geqq 0$ より　$-4a^2-4a+3 \geqq 0$

したがって　$4a^2+4a-3 \leqq 0$

ゆえに　$(2a+3)(2a-1) \leqq 0$

よって　$-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

$M \leqq 15$ より　$-20a+19 \leqq 15$

ゆえに　$-20a \leqq -4$

よって　$a \geqq \dfrac{1}{5}$　$\cdots$②

①，② および $0 \leqq a \leqq 1$ の共通部分を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{5} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．$-$　エ．4　オ．4　カ．3　キ．$-$　ク．1　ケ．1

4 **問1** 8人を4人ずつ X，Y の2組に分けるとする．

X組の4人の選び方は　${}_8\mathrm{C}_4$ (通り)

その各々に対して，Y組の4人は自動的に決まる．

X，Y の区別をなくすと，同じ組み分けが $2!$ 通りある．

よって　$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{2!}=\mathbf{35}$ (通り)

問2 どの大人も隣り合わないように並ぶには

〇子〇子〇子〇子〇

という5ヶ所の〇の位置から4ヶ所を選んで並ぶとよい．

子供の並び方は　$4!$ 通り

その各々に対して，大人の並び方は　${}_5\mathrm{P}_4$ 通り

よって，求める並び方は　$4! \times {}_5\mathrm{P}_4=24 \times 120=\mathbf{2880}$ (通り)

問 3　大人 A を固定すると，大人の位置を決めると子供の位置は決まるから，B, C，D の並び方を求めればよい．

B の位置は A，a の位置を除く 6 通り，C の位置は A，a，B，b の位置をを除く 4 通り，D の位置は A，a，B，b，C，c の位置を除く 2 通りである．

よって，求める並び方は　$6 \times 4 \times 2 = \mathbf{48}$ (通り)

問 4　各親子をひとまとめにすると，4 つの円順列は　$3!$ 通り

この各々に対して，親子の並び方は　2^4 通り

よって，求める並び方は　$3! \times 2^4 = \mathbf{96}$ (通り)

1.7 九州看護福祉大学

1.7.1 一般試験 (地方会場 A 日程)

入 学 試 験 問 題

数 学 I・A

(地 方 試 験)

福岡・長崎・宮崎・那覇

看護学科・リハビリテーション学科・社会福祉学科

平成 20 年 2 月 1 日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて 3 ページ あり、これとは別に 解答用紙が、1 枚 ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが，$y = x^2 - 4x + 3$ のグラフと x 軸の 2 つの共有点を通り，$y = ax^2 + bx + c$ の最大値が 3 である。このとき，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$，$c = \boxed{\text{ウ}}$ である。

問 2. x に関する 2 次方程式 $x^2 - 3ax + 4x + 2a^2 - 7a + 3 = 0$ の 2 つの実数解のうち，1 つは負で，もう 1 つは正であるとき，定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

問 3. x，y がすべての実数値をとるとき，$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20$ は $x = \boxed{\text{オ}}$，$y = \boxed{\text{カ}}$ で最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

問 4. 赤玉と白玉が合わせて 18 個入っている袋がある。この中から 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも赤玉である確率は $\dfrac{5}{51}$ であるという。この袋の中には，赤玉は $\boxed{\text{ク}}$ 個入っている。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ。

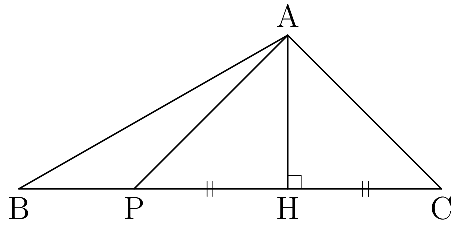
なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 図のような △ABC において，$\angle \mathrm{ABC} = 30^\circ$，$\angle \mathrm{BAC} = 105^\circ$ とする。頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とする。BH 上に $\mathrm{PH} = \mathrm{HC}$ となる点 P をとる。$\mathrm{BP} = 8$ とする。

(1) PH の長さを求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

(3) $\sin \angle \mathrm{BAP}$ を求めよ。



問 B. a は $a^2 - 4a + 3 < 0$ を満たす実数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2ax + b$ の定義域が $1 \leqq x \leqq 3$ であるとき，その値域は $-2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4}$ である。定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ 問 1. $y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ であるから，
この放物線の x 軸との共有点の x 座標は，$x = 1,\ 3$ である．
放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の x 軸との共有点の x 座標がこれと一致するので

$$y = a(x-1)(x-3) \quad ゆえに \quad y = a(x-2)^2 - a$$

最大値をもつので，x^2 の係数 a は，$a < 0$ であることに注意して

$$-a = 3 \quad これを解いて \quad a = -3$$

したがって　$y = -3(x-1)(x-3)$　すなわち　$y = -3x^2 + 12x - 9$

よって　　$\boldsymbol{a = -3,\ b = 12,\ c = -9}$

(答) ア. -3　イ. 12　ウ. -9

問 2. $y = x^2 - 3ax + 4x + 2a^2 - 7a + 3$ とおく．
この放物線と x 軸との共有点の x 座標が，正と負であるから，
$x = 0$ のとき $y < 0$ であればよいので

$$2a^2 - 7a + 3 < 0$$

ゆえに　$(a-3)(2a-1) < 0$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a < 3}$

(答) エ. $\dfrac{1}{2} < a < 3$

問 3. 　$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20$
$= (x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) + 20$
$= (x-2)^2 - 2^2 + (y-3)^2 - 3^2 + 20$
$= (x-2)^2 + (y-3)^2 + 7$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$，$\boldsymbol{y = 3}$ のとき**最小値 7** をとる．

(答) オ. 2　カ. 3　キ. 7

問4. 赤玉が x 個入っているとすると，2個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_x\mathrm{C}_2}{{}_{18}\mathrm{C}_2}=\frac{x(x-1)}{2!}\div\frac{18\cdot17}{2!}=\frac{x(x-1)}{18\cdot17}$$

したがって　$\dfrac{x(x-1)}{18\cdot17}=\dfrac{5}{51}$

整理して　$x^2-x-30=0$

ゆえに　$(x+5)(x-6)=0$

$x>0$ であるから　$x=\mathbf{6}$

(答) ク. 6

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問A. (1) $\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BAC})=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

したがって，△ACH と △APH は直角二等辺三角形であるから，

$\mathrm{AH}=\mathrm{PH}=x$ とおくと，$\mathrm{BH}=\mathrm{BP}+\mathrm{PH}=8+x$

$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}=\tan30^\circ$ より　$\dfrac{x}{8+x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{3}x=x+8$$

整理して　$(\sqrt{3}-1)x=8$

よって　$x=\dfrac{8}{\sqrt{3}-1}=\mathbf{4(\sqrt{3}+1)}$

(2) $\mathrm{AC}=\sqrt{2}\mathrm{HC}$，$\mathrm{HC}=\mathrm{PH}=x$ であるから，(1) の結果より

$$\mathrm{AC}=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times4(\sqrt{3}+1)=\mathbf{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

(3) $\mathrm{AP}=\mathrm{AC}$ であるから，(2) の結果から　$\mathrm{AP}=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

△ABP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{ABP}}=\frac{\mathrm{BP}}{\sin\angle\mathrm{BAP}}$$

ゆえに　$\dfrac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin30^\circ}=\dfrac{8}{\sin\angle\mathrm{BAP}}$

よって　$\sin\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{8\sin30^\circ}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

問 B. $a^2-4a+3<0$ を解いて　$1<a<3$

$y=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$ であるから，与えられた放物線は下に凸の放物線で，軸は $x=a$ である．したがって，頂点は定義域 $(1 \leqq x \leqq 3)$ 内にあるから，頂点で最小値 -2 をとるので

$$-a^2+b=-2 \quad \cdots ①$$

定義域の中央は 2 であるから，最大値は，次の 2 つの場合に分けて求める．

[1] $1<a \leqq 2$ のとき，$x=3$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとるから

$$3^2-2a\cdot3+b=\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad b=6a-\frac{35}{4} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して整理すると

$$4a^2-24a+27=0$$

ゆえに　$(2a-3)(2a-9)=0$

$1<a \leqq 2$ より　$a=\frac{3}{2}$

これを ② に代入して　$b=\frac{1}{4}$

[2] $2<a<3$ のとき，$x=1$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとるから

$$1^2-2a\cdot1+b=\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad b=2a-\frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入して整理すると

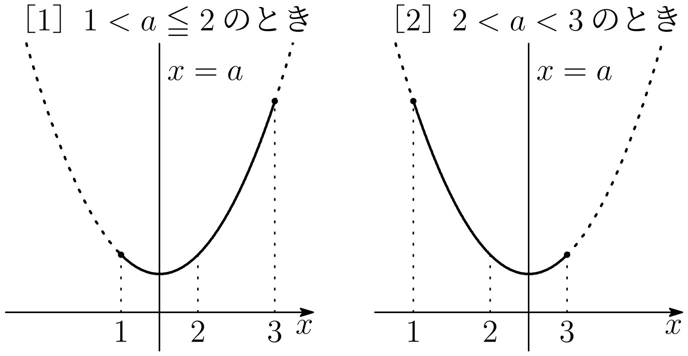
$$4a^2-8a-5=0$$

ゆえに　$(2a+1)(2a-5)=0$

$2<a<3$ より　$a=\frac{5}{2}$

これを ③ に代入して　$b=\frac{17}{4}$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{5}{2},\ \frac{17}{4}\right)}$



1.7.2　一般試験 (地方会場B日程)

入学試験問題

数学 I・A

(地方試験)
広島・佐賀・熊本・大分・鹿児島
看護学科・リハビリテーション学科・社会福祉学科
平成20年2月2日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. $a = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, $b = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ のとき，$a+b = \boxed{\text{ア}}$，$a-b = \boxed{\text{イ}}$，$3a^2+5ab+3b^2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

問 2. 80 人の学生のうち，A 市に行ったことのある人は 25 人，B 市に行ったことのある人は 32 人，どちらにも行ったことのない人は 29 人であった。

(1) A 市または B 市に行ったことのある人は $\boxed{\text{エ}}$ 人である。

(2) A 市には行ったことがあるが B 市には行ったことがない人は $\boxed{\text{オ}}$ 人である。

問 3. x を実数とするとき，$\sqrt{4x^2-16x+16}$ を簡単にすると $\boxed{\text{カ}}$ である。
$x^2-2x+\sqrt{4x^2-16x+16} = 1$ を満たす x の値は $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

問 4. $a>0$ とする。2 次関数 $y = ax^2-2ax+b$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 7，最小値が -1 である。定数 a，b の値は $a = \boxed{\text{ケ}}$，$b = \boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ。

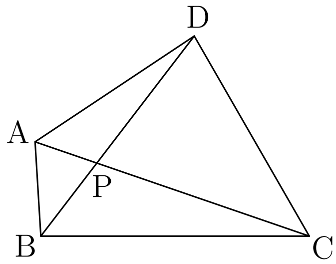
なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 四角形 ABCD の対角線 AC と BD の交点を P とする。四角形 ABCD において $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PC} = \mathrm{BP}\cdot\mathrm{PD}$ が成立している。$\mathrm{AD} = 5$，$\mathrm{DC} = 6$，$\mathrm{BC} = 7$，$\angle\mathrm{BCD} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{ACB} = \theta$，$\sin\theta = a$ とする。

(1) BD の長さを求めよ。

(2) $\angle\mathrm{BAD}$ の大きさを求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を a で表せ。



問 B. kumamoto の 8 個の文字を一列に並べるとき，次の確率を求めよ。

(1) k と t が両端になる確率を求めよ。

(2) 両端が m となる確率を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問 1. $a+b=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\mathbf{5}$

$a-b=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\boldsymbol{-\sqrt{21}}$

$ab=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=1$

したがって　$3a^2+5ab+3b^2=3(a+b)^2-ab=3\cdot5^2-1=\mathbf{74}$

(答) ア. 5　イ. $-\sqrt{21}$　ウ. 74

問 2. 80 人の学生の集合を U とし，A 市に行ったことのある人の集合を A，B 市に行ったことのある人の集合を B とすると

$$n(A)=25,\ n(B)=32,\ n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=29$$

(1) $n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$ であるから

$$29=80-n(A\cup B)\quad ゆえに\quad n(A\cup B)=\mathbf{51}$$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ により

$$51=25+32-n(A\cap B)\quad ゆえに\quad n(A\cap B)=6$$

A 市には行ったことがあるが B 市には行ったことがない人は

$$n(A)-n(A\cap B)=25-6=\mathbf{19}$$

(答) エ. 51　オ. 19

問3. $\sqrt{4x^2-16x+16}=\sqrt{(2x-4)^2}=\boldsymbol{|\,2x-4\,|}$

$x^2-2x+\sqrt{4x^2-16x+16}=1$ は $x^2-2x+|\,2x-4\,|=1$ であるから，

次の2つの場合分けを行う．

［1］ $x \geqq 2$ のとき，$|\,2x-4\,|=2x-4$ であるから

方程式は　$x^2-2x+(2x-4)=1$

ゆえに　$x^2=5$

$x \geqq 2$ より　$x=\sqrt{5}$

［2］ $x<2$ のとき，$|\,2x-4\,|=-2x+4$ であるから

方程式は　$x^2-2x+(-2x+4)=1$

整理して　$x^2-4x+3=0$

ゆえに　$(x-1)(x-3)=0$

$x<2$ より　$x=1$

よって　$\boldsymbol{x=\sqrt{5},\ 1}$

(答) カ. $|\,2x-4\,|$　キ.ク. $\sqrt{5}$, 1

問4.
$$\begin{aligned} y &= ax^2-2ax+b \\ &= a(x^2-2x)+b \\ &= a\{(x-1)^2-1^2\}+b \\ &= a(x-1)^2-a+b \end{aligned}$$

$a>0$ より，$1 \leqq x \leqq 3$ において，$x=3$ で最大値7をとり，

$x=1$ で最小値 -1 をとるので

$$3a+b=7,\ \ -a+b=-1$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

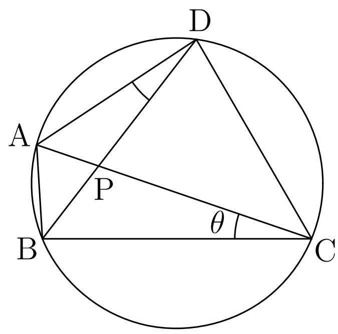
(答) ケ. 2　コ. 1

2 問 A. (1) $\triangle$BCD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}\\ &= 7^2 + 6^2 - 2\cdot7\cdot6\cos60^\circ\\ &= 49 + 36 - 2\cdot7\cdot6\cdot\frac{1}{2} = 43\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathbf{BD} = \boldsymbol{\sqrt{43}}$

(2) $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PC} = \mathrm{BP}\cdot\mathrm{PD}$ であるから，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は同一円周上あるから，四角形 ABCD の対角の和は 180° であるので



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BAD} &= 180^\circ - \angle\mathrm{BCD}\\ &= 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}\end{aligned}$$

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角は，等しいので

$$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ACB} = \theta$$

ゆえに　$\sin\angle\mathrm{ADB} = \sin\theta = a$

よって　$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{43}\times a = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{43}}{2}a}$

問 B. kumamoto の 8 文字の並べ方は　$\dfrac{8!}{2!2!}$ 通り

(1) 両端の k,t の並べ方は　2 通り

間に並ぶ残りの a,u,m,m,o,o の 6 文字の並べ方は　$\dfrac{6!}{2!2!}$ 通り

ゆえに，並び方の総数は，積の法則により　$2 \times \dfrac{6!}{2!2!} = \dfrac{6!}{2}$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6!}{2} \div \dfrac{8!}{2!2!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{28}}$

(2) 両端の m,m の並べ方は　1 通り

間に並ぶ残りの k,t,a,u,o,o の 6 文字の並べ方は　$\dfrac{6!}{2!}$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{6!}{2!} \div \dfrac{8!}{2!2!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{28}}$

1.7.3 一般試験 (看護学科)

入学試験問題

数学 I・A

(看護学科)

本学会場

平成20年2月3日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. 放物線 $y = x^2 + ax + b$ が点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $y = x + 1$ に接するとき，定数 a，b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$ である。

問 2. a は $a^2 - 6a + 8 < 0$ を満たす整数とする。x に関する 2 次方程式 $x^2 - x + a - 4 = 0$ の解のうち，正数であるものを α とする。α の整数部分は $\boxed{\text{ウ}}$，小数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。

問 3. $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解を α，β $(\alpha < \beta)$ とするとき，$\dfrac{\beta^2}{\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \boxed{\text{オ}}$ である。

問 4. (1) 実数 x についての命題「$x^2 = 2 \implies x \neq 1$」の対偶は「$\boxed{\text{カ}} \implies \boxed{\text{キ}}$」である。

(2) 実数 x，y についての命題「$x \leqq 2$ かつ $y < 3 \implies x + y < 5$」の対偶は「$\boxed{\text{ク}} \implies \boxed{\text{ケ}}$」である。

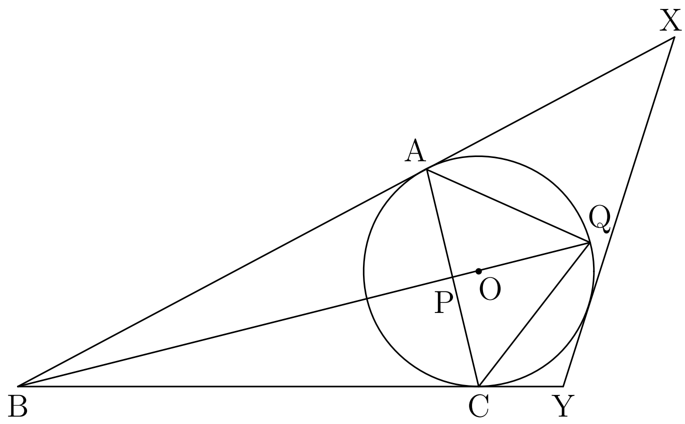
2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. △XBY に内接する円 O と，BX，BY との接点をそれぞれ A，C とし，AC と BO の交点を P，BO の延長と円 O の交点を Q とする。$\angle \mathrm{AQC} = \theta$，$\sin\theta = a$，$\mathrm{OQ} = r$ とする。

(1) AC の長さを a と r で表せ。

(2) OP の長さを a と r で表せ。



問 B. A，B の２人がそれぞれさいころを投げてからじゃんけんをする。A は奇数の目が出たらグー，2 の目が出たらチョキ，4 または 6 の目が出たらパーを出す。B は 1 の目が出たらグー，2 または 3 の目が出たらチョキ，4 以上の目が出たら，パーを出す。次の確率を求めよ。

(1) B が A に勝つ確率を求めよ。

(2) A と B があいこになる確率を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問 1. 放物線 $y = x^2 + ax + b$ は点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$2 = 1^2 + a{\cdot}1 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 1 - a \quad \cdots ①$$

$y = x^2 + ax + b$ と $y = x + 1$ から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0$$

この方程式は，重解をもつので，係数について

$$(a-1)^2 - 4(b-1) = 0 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入して，整理すると

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -1}$$

$a = -1$ を ① に代入して　$\boldsymbol{b = 2}$

(答) ア. -1　イ. 2

問 2. $a^2 - 6a + 8 < 0$ を解いて　$2 < a < 4$

したがって，整数 a の値は　$a = 3$

$a = 3$ を $x^2 - x + a - 4 = 0$ に代入して　$x^2 - x - 1 = 0$

この 2 次方程式の解は　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

このうちの正の解が α であるから　$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$2 < \sqrt{5} < 3$ であるから　$\dfrac{1+2}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1+3}{2}$

したがって，α の整数部分は　**1**

α の小数部分は　$\alpha - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

(答) ウ. 1　エ. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

問 3. $x^2-2x-1=0$ を解いて　$x=1\pm\sqrt{2}$

ゆえに　$\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$

したがって，$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-1)=6$$

よって

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\beta^4+\alpha^4}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{6^2-2\cdot(-1)^2}{(-1)^2}=\mathbf{34}$$

(答) オ. 34

問 4. (答) カ. $x=1$　キ. $x^2\neq 2$　ク. $x+y\geqq 5$　ケ. $x>2$ または $y\geqq 3$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問 A. (1) 正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=2r$

よって　$\mathrm{AC}=2r\sin\theta=\boldsymbol{2ra}$

(2) $\mathrm{AP}=\mathrm{PC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2ra=ra$

BO と円の交点を R，$\mathrm{OP}=x$ とおくと

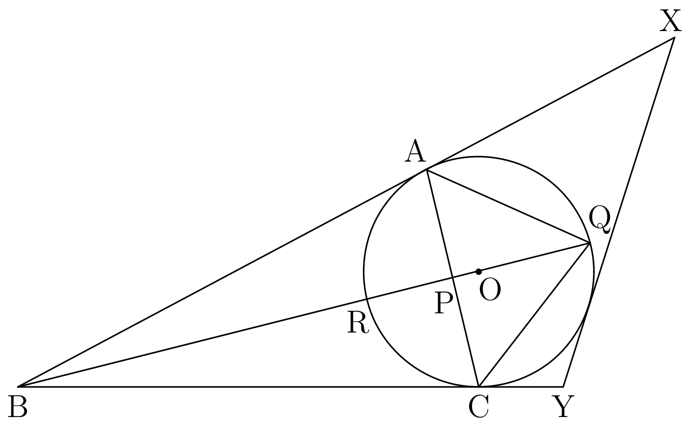
方べきの定理により　$\mathrm{RP}\cdot\mathrm{PQ}=\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PC}$

ゆえに　$(r-x)(r+x)=ra\cdot ra$

整理して　$r^2-x^2=r^2a^2$

したがって　$x^2=r^2(1-a^2)$

$x>0$ であるから　$x=\boldsymbol{r\sqrt{1-a^2}}$



問B. A，Bのグー，チョキ，パーを出す確率は

	グー	チョキ	パー
A	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

(1) Bがグーで勝つ確率は　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

Bがチョキで勝つ確率は　$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{4}{36}$

Bがパーで勝つ確率は　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{9}{36}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{36}+\dfrac{4}{36}+\dfrac{9}{36}=\boldsymbol{\dfrac{7}{18}}$

(2) グーであいこになる確率は　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{36}$

チョキであいこになる確率は　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{36}$

パーであいこになる確率は　$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{6}{36}$

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{36}+\dfrac{2}{36}+\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{11}{36}}$

1.7.4　一般試験 (社会福祉学科・リハビリテーション学科)

入学試験問題

数学 I・A

(社会福祉学科・リハビリテーション学科)

本学会場

平成20年2月3日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. (1) 360 の正の約数は $\boxed{\text{ア}}$ 個ある。

(2) 360 の正の約数のうち，5 で割り切れるものは $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

(3) 360 の正の約数のうち，10 以上のものは $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

問 2. 3 本のあたりくじを含む 12 本のくじがある。このくじを A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつ引くとき，次の確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとにもどさないものとする。

(1) A が当たり，B がはずれ，C が当たる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) A がはずれ，C が当たる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

問 3. $m \neq 0$ とする。すべての実数 x に対して $4mx^2 + 2mx - m + 5 > 0$ となるような定数 m の値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。

問 4. 実数 x，y が条件 $x^2 + y^2 = 5$ を満たすとき，$-2x + y$ は最大値 $\boxed{\text{キ}}$，最小値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ。

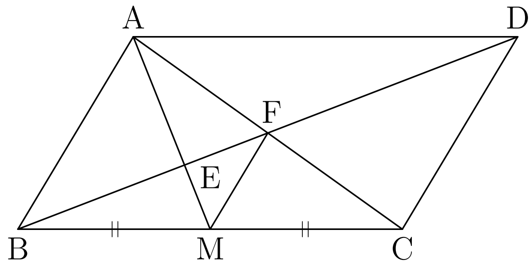
なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問A. 平行四辺形ABCDの辺BCの中点をMとする。BDとAMの交点をE，BDとACの交点をFとする。△BEMの面積を1とするとき，次の三角形の面積を求めよ。

(1) △ABEの面積 S_1 を求めよ。

(2) △AEFの面積 S_2 を求めよ。

(3) △MEFの面積 S_3 を求めよ。



問B. (1) $2x^2+3y^2-5xy-7x+9y+6$ を因数分解せよ。

(2) $2x^2+3y^2-5xy-7x+9y+5=0$ を満たす整数 x，y の値の組をすべて求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問 1. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ であるから，360 の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5 の正の約数の積で表される．

(1) 2^3 の正の約数は 4 個，3^2 の正の約数は 3 個，5 の正の約数は 2 個ある．
よって，積の法則により　$4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24}$ 個

(2) 2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5 の積である．
よって，積の法則により　$4 \times 3 = \mathbf{12}$ 個

(3) 360 の正の約数で 10 未満の数は，1，2，3，4，5，6，8，9 の 8 個であるから，360 の正の約数で 10 以上の数は，(1) の結果より　$24 - 8 = \mathbf{16}$ 個

(答) ア. 24　イ. 12　ウ. 16

問 2. (1) A が当たり，B がはずれ，C が当たる確率は

$$\frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} = \mathbf{\frac{9}{220}}$$

(2) A がはずれ，C が当たるという事象は，2 つの事象

X : A がはずれ，B が当たり，C が当たる
Y : A がはずれ，B がはずれ，C が当たる

の和事象であり，これらは互いに排反である．

X が起こる確率は　$P(X) = \dfrac{9}{12} \times \dfrac{3}{11} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{9}{220}$

Y が起こる確率は　$P(Y) = \dfrac{9}{12} \times \dfrac{8}{11} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{9}{55}$

ゆえに，求める確率は，確率の加法定理により

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = \frac{9}{220} + \frac{9}{55} = \mathbf{\frac{9}{44}}$$

(答) エ. $\dfrac{9}{220}$　オ. $\dfrac{9}{44}$

問 3. 常に不等式が成り立つとき，x^2 の係数および判別式の符号について

$$4m > 0 \quad \text{かつ} \quad (2m)^2 - 4 \cdot 4m(-m+5) < 0$$

第 1 式から　$m > 0$　$\cdots$①
第 2 式から　$20m^2 - 80m < 0$
ゆえに　$m(m-4) < 0$
よって　$0 < m < 4$　$\cdots$②

① と ② の共通部分を求めて　$\boldsymbol{0 < m < 4}$

(答) カ. $0 < m < 4$

問 4. $-2x+y=k$ とおいて，これと $x^2+y^2=5$ から y を消去すると

$$5x^2+4kx+k^2-5=0$$

この 2 次方程式は実数解をもつので，係数について

$$(4k)^2-4\cdot 5(k^2-5)\geqq 0$$

整理して　$k^2-25\leqq 0$

ゆえに　$(k+5)(k-5)\leqq 0$

したがって　$-5\leqq k\leqq 5$

よって，$-2x+y$ は最大値 **5**，最小値 **−5** をとる．

(答) キ. 5　ク. −5

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問 A. AM，BF は△ABC の中線であるから，その交点 E は△ABC の重心である．

(1) △ABE : △BEM = AE : EM = 2 : 1 であるから　$\boldsymbol{S_1=2}$

(2) △ABE : △AEF = BE : EF = 2 : 1 であるから　$S_1:S_2=2:1$

これと (1) の結果から　$\boldsymbol{S_2=1}$

(3) △BEM : △MEF = BE : EF = 2 : 1 であるから　$\boldsymbol{S_3=\dfrac{1}{2}}$

問 B. (1)

$$\begin{aligned}&2x^2+3y^2-5xy-7x+9y+6\\ =&\,2x^2+(-5y-7)x+3(y+1)(y+2)\\ =&\,\{x-(y+2)\}\{2x-3(y+1)\}\\ =&\,(x-y-2)(2x-3y-3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -(y+2) \longrightarrow & -2y-4 \\ 2 & -3(y+1) \longrightarrow & -3y-3 \\ \hline 2 & 3(y+1)(y+2) & -5y-7 \end{array}$$

(2) (1) の結果から，$2x^2+3y^2-5xy-7x+9y+5=0$ は

$$(x-y-2)(2x-3y-3)=1$$

$x-y-2$，$2x-3y-3$ は整数であるから

$$\begin{cases} x-y-2=1 \\ 2x-3y-3=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x-y-2=-1 \\ 2x-3y-3=-1 \end{cases}$$

それぞれの連立方程式を解いて　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 2),\ (1,\ 0)}$

1.8　九州ルーテル学院大学

1.8.1　一般 I 期試験 70 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy\right)^3 \times \left(-\dfrac{4}{3x}\right)^2$ を簡単にせよ．

(2) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$，$x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ および $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ の値を求めよ．

(3) $\sin 20^\circ = a$ とする．$\cos 20^\circ \cos 160^\circ + \sin 160^\circ \tan 110^\circ \sin 110^\circ$ の値を求めよ．

(4) $f(x) = x^2 + (k+1)x + k + 1$ とするとき，$f(x)$ が常に正となる k の値の範囲を求めよ．

(5) $|x^2 - 4x| \geqq x$ を満たす x の範囲を求めよ．

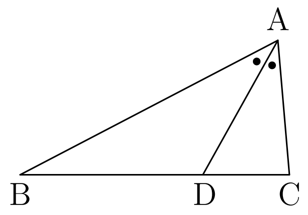
$\boxed{2}$ 2 次関数 $f(x) = 3x^2 + 6x - 24$ について以下の問いに答えよ．

(1) 頂点の座標を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフを x 軸の正の方向に p だけ平行移動させ原点を通るようにするとき，p の値を求めよ．

$\boxed{3}$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．関数 $f(\theta) = 2\sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値および最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下の $\triangle$ABC において，$\overline{\mathrm{AB}} = 3$，$\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{2}$ および $\overline{\mathrm{CA}} = \sqrt{2}$ とする．また，$\overline{\mathrm{AD}}$ は $\angle$BAC の 2 等分線であり，$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$ の関係がある．



(1) $\overline{\mathrm{BD}}$ の長さを求めよ．

(2) $\cos\angle$BAC の値を求めよ．

(3) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy\right)^3 \times \left(-\dfrac{4}{3x}\right)^2 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x^3y^3 \times \dfrac{16}{9x^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}xy^3}$

(2) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = \mathbf{7}$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3^3 - 3\cdot 3 = \mathbf{18}$

$x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = \mathbf{47}$

(3) $\sin 20^\circ = a$ より，$\cos 20^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 20^\circ} = \sqrt{1 - a^2}$ であるから

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = a$$

$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -\sqrt{1 - a^2}$$

$$\begin{aligned}\sin 110^\circ &= \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ \\ &= \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ = \sqrt{1 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 110^\circ &= \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ \\ &= -\cos(90^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -a\end{aligned}$$

$$\tan 110^\circ = \frac{\sin 110^\circ}{\cos 110^\circ} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{-a} = -\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$$

よって　$\cos 20^\circ \cos 160^\circ + \sin 160^\circ \tan 110^\circ \sin 110^\circ$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{1 - a^2} \times (-\sqrt{1 - a^2}) + a\left(-\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}\right) \times \sqrt{1 - a^2} \\ &= -(1 - a^2) - (1 - a^2) = \boldsymbol{-2 + 2a^2}\end{aligned}$$

(4) 判別式 D は

$$\begin{aligned}D &= (k + 1)^2 - 4\cdot 1\cdot (k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 3 \\ &= (k + 1)(k - 3)\end{aligned}$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよいので

$(k + 1)(k - 3) < 0$　これを解いて　$\boldsymbol{-1 < k < 3}$

(5) $|x^2-4x| \geqq x$ から

$$x^2-4x \leqq -x \cdots ① \quad \text{または} \quad x \leqq x^2-4x \cdots ②$$

① から　$x^2-3x \leqq 0$
ゆえに　$x(x-3) \leqq 0$
よって　$0 \leqq x \leqq 3$　$\cdots ③$

② から　$x^2-5x \geqq 0$
ゆえに　$x(x-5) \geqq 0$
よって　$x \leqq 0,\ 5 \leqq x$　$\cdots ④$

したがって，求める不等式の解は，③ または ④ であるから

$$\boldsymbol{x \leqq 3,\ 5 \leqq x}$$

2 (1) $f(x)=3x^2+6x-24$

$$\begin{aligned} &= 3(x^2+2x)-24 \\ &= 3\{(x+1)^2-1^2\}-24 \\ &= 3(x+1)^2-27 \end{aligned}$$

したがって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1, -27)}$

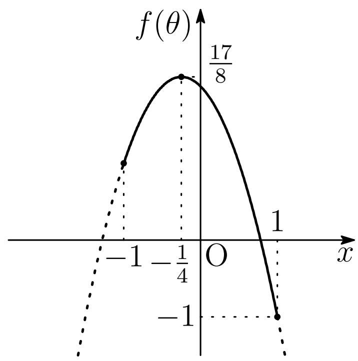
(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $3x^2+6x-24=0$ の解であるから

　　　$x^2+2x-8=0$
ゆえに　$(x+4)(x-2)=0$
よって　$x=-4,\ 2$

したがって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の座標は $(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ であるから，x 軸の正の方向に 4 だけ平行移動すればよいので，$\boldsymbol{p=4}$

3 $2\sin^2\theta-\cos\theta = 2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta$

$$= -2\cos^2\theta-\cos\theta+2$$



$\cos\theta = x$ とおくと，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta)=-2x^2-x+2$$

すなわち　$f(\theta)=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

よって　$x=-\dfrac{1}{4}$ で，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{8}}$ をとり，$x=1$ で**最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) AB : CA = BD : DC より BD : DC = $3:\sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \frac{3}{3+\sqrt{2}}\times\mathrm{BC}\\ &= \frac{3}{3+\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{18\sqrt{2}-12}{7}}\end{aligned}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\ &= \frac{(\sqrt{2})^2+3^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

よって $\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{4}}$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 33 点
(1) 3 点 (2) 3 点 $\times$ 3 = 9 点 (3) 5 点 (4) 8 点 (5) 8 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 18 点
(1) 8 点 (2) 10 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 25 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点

1.8.2　一般 II 期試験 70 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) $A = x^2 + 5x$，$B = -3x^2 + 3x + 8$ のとき，$A - X = B$ を満たす X を求めよ．

(2) $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ のとき，$x^2 + y^2$，$x^3 - y^3$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 30^\circ} + \dfrac{1}{\cos 60^\circ + \sin 120^\circ}$ を簡単にせよ．

(4) 2 次方程式 $x^2 - (p+2)x + 27 = 0$ の 1 つの解が他の解の 3 倍であるとき，p の値を求めよ．

(5) 連立不等式 $4x^2 - 1 > 0$ および $x^2 + x - 6 < 0$ を満たす整数解の個数を求めよ．

$\boxed{2}$ $ax^2 + bc + c > 0$ を満たす x の範囲が $-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{3}{4}$ であるとき，a，b および c を最も簡単な整数比で表せ．

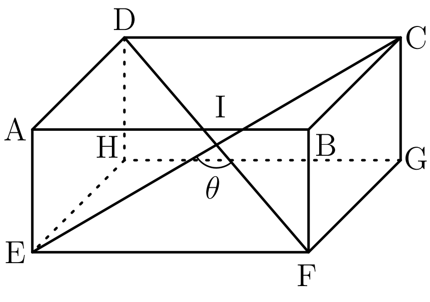
$\boxed{3}$ 2 次関数 $f(x) = x^2 + kx - k + 2$ について以下の問いに答えよ．

(1) $k = 3$ のときの $y = f(x)$ のグラフを描け．グラフには頂点，x 軸との交点および y 軸との交点の座標を明示せよ．

(2) $f(x) = 0$ が重解を持つとき，k の値を求めよ．

(3) $f(x) = 0$ が $x > 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つとき，k の値の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下の直方体 ABCD-EFGH において，$\overline{\mathrm{AB}} = 4$，$\overline{\mathrm{BC}} = 3$ および $\overline{\mathrm{AE}} = 2$ とする．また，対角線 CE および DF の交点を I とし，両対角線のなす角を θ とする．



(1) DF の長さを求めよ．

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\triangle$EFI の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A-X=B$ より，$X=A-B$ であるから

$$X=(x^2+5x)-(-3x^2+3x+8)=\boldsymbol{4x^2+2x-8}$$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ より　$x+y=\sqrt{2}$，$x-y=1$，$xy=\dfrac{1}{4}$

ゆえに　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{2})^2-2\cdot\dfrac{1}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}x^3-y^3&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\&=(x-y)\{(x+y)^2-xy\}\\&=1\left\{(\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\frac{7}{4}}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 150^\circ-\cos 30^\circ}+\frac{1}{\cos 60^\circ+\sin 120^\circ}&=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}\\&=\frac{2(1+\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\\&=\frac{4}{1-3}=\boldsymbol{-2}\end{aligned}$$

(4) 2つの解を α，3α とおくと，2次方程式 $x^2-(p+2)x+27=0$ の左辺は

$$(x-\alpha)(x-3\alpha)=x^2-4\alpha x+3\alpha^2$$

よって，x の係数および定数項を比較して

$$-(p+2)=-4\alpha,\ 27=3\alpha^2$$

ゆえに　$\begin{cases}p=4\alpha-2 & \cdots ① \\ \alpha^2=9 & \cdots ②\end{cases}$

② から　$\alpha=\pm 3$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{p=10,\ -14}$

別解 (数学 II)

2次方程式 $x^2-(p+2)x+27=0$ の2つの解を α，3α とすると

$$\alpha+3\alpha=p+2,\ \alpha\cdot 3\alpha=27$$

である．これから ①，② が与えられる．

(5) $4x^2-1>0$ から

$$(2x+1)(2x-1)>0 \quad \text{ゆえに} \quad x<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x \quad \cdots ①$$

$x^2+x-6<0$ から

$$(x+3)(x-2)<0 \quad \text{ゆえに} \quad -3<x<2 \quad \cdots ②$$

① および ② を満たす範囲は　$-3<x<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x<2$

よって，これを満たす整数解は　$-2,\ -1,\ 1$ の **3 個**

$\boxed{\mathbf{2}}$ $-\frac{2}{5}<x<\frac{4}{5}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは　$\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)<0$

ゆえに　　$(5x+2)(4x-3)<0$

よって　　$20x^2-7x-6<0$

不等号の向きに注意して　$-20x^2+7x+6>0$

したがって　　$\boldsymbol{a=-20,\ b=7,\ c=6}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $k=3$ のとき　$y=x^2+3x-1$

ゆえに　$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

よって，頂点の座標は $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

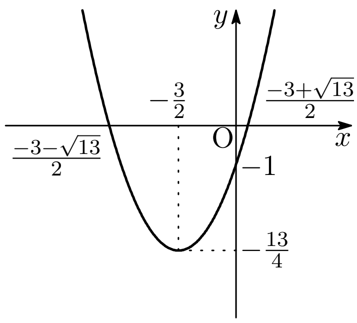
x 軸との共有点の x 座標は，

2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の解

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

であるから，その座標は　$\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$

y 軸との交点は，$x=0$ を代入して $y=-1$　よって　$(0,-1)$



(2) $x^2+kx-k+2=0$ が重解を持つとき，$D=0$ であるから

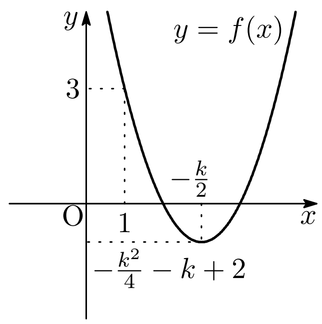
$$k^2-4\cdot1\cdot(-k+2)=0$$

ゆえに　$k^2+4k-8=0$

よって　$\boldsymbol{k=-2\pm2\sqrt{3}}$

(3) $f(x)=x^2+kx-k+2=\left(x+\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}-k+2$ であるから

$f(x)=0$ が $x>1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つための条件は



$$\begin{cases} f(1)=3>0 \\ -\dfrac{k}{2}>1 \\ -\dfrac{k^2}{4}-k+2<0 \end{cases}$$

第2式から　$k<-2$

第3式から　$k<-2-2\sqrt{3}$，$-2+2\sqrt{3}<k$

したがって，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k<-2-2\sqrt{3}}$

4 (1) 直角三角形 $\triangle$DEF により　$\mathrm{DF}^2=\mathrm{DE}^2+\mathrm{EF}^2$　$\cdots$①

直角三角形 $\triangle$DAE により　$\mathrm{DE}^2=\mathrm{DA}^2+\mathrm{AE}^2$　$\cdots$②

② を ① に代入して

$$\mathrm{DF}^2=(\mathrm{DA}^2+\mathrm{AE}^2)+\mathrm{EF}^2=3^2+2^2+4^2=29$$

$\mathrm{DF}>0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{DF}=\sqrt{29}}$

(2) $\triangle$EFI に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{IE}^2+\mathrm{IF}^2-\mathrm{EF}^2}{2\mathrm{IE}\cdot\mathrm{IF}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-4^2}{2\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}}=-\boldsymbol{\frac{3}{29}}$$

(3) $\triangle$EFI は長方形 DEFC の $\dfrac{1}{4}$ であるから，② より

$$\mathrm{DE}^2=3^2+2^2=13\quad ゆえに\quad \mathrm{DE}=\sqrt{13}$$

よって　$\triangle\mathrm{EFI}=\dfrac{1}{4}\times\mathrm{EF}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{1}{4}\times4\sqrt{13}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

配点

$\boxed{\mathbf{1}}$ 34 点
(1) 3 点 (2) 5 点 $\times 2 = 10$ 点 (3) 5 点 (4) 8 点 (5) 8 点

$\boxed{\mathbf{2}}$ 18 点

$\boxed{\mathbf{3}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点

$\boxed{\mathbf{4}}$ 24 点
(1) 8 点 (2) 8 点 (3) 8 点

1.9 熊本県立技術短期大学校

1.9.1 推薦 (前期) 試験 90分

数学I(90分)

平成19年9月23日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したときの x^2 の係数は $\boxed{\text{ア}}$，x の係数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ウ}}) \times (\boxed{\text{エ}})$ となる。

(3) $y=2x^2-4x+5$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると $y=2x^2-8x+13$ となった。このとき，$p=\boxed{\text{オ}}$，$q=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次不等式 $x^2+ax+b \leqq 0$ の解が $2 \leqq x \leqq 4$ であるとき，$a=\boxed{\text{キ}}$，$b=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\tan\theta=2\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$ ならば，$\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$，$\sin\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $x-3+2|x-2|<0$ となる x の範囲は $\boxed{\text{サ}} < x < \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2 次関数のグラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,\ 6)$ を通るとき，その 2 次関数は $y=\boxed{\text{ス}}$ であり，そのグラフの頂点は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次関数 $y=-3x^2+12x-4$ の定義域が $1 \leqq x \leqq 4$ であるとき，最大値は $\boxed{\text{ソ}}$，最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 両岸が平行な川がある。現在いる点 O と対岸の点 P を結ぶ直線が川と直角であるとする。点 O を通り川に平行な直線上の $\angle\mathrm{PQO}=60^\circ$ となる点 Q は，$\mathrm{OQ}=60\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ の点であった。このとき，$\mathrm{OP}=\boxed{\text{チ}}\,\mathrm{m}$ である。線分 OQ の延長線上にあり $\angle\mathrm{PRO}=30^\circ$ となる点 R は $\mathrm{OR}=\boxed{\text{ツ}}\,\mathrm{m}$ の点である。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}=45^\circ$，$\angle\mathrm{B}=15^\circ$，$\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ ならば，$\angle\mathrm{C}=\boxed{\text{テ}}^\circ$ で，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 2 次関数 $y=x^2-3x+4$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を b とする。b を a で表すと $a \leqq \boxed{\text{ナ}}$ のときは $b=\boxed{\text{ニ}}$，a がそれ以外の範囲にあるときは $b=\boxed{\text{ヌ}}$ である。また，b は，$a=\boxed{\text{ネ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ノ}}$ をとる。

[4] 四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=20$，$\mathrm{BC}=25$，$\mathrm{CD}=30$，$\mathrm{DA}=15$ で $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ ならば，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ で $\mathrm{AC}=\boxed{\text{ヒ}}$ となる。$\angle\mathrm{CDA}=\theta$ とおくと $\cos\theta=\boxed{\text{フ}}$ であるから，$\sin\theta=\boxed{\text{ヘ}}$ となり，$\triangle\mathrm{ACD}$ の面積は $\boxed{\text{ホ}}$ となる。

解答例

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したとき

x^2 の項は　$2x \times 4x + 1 \times 3x^2 = 11x^2$

x の項は　$2x \times 2 + 1 \times 4x = 8x$

したがって，x^2 の係数は **11**，x の係数は **8** である。

(答) ア．11　イ．8

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると

$$\boldsymbol{(x+3)(3x-2)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 3 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \hline 3 & & -6 & & 7 \end{array}$$

(答) ウ.エ．$x+3$，$3x-2$

(3) $y=2x^2-4x+5$ を変形すると　$y=2(x-1)^2+3$

$y=2x^2-8x+13$ を変形すると　$y=2(x-2)^2+5$

よって，頂点は $(1,\ 3)$ から $(2,\ 5)$ に移動する．

したがって，第 2 式は，第 1 式を

x 軸方向に　$p=2-1=\mathbf{1}$，　y 軸方向に　$q=5-3=\mathbf{2}$

だけ平行移動したものである．

(答) オ．1　カ．2

(4) $2 \leqq x \leqq 4$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x-2)(x-4) \leqq 0$　すなわち　$x^2-6x+8 \leqq 0$

したがって，$x^2+ax+b \leqq 0$ の係数と比較して　$a=\mathbf{-6}$，$b=\mathbf{8}$

(答) キ．-6　ク．8

(5) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より　$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ．$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　コ．$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[2] (1)　[1]　$x \geqq 2$ のとき　$|x-2| = x-2$ であるから

不等式は　$x-3+2(x-2)<0$

これを解いて　$x < \dfrac{7}{3}$

$x \geqq 2$ に注意して　$2 \leqq x < \dfrac{7}{3}$

[2]　$x < 2$ のとき　$x-2 = -(x-2) = -x+2$ であるから

不等式は　$x-3+2(-x+2)<0$

これを解いて　$x > 1$

$x < 2$ に注意して　$1 < x < 2$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

【別解】 $x-3+2|x-2|<0$ から　$|x-2| < \dfrac{3-x}{2}$

したがって　$-\dfrac{3-x}{2} < x-2 < \dfrac{3-x}{2}$

$-\dfrac{3-x}{2} < x-2$　を解いて　$x > 1$　$\cdots$①

$x-2 < \dfrac{3-x}{2}$　を解いて　$x < \dfrac{7}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

(答) サ．1　シ．$\dfrac{7}{3}$

(2)　x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)(x-3)$$

の形で表される．このグラフが点 $(0,\ 6)$ を通るから

$$6 = a\cdot(-1)\cdot(-3)　ゆえに　a = 2$$

よって　$y = 2(x-1)(x-3)$　すなわち　$y = \boldsymbol{2x^2 - 8x + 6}$

また，$2x^2-8x+6 = 2(x-2)^2-2$ であるから，頂点の座標は $\boldsymbol{(2, -2)}$

(答) ス．$2x^2-8x+6$　セ．$(2, -2)$

(3)　$y = -3x^2+12x-4$ を変形すると

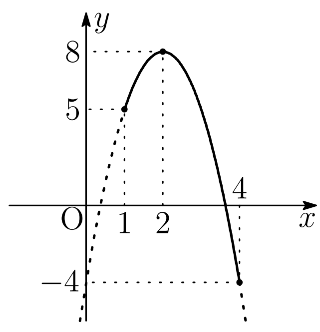
$$y = -3(x-2)^2+8$$

$1 \leqq x \leqq 4$ は，右の図の実線部分である．

よって，y は

$x = 2$ で最大値 **8** をとり，

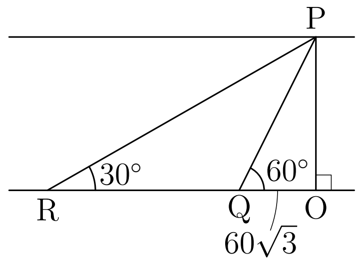
$x = 4$ で最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．



(答) ソ．8　タ．-4

(4) $\triangle$OPQ において

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}\tan 60^\circ$$
$$= 60\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \mathbf{180}\ (\mathrm{m})$$



$\triangle$OPR において

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OP}\tan\angle\mathrm{OPR}$$
$$= 180\tan 60^\circ = \mathbf{180\sqrt{3}}\ (\mathrm{m})$$

(答) チ. 180　ツ. $180\sqrt{3}$

(5) $C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = \mathbf{120^\circ}$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

よって　　$\mathrm{AB}\sin 45^\circ = 3\sqrt{2}\sin 120^\circ$

$$\mathrm{AB} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　　$\mathrm{AB} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

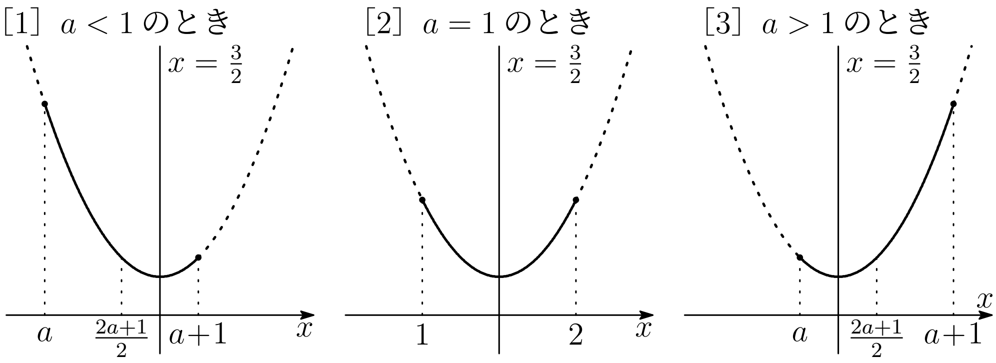
(答) テ. 120　ト. $3\sqrt{3}$

[3] $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x = \dfrac{3}{2}$ である．$a \leqq x \leqq a+1$ の中央は　$x = \dfrac{2a+1}{2}$

［1］ $\dfrac{2a+1}{2} < \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a < 1$ のとき
$x = a$ で最大値をとるから　$b = a^2 - 3a + 4$

［2］ $\dfrac{2a+1}{2} = \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a = 1$ のとき
$x = 1,\ 2$ で最大値をとるから　$b = 2$

［3］ $\dfrac{3}{2} < \dfrac{2a+1}{2}$　すなわち　$a > 1$ のとき
$x = a+1$ で最大値をとるから　$b = (a+1)^2 - 3(a+1) + 4 = a^2 - a + 2$



したがって，$a \leqq 1$ のとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - 3a + 4}$$

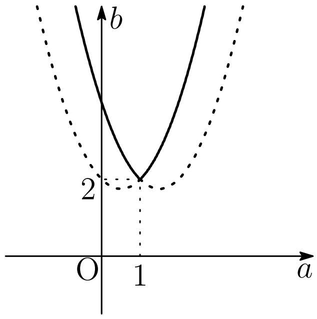
a がそれ以外の範囲にあるとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - a + 2}$$

である．

また，グラフは右の図の実線部分である．

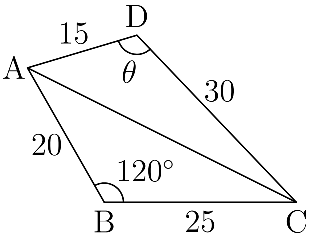
よって，b は，$a = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる．



[4] △ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 25\sin 120^\circ = \mathbf{125\sqrt{3}}$$

△ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 20^2 + 25^2 - 2\cdot 20\cdot 25\cos 120^\circ \\ &= 1525 \end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{1525} = \mathbf{5\sqrt{61}}$

△ACD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}} \\ &= \frac{30^2 + 15^2 - 1525}{2\cdot 30\cdot 15} = \mathbf{-\frac{4}{9}} \end{aligned}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{65}}{9}}$

したがって，△ACD の面積は

$$\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{65}}{9} = \mathbf{25\sqrt{65}}$$

(答) ハ．$125\sqrt{3}$　ヒ．$5\sqrt{61}$　フ．$-\frac{4}{9}$　ヘ．$\frac{\sqrt{65}}{9}$　ホ．$25\sqrt{65}$

1.9.2 推薦 (後期) 試験 90分

数学I(90分)

平成19年11月25日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

[1] (1) $(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$ を展開すると $\boxed{\text{ア}}x^3 - \boxed{\text{ア}}y^3 - \boxed{\text{イ}}x^2y + \boxed{\text{イ}}xy^2$ である。

(2) 放物線 $y=2x^2-12x+22$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ と重ねるためには x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。

(3) 2 次関数 $y=a(x-2)^2+b\ (a<0)$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 3 で最小値が 1 であるならば $a=\boxed{\text{オ}}$, $b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 連立 2 次不等式 $\begin{cases} x^2-4x+3 \leqq 0 \\ x^2-2x-1 \leqq 0 \end{cases}$ の解は $\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\cos\theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\tan\theta = \boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $x^2+3xy+2y^2+2x+y-3$ を因数分解すると, $\left(\boxed{\text{サ}}\right) \times \left(\boxed{\text{シ}}\right)$ である。

(2) 2 次関数 $y=x^2-4x+a$ の定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ で, その最大値と最小値の和が -2 であるとき, $a=\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ は $a=\boxed{\text{ソ}}$ のとき, ただ 1 つの実数解を持つ。また, すべての解が 3 より小さいのは $a>\boxed{\text{タ}}$ のときである。

(4) 長さ 3 のひもを長方形の形にしたときの短辺の長さを a, 長辺の長さを b とすると, $a+b=\boxed{\text{チ}}$ である。このとき, 長方形の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるなら, $0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $a=\cos 10^\circ$, $b=\sin 20^\circ$ を用いると

$$\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = \boxed{\text{テ}}, \qquad \sin 80^\circ + \cos 110^\circ = \boxed{\text{ト}}$$

と表される。

[3] O を原点, 放物線 $y=-\sqrt{3}(4x^2-1)$ の頂点の座標を P とすると, PO の長さは $\boxed{\text{ナ}}$ である。x 軸上の 2 点 A, B を △PAB が正三角形となるようにとるとき, 辺 AB の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。次に放物線上の点 Q と x 軸上の点 C, D を △QCD が正三角形となるようにとる。Q の x 座標を $a\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$ とすると, 辺 CD の長さは a を用いて $\boxed{\text{ヌ}}$ と表せる。したがって, CD の長さが AB の長さの $\dfrac{1}{2}$ となるのは, $a=\boxed{\text{ネ}}$ のときである。

[4] 面積が 24 である △ABC の辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ D, E, F を AD : DB = 1 : 3, BE : EC = 1 : 1, CF : FA = 2 : 1 となるようにとる。このとき △ADF, △BED, △CFE の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき, $S_1=\boxed{\text{ノ}}$, $S_2=\boxed{\text{ハ}}$, $S_3=\boxed{\text{ヒ}}$ である。また, △DEF の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1)　$(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$
$=(x-y)\times(2x-3y)(3x-2y)$
$=(x-y)(6x^2-13xy+6y^2)$
$=x(6x^2-13xy+6y^2)-y(6x^2-13xy+6y^2)$
$=\mathbf{6}x^3-\mathbf{6}y^3-\mathbf{19}x^2y+\mathbf{19}xy^2$

(答) ア. 6　イ. 19

(2) $y=2x^2-12x+22$ を変形すると　$y=2(x-3)^2+4$
$y=2x^2+4x-3$ を変形すると　$y=2(x+1)^2-5$
よって，頂点は $(3,\ 4)$ から $(-1,-5)$ に移動する．
したがって，第2式は，第1式を

x 軸方向に　$-1-3=\mathbf{-4}$,　y 軸方向に　$-5-4=\mathbf{-9}$

だけ平行移動したものである．

(答) ウ. -4　エ. -9

(3) $a<0$ であるから，$1\leqq x\leqq 4$ において，2次関数 $y=a(x-2)^2+b$ は，$x=2$ で最大値 b，$x=4$ で最小値 $4a+b$ をとるので

$b=\mathbf{3}$，$4a+b=1$　ゆえに　$a=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(答) オ. $-\dfrac{1}{2}$　カ. 3

(4) 第1式から　$(x-1)(x-3)\leqq 0$　ゆえに　$1\leqq x\leqq 3$　$\cdots$①
2次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{2}$ であるから
第2式の解は　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\mathbf{1}\leqq x\leqq \mathbf{1+\sqrt{2}}$

(答) キ. 1　ク. $1+\sqrt{2}$

(5) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\cos\theta\leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}$

(答) ケ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　コ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

[2] (1) x について整理して因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&x^2+3xy+2y^2+2x+y-3\\
=&x^2+(3y+2)x+(2y^2+y-3)\\
=&x^2+(3y+2)x+(y-1)(2y+3)\\
=&\{x+(y-1)\}\{x+(2y+3)\}\\
=&\boldsymbol{(x+y-1)(x+2y+3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \times & y-1 & \longrightarrow \quad y-1\\
1 & & 2y+3 & \longrightarrow \quad 2y+3\\
\hline
1 & & (y-1)(2y+3) & \quad 3y+2
\end{array}
$$

(答) サ．シ．$x+y-1$，$x+2y+3$

(2) $y=x^2-4x+a$ を変形して　$y=(x-2)^2+a-4$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=2$ で最小値 $a-4$ をとり，$x=0$ で最大値 a をとる．最大値と最小値の和が -2 であるから

$$a+(a-4)=-2 \quad \text{これを解いて} \quad a=\mathbf{1}$$

したがって，最小値は　$a-4=1-4=\mathbf{-3}$

(答) ス．1　セ．-3

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0\cdots(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=a^2-3(2a-3)=(a-3)^2 \quad \cdots ①$$

$(*)$ がただ 1 つの実数解をもつとき，$D=0$ であるから　$a=\mathbf{3}$

$f(x)=3x^2+2ax+2a-3$ とおくと

$y=f(x)$ の軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{3}$

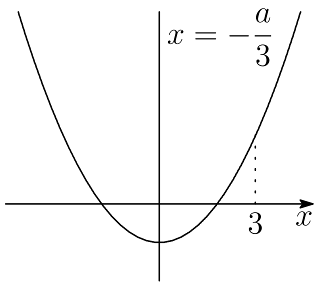
このとき　$-\dfrac{a}{3}<3$　ゆえに　$a>-9$　$\cdots ②$

$f(3)>0$ であるから，$3{\cdot}3^2+2a{\cdot}3+2a-3>0$

これを解いて　$a>-3\cdots ③$

① より，常に $D \geqq 0$ であるから

②，③ の共通範囲を求めて　$a>\mathbf{-3}$



(答) ソ．3　タ．-3

[**別解**] 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ の左辺を因数分解すると

$(x+1)(3x+2a-3)=0$　これを解いて　$x=-1,\ 1-\dfrac{2a}{3}$

これらの解が 3 より小さいので

$$1-\frac{2a}{3}<3 \quad \text{これを解いて} \quad a>-3$$

(4) 周の長さから　$2a+2b=3$　ゆえに　$a+b=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

このとき，$0<a<b$，$b=\dfrac{3}{2}-a$ であるから　$0<a<\dfrac{3}{4}$　$\cdots$①

長方形の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるから　$ab \leqq \dfrac{1}{2}$

すなわち　$a\left(\dfrac{3}{2}-a\right) \leqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$(a-1)(2a-1) \geqq 0$

① に注意して　$0<a \leqq \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(答) チ. $\dfrac{3}{2}$　ツ. $\dfrac{1}{2}$

(5) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ = b$，$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ = -a$ であるから

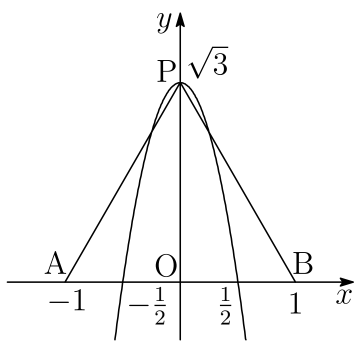
$$\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = \boldsymbol{-a+b}$$

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = a$，$\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ = -b$ であるから

$$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ = \boldsymbol{a-b}$$

(答) テ. $-a+b$　ト. $a-b$

[3] 放物線の方程式は　$y=-4\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$



頂点 P の座標は $(0,\ \sqrt{3})$ であるから　$\mathrm{PO}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

△PAB が正三角形であるから　PA = PB

このとき，直角三角形 PAO と直角三角形 PBO は合同で，∠PAO = ∠PBO = 60° であるから

AO = BO = 1　ゆえに　AB = **2**

$0<a<\dfrac{1}{2}$ であるから，Q は x 軸の上側の点であり，Q から x 軸に下ろした垂線の長さを h とすると　$h=-\sqrt{3}(4a^2-1)$　$\cdots$①

△QCD と △PAB は合同であるから

$$\mathrm{CD} : h = \mathrm{AB} : \mathrm{PO} = 2 : \sqrt{3}\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{CD}=\frac{2}{\sqrt{3}}h \quad \cdots ②$$

①，② より　$\mathrm{CD}=\boldsymbol{2(1-4a^2)}$

$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ のとき　$2(1-4a^2)=\dfrac{1}{2}\times 2$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ に注意して　$a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(答) ナ. $\sqrt{3}$　ニ. 2　ヌ. $2(1-4a^2)$　ネ. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[4] BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくと

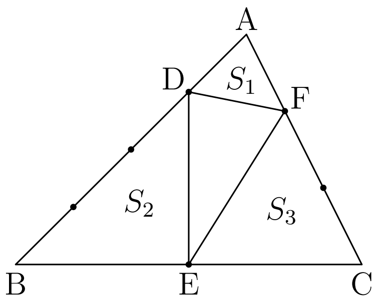
$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = 24$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADF} &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}c\times\frac{1}{3}b\sin A = \frac{1}{12}\times\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{12}\times 24 = \mathbf{2}\\ \triangle\mathrm{BED} &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}c\times\frac{1}{2}a\sin B = \frac{3}{8}\times\frac{1}{2}ca\sin B = \frac{3}{8}\times 24 = \mathbf{9}\\ \triangle\mathrm{CFE} &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}b\sin C = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{3}\times 24 = \mathbf{8}\end{aligned}$$

したがって，△DEF の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DEF} &= 24 - (S_1 + S_2 + S_3)\\ &= 24 - (2 + 9 + 8) = \mathbf{5}\end{aligned}$$



(答) ノ．2　ハ．9　ヒ．8　フ．5

1.9.3 一般試験 90分

数学I・II(90分)

平成20年2月10日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話等の電源は切っておくこと。

[1] (1) $x=2+\sqrt{3}$ のとき，x^2-4x+1 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき x^3-2x^2-7x+7 の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 放物線 $C: y=-2x^2-2x+2$ を平行移動して，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるようにするためには，C を x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。

(3) $x=1+2i$ が方程式 $x^3-4x^2+ax+b=0$ の解であるとき，実数の係数 a，b の値は，$a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 方程式 $(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+3=0$ の解は $x=\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において AB $=2$，BC $=\sqrt{7}$，CA $=1$ ならば，$\angle$BAC $=\boxed{\text{ケ}}^\circ$ で $\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$ が $(x-2)^2$ で割り切れるならば，$a=\boxed{\text{サ}}$ で，$f(x)=0$ の $x=2$ 以外の解は $x=\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) x が $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-2^{x-1}\right)=2x$ をみたすとき，$2^x=\boxed{\text{ス}}$ であるから，$x=\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ の解は $x=\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) x，y が 3 つの不等式 $y-2x \leqq 4$，$y \geqq x+1$，$x \leqq 0$ を同時にみたすとき，$2y-x$ の最大値は $\boxed{\text{チ}}$，最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ となる。

(5) 関数 $y=x^3-2x$ のグラフと直線 $y=x+a$ の共有点の個数が 3 であるのは，a が $\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ の範囲にあるときである。

[3] $\triangle$ABC の重心を G とする。2 点 G，A を通る直線が $x-2y+1=0$，2 点 G，B を通る直線が $x+y+4=0$ であるとき，点 G の座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。さらに，点 C の座標が $(-3,-7)$ であるなら，点 A の座標は $\boxed{\text{ニ}}$，点 B の座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。2 点 A，B を通る直線と点 C の距離は $\boxed{\text{ネ}}$ であるので，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

[4] 原点Oから，x 軸の正方向とのなす角が θ の方向に投げられた質点の描く軌跡は，$m = \tan\theta$ とおくとき，放物線 $C : y = -\dfrac{1}{4}(1+m^2)x^2 + mx$ であるとする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$。このとき，$C$ と x 軸との，O以外の交点Pの x 座標を $\sin 2\theta$ を用いて表すと $\boxed{\text{ハ}}$ と書けるから，線分OPの長さは $\theta = \boxed{\text{ヒ}}$ のとき最大となる。また，C と線分OPで囲まれる部分の面積 S は，m を用いて表すと $\boxed{\text{フ}}$，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表すと $\boxed{\text{ヘ}}$ となるから，$\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のときの S の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

解答例

[1] (1) $x - 2 = \sqrt{3}$ であるから

両辺を2乗して　　$(x-2)^2 = 3$

よって　　$x^2 - 4x + 1 = \mathbf{0}$

また，右の割り算から

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = (x^2 - 4x + 1)(x+2) + 5$$

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x \quad +2 \\
x^2-4x+1 \,\big) & \overline{x^3 - 2x^2 - 7x + 7} \\
 & x^3 - 4x^2 \quad + x \\
\hline
 & 2x^2 - 8x + 7 \\
 & 2x^2 - 8x + 2 \\
\hline
 & 5
\end{array}$$

これに上の結果を代入して

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0 \times (x+2) + 5 = \mathbf{5}$$

(答) ア．0　イ．5

(2) 放物線 $C : y = -2x^2 - 2x + 2$ を平行移動して，x 軸と2点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わる放物線を C' とすると，C' は x^2 の係数に注意して

$$y = -2(x+1)(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x^2 + 2x + 4$$

C，C' をそれぞれ変形すると

$$C : y = -2x^2 - 2x + 2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$$C' : y = -2x^2 + 2x + 4 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって，頂点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ から点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ に移動する．ゆえに，C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものが C' であれば，C，C' の頂点の座標から

$$-\frac{1}{2} + p = \frac{1}{2},\quad \frac{5}{2} + q = \frac{9}{2} \qquad \text{よって} \qquad p = \mathbf{1},\ q = \mathbf{2}$$

(答) ウ．1　エ．2

(3) $1+2i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+2i)^3-4(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理して　$(a+b+1)+(2a-18)i=0$

a，b は実数であるから

$$a+b+1=0,\ 2a-18=0$$

これを解くと　$\boldsymbol{a=9,\ b=-10}$

(答) オ．9　カ．-10

(4) 方程式を変形すると　$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$
ゆえに　$(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)=0$
したがって　$\log_3 x=1,\ 3$
よって　$x=3,\ 27$

(答) キ．ク 3，27

(5) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

したがって，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$ を満たす A は　$\boldsymbol{A=120^\circ}$
よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(答) ケ．120　コ．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[2] (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$ は $(x-2)^2=x^2-4x+4$ で割り切れるので，$f(x)$ の x^3 の係数および定数項に注意して

$$x^3+ax^2+bx+8=(x^2-4x+4)(x+2) \quad \cdots ①$$

とかける．右辺を展開すると

$$x^3+ax^2+bx+8=x^3-2x^2-4x+8$$

x^2 の項を係数を比較して　$\boldsymbol{a=-2}$

① より $f(x)=(x-2)^2(x+2)$ であるから，$f(x)=0$ の $x=2$ 以外の解は

$$\boldsymbol{x=-2}$$

(答) サ．-2　シ．-2

(2) $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-2^{x-1}\right)=2x$ から　$\dfrac{1}{2}-2^{x-1}=2^{2x}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 2^x=(2^x)^2$

$2^x=t$ とおくと $(t>0)$　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t=t^2$

整理して　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解して　$(t+1)(2t-1)=0$

$t>0$ に注意して　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，$\boldsymbol{2^x=\dfrac{1}{2}}$ であるから　$\boldsymbol{x=-1}$

(答) ス．$\dfrac{1}{2}$　セ．-1

(3) 左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$$

よって $\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ①$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

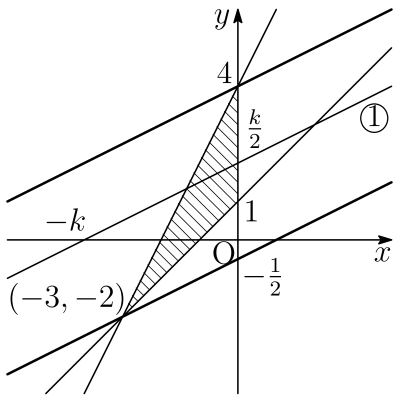
であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{4}\pi$$

したがって $\quad \boldsymbol{x=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi}$

(答) ソ．タ．$\frac{13}{12}\pi$，$\frac{19}{12}\pi$

(4) 与えられた連立不等式の表す領域は 3 点 $(-3, -2)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする三角形の周および内部である．



$$2y-x=k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが $\frac{1}{2}$，y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す．
図から，直線 ① が

点 $(0,\ 4)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最大

点 $(-3, -2)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最小

である．したがって，$2y-x$ は

$x=0$，$y=4$ のとき最大値 **8** をとり，

$x=-3$，$y=-2$ のとき最小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる．

(答) チ．8　ツ．-1

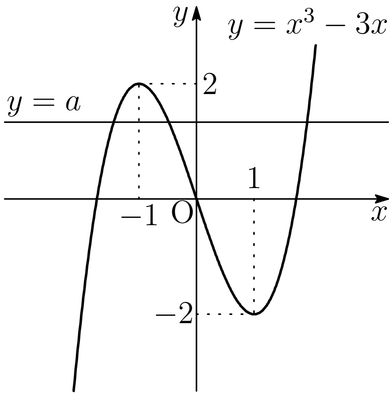
(5) 与えられた関数のグラフと直線の共有点の個数は，方程式

$$x^3-2x=x+a \quad \text{すなわち} \quad x^3-3x=a$$

の実数解の個数である．
関数 $y=x^3-3x$ について

$$y'=3x^2-3x$$
$$=3x(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗



y の増減表は，右のようになる．
よって，$y=x^3-3x$ のグラフは，
右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる３個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-2<a<2}$$

(答) テ．-2　ト．2

[3] 2点G，Aを通る直線を①とし，2点G，Bを通る直線を②とすると，Gは①および②上の点であるから，Gは連立方程式

$$\begin{cases} x-2y+1=0 & \cdots ① \\ x+y+4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解であり，これを解いて　$\mathbf{G(-3,-1)}$

また，A，Bのy座標を，それぞれs，tとすると，①，②から

$$\mathrm{A}(2s-1,\ s),\ \mathrm{B}(-t-4,\ t)$$

$\mathrm{C}(-3,-7)$のとき，△ABCの重心が$\mathrm{G}(-3,-1)$であることから

$$\frac{(2s-1)+(-t-4)+(-3)}{3}=-3,\quad \frac{s+t+(-7)}{3}=-1$$

整理して　$2s-t=-1$，$s+t=4$

ゆえに　$s=1$，$t=3$

よって　$\mathbf{A(1,\ 1)}$，$\mathbf{B(-7,\ 3)}$

2点$\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-7,\ 3)$を通る直線ℓは

$$y-1=\frac{3-1}{-7-1}(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad x+4y-5=0$$

点$\mathrm{C}(-3,-7)$と直線ℓの距離dは

$$d=\frac{|-3+4\cdot(-7)-5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\boldsymbol{\frac{36}{\sqrt{17}}}$$

△ABCの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times d$$

であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-7-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{17}\times\frac{38}{\sqrt{17}}=\mathbf{36}$$

(答) ナ. $(-3,-1)$　ニ. $(1,\ 1)$　ヌ. $(-7,\ 3)$　ネ. $\dfrac{36}{\sqrt{17}}$　ノ. 36

[4] 放物線 C は

$$y=-\frac{1+m^2}{4}x\left(x-\frac{4m}{1+m^2}\right)$$

であるから，C と x 軸との共有点で，O 以外の点 P の x 座標は $\dfrac{4m}{1+m^2}$

これに $m=\tan\theta$ を代入して

$$\frac{4m}{1+m^2}=\frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\boldsymbol{2\sin 2\theta}\quad\cdots①$$

よって，OP の長さ $2\sin 2\theta$ は，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ のとき最大となる．

また，C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1+m^2}{4}\right)\left(\frac{4m}{1+m^2}-0\right)^3\\&=\frac{1}{24}(1+m^2)\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^3&\cdots②\\&=\boldsymbol{\frac{8m^3}{3(1+m^2)^2}}&\cdots③\end{aligned}$$

ここで

$$1+m^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{2}{1+\cos 2\theta}\quad\cdots④$$

であるから，①，④ を ② に代入して

$$S=\frac{1}{24}\times\frac{2}{1+\cos 2\theta}\times(2\sin 2\theta)^3=\boldsymbol{\frac{2\sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}}\quad\cdots⑤$$

$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき，$2\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，⑤ より

$$S=\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{3(\sqrt{2}+1)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

(答) ハ. $2\sin 2\theta$ ヒ. $\dfrac{\pi}{4}$ フ. $\dfrac{8m^3}{3(1+m^2)^2}$ ヘ. $\dfrac{2\sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}$ ホ. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

第 2 章　医療系

本書に掲載した平成 20 年度 (2008) 入学試験問題は次のとおりである．

本書に掲載した 2008 年度入学試験問題		
学校名	**試験科目**	**試験日**
メディカルカレッジ青照館 (一般)	I・A	1/13，2/17，3/2
熊本駅前リハビリテーション専門学校 (一般)	I・A	11/25
九州中央リハビリテーション学院 (一般)	I・A	11/3
西日本リハビリテーション学院 (一般)	I・A	12/22，2/23
熊本労災看護専門学校 (一般)	I・A	1/24

医療系専門学校等への入試対策 (数学) は，数学 I・数学 A を中心に対策をとる必要がある．問題および出題形式について，学校ごとの出題傾向があり，過去問題を複数年に亘り研究しておくことが，最も効率的な試験対策であると考えられる．

なお，学校ごとの入試問題 (3 年分) を次のサイトから入手することができる[1]．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

[1]県内の看護師養成課程 (高看) をもつ専門学校に入学試験問題の送付を依頼したところ，熊本労災看護専門学校以外のすべての学校は，入学試験問題を非公開としているため，入手することができなかった．

2.1 メディカルカレッジ青照館

2.1.1 第 4 期試験 (一般試験)60 分

I. 次の各式を因数分解せよ。

(1) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(2) $(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16$

(3) $x^2y+x^2+x-xy^2-y^2-y$

II. 次の式の二重根号をはずしなさい。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

III. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}$ の値を求めよ。

IV. 次の不等式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+3>x-1 & \cdots ① \\ x-5 \geqq 4-\dfrac{2}{3}x & \cdots ② \end{cases}$

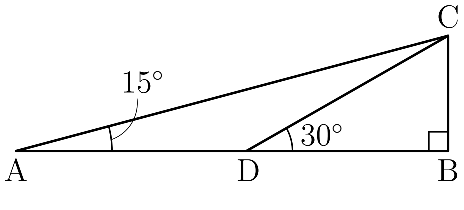
(2) $|x+2|<5$

V. 実数 a，b，c が $a+b+c \geqq 0$ を満たすとき，

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$$

が成り立つことを証明しなさい。

VI. 下の図を利用して，$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ の値をそれぞれ求めよ.
解答は無理数のままでよい。



VII. REHABILI という単語に使われている文字について，次のものを求めよ。

(1) この 8 文字全部を用いてできる順列の数。

(2) このうち 4 文字を使ってできる組合せの数。

(3) このうち 4 文字を使ってできる順列の数。

解答例

I. (1) (特定の文字に着目する．ここでは a に注目した．)

$$
\begin{aligned}
&a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\\
=&-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2\\
=&-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)\\
=&-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
=&-(b-c)(a-b)(a-c)\\
=&\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

(2) (平方差をつくる)

$$
\begin{aligned}
&(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16\\
=&(x^2-y^2)^2-8\{(x^2-y^2)+2y^2\}+16\\
=&(x^2-y^2)-8(x^2-y^2)+16-16y^2\\
=&\{(x^2-y^2)-4\}^2-(4y)^2\\
=&\{(x^2-y^2-4)+4y\}\{(x^2-y^2-4)-4y\}\\
=&\{x^2-(y^2-4y+4)\}\{x^2-(y^2+4y+4)\}\\
=&\{x^2-(y-2)^2\}\{x^2-(y+2)^2\}\\
=&\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}\{x+(y+2)\}\{x-(y+2)\}\\
=&\boldsymbol{(x+y-2)(x-y+2)(x+y+2)(x-y-2)}
\end{aligned}
$$

(3) (次数の等しい項でまとめる)

$$\begin{aligned}&x^2y+x^2+x-xy^2-y^2-y\\=&x^2y-xy^2+x^2-y^2+x-y\\=&xy(x-y)+(x+y)(x-y)+(x-y)\\=&(x-y)\{xy+(x+y)+1\}\\=&\boldsymbol{(x-y)(x+1)(y+1)}\end{aligned}$$

II. (1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\boldsymbol{\sqrt{3}+1}$

(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

III. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{19-2\sqrt{48}}=\sqrt{16}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$

ゆえに　$a+b=4-\sqrt{3}\cdots$①

$-2<-\sqrt{3}<-1$ であるから，$2<4-\sqrt{3}<3$　よって　$a=2$

これを ① に代入して　$b=2-\sqrt{3}$

したがって　$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4-\sqrt{3}}$

$$=2+\sqrt{3}+\frac{4+\sqrt{3}}{13}$$

$$=\boldsymbol{\frac{30+14\sqrt{3}}{13}}$$

IV. (1) ① から　$x<8$　$\cdots$③

② から　$x \geqq \dfrac{27}{5}$　$\cdots$④

③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{27}{5} \leqq x < 8}$

(2) $-5<x+2<5$ から　$\boldsymbol{-7<x<3}$

V. 等式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

が成り立つ.

また，a，b が実数であるとき

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$$

したがって，上の 2 式から a，b，c が実数のとき

$a + b + c \geqq 0$ を満たすとき，$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$ が成り立つ.

VI. $\mathrm{BC} = 1$ とするとき，$\mathrm{DB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CD} = 2$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形であるから　$\mathrm{AD} = \mathrm{CD} = 2$

ゆえに　$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DB} = 2 + \sqrt{3}$

さらに　$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

したがって　$\sin 15^\circ = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

$$\cos 15^\circ = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \boldsymbol{2 - \sqrt{3}}$$

VII. (1) $\dfrac{8!}{2!} = \mathbf{2160}$ (通り)

(2) ［1］I 以外の 6 文字から 4 文字を用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15 \text{ (通り)} $$

［2］I を 1 文字と，I 以外の 6 文字から 3 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20 \text{ (通り)} $$

［3］I を 2 文字と，I 以外の 6 文字から 2 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15 \text{ (通り)} $$

よって　$15 + 20 + 15 = \mathbf{50}$ (通り)

(3) ［1］I 以外の 6 文字から 4 文字を用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_4 \times 4! = 15 \times 24 = 360 \text{ (通り)} $$

［2］I を 1 文字と，I 以外の 6 文字から 3 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \times 4! = 20 \times 24 = 480 \text{ (通り)} $$

［3］I を 2 文字と，I 以外の 6 文字から 2 文字用いる場合は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!} = 15 \times 12 = 180 \text{ (通り)} $$

よって　$360 + 480 + 180 = \mathbf{1020}$ (通り)

2.1.2　第5期試験 (一般試験)60分

I. $P(n) = \dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^n}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)}$

について，$P(0)$，$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$ を簡単にしなさい。

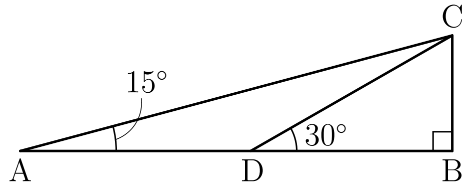
II. $P = ax + by + cz$ について，次のことが成り立つとき，a，b，c の条件を求めよ.
「$x - 2y + z = 0$ かつ $2x + y - 2z = 0$ を満たす x，y，z に対して，
つねに $P = 0$ となる。」

III. 実数 a，b，c が $a + b + c \geqq 0$ を満たすとき，

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqq 0$$

が成り立つことを証明しなさい。

IV. 下の図を利用して，$\sin 15°$，$\cos 15°$，$\tan 15°$ の値をそれぞれ求めよ.
解答は無理数のままでよい。



解答例

I. $P(n)=\dfrac{-a^n(b-c)-b^n(c-a)-c^n(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ であるから

$$Q(n)=-a^n(b-c)-b^n(c-a)-c^n(a-b) \qquad \cdots(*)$$

とおくと

$$P(n)=\frac{Q(n)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \qquad \cdots(**)$$

$Q(n)$ は a，b，c に関する $(n+1)$ 次の対称式である．

$Q(n)$ において $a=b$ を代入すると，$Q(n)=0$ となるので，$Q(n)$ は $a-b$ を因数にもつ．$Q(n)$ は対称式であるから，さらに $b-c$，$c-a$ を因数にもつ．

[0] $n=0$ のとき $Q(n)$ は 1 次式であるから　$Q(0)=0$
$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(0)=0}$

[1] $n=1$ のとき $Q(n)$ は 2 次式であるから　$Q(1)=0$
$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(1)=0}$

[2] $n=2$ のとき $Q(n)$ は 3 次式であるから，$Q(2)$ は定数 k を用いて

$$Q(2)=k(a-b)(b-c)(c-a)$$

と表される．これと $(*)$ の a^2 の係数を比較して，$k=1$ を得る．
$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(2)=1}$

[3] $n=3$ のとき $Q(n)$ は 4 次式であるから，$Q(3)$ は定数 l を用いて

$$Q(3)=l(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

と表される．これと $(*)$ の a^3 の係数を比較して，$l=1$ を得る．
$(**)$ により　　$\boldsymbol{P(3)=a+b+c}$

[4] $n=4$ のとき $Q(n)$ は 5 次式であるから，$Q(4)$ は定数 m_1，m_2 を用いて

$$Q(4)=(a-b)(b-c)(c-a)\{m_1(a^2+b^2+c^2)+m_2(ab+bc+ca)\}$$

と表される．これと $(*)$ の a^4 の係数を比較して，$m_1=1$ を得る．
$a=2$，$b=1$，$c=0$ を上式に代入すると　$-14=-2(5m_1+2m_2)$
$m_1=1$ をこれに代入して　$m_2=1$

$(**)$ により　　$P(4)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$　($n=4$ は参考まで)

II. $x-2y+z=0$，$2x+y-2z=0$ から $\quad \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$

これを t とおいて，P に代入すると $\quad P=(3a+4b+5c)t$

つねに $P=0$ であるためには $\qquad \boldsymbol{3a+4b+5c=0}$

III. 等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

が成り立つ．

また，a，b が実数であるとき

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

したがって，上の 2 式から a，b，c が実数のとき

$a+b+c \geqq 0$ を満たすとき，$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$ が成り立つ．

IV. $\mathrm{BC}=1$ とするとき，$\mathrm{DB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CD}=2$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形であるから $\quad \mathrm{AD}=\mathrm{CD}=2$

ゆえに $\quad \mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=2+\sqrt{3}$

さらに $\quad \mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

したがって $\quad \sin 15^\circ=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos 15^\circ=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

2.1.3　第6期試験 (一般試験)60分

I. 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を導きなさい。

II. $a+b+c=0$，$abc\neq 0$ のとき

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

の値を求めなさい。

III. 数 km 離れた A 地点と B 地点を，行きは時速 a km，帰りは時速 b km で往復するときの平均時速を，a，b を用いて表しなさい。

IV. 実数 x，y，z について次のことを，それぞれ1つの等式で表しなさい。

(1) x，y，z のうち，少なくとも1つは1に等しい。

(2) x，y，z はどれも1に等しい。

(3) x または y は1に等しく，かつ z は1に等しい。

V. 次の不等式を解きなさい。

(1) $|x+2|<5$

(2) $2x^2-5x-3\leqq 0$

(3) $2x^2-2x-1>0$

(4) $x^2+x+1<0$

VI. a，b，c，d を正の数とするとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つことを用いて

$$a+b+c+d\geqq 4\sqrt[4]{abcd}$$

を証明しなさい。

VII. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ のとき，$x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1$ の値を求めなさい。

解答例

I.
$$ax^2+bx+c=0$$

$a \neq 0$ であるから
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ を加えて
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ゆえに
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

よって
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

II. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ より

$a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2(bc+ca+ab)}{3abc}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3abc}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

III. 片道 $l\,\mathrm{km}$ とすると，行きに $\dfrac{l}{a}$ 時間，帰りに $\dfrac{l}{b}$ 時間かかる．ゆえに，往復 $2l\,\mathrm{km}$ に $\left(\dfrac{l}{a}+\dfrac{l}{b}\right)$ 時間要するので，その平均速度は

$$2l\div\left(\frac{l}{a}+\frac{l}{b}\right)=2l\div\frac{l(b+a)}{ab}=\boldsymbol{\frac{2ab}{a+b}}$$

IV. (1) $\boldsymbol{(x-1)(y-1)(z-1)=0}$

(2) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0}$
($|x-1|+|y-1|+|z-1|=0$ なども可)

(3) $\boldsymbol{(x-1)^2(y-1)^2+(z-1)^2=0}$
($|(x-1)(y-1)|+|z-1|=0$ なども可)

V. (1) $-5 < x+2 < 5$ から　$\boldsymbol{-7 < x < 3}$

(2) $(x-3)(2x+1) \leqq 0$ から　$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3}$

(3) $2x^2-2x-1=0$ を解いて　$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

よって，不等式の解は　$\boldsymbol{x < \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} < x}$

(4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 0$ より　**解なし**

VI. $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$，$c+d \geqq 2\sqrt{cd}$ であるから

$$\begin{aligned}(a+b)+(c+d) &\geqq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\\ &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})\\ &\geqq 2\times 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\\ &= 4\sqrt[4]{abcd}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a+b+c+d \geqq 4\sqrt[4]{abcd}}$

VII. $x = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$　$\cdots$①

① から　$x+\sqrt{2} = \sqrt{3}$ の両辺を平方すると

$$x^2+2\sqrt{2}x+2=3$$

$$2\sqrt{2}x = 1-x^2$$

さらに平方して　$8x^2 = 1-2x^2+x^4$

整理すると　$x^4-10x^2+1=0$　$\cdots$②

$x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1 = (x^4-10x^2+1)(x+1)+x$ であるから

これに ①，② を代入して

$$x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1 = \boldsymbol{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

2.2　熊本駅前リハビリテーション専門学校

2.2.1　一般試験 60 分

I. 次の各問に答えよ。

1) 5184 の正の約数は何個ありますか。 【1】

① 24　② 27　③ 16　④ 18　⑤ 19　⑥ 35　⑦ 70

2) $x+\dfrac{1}{x}=2$ のとき $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。 【2】

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6　⑥ 7　⑦ 8

3) 行きは時速 30km，帰りは時速 60km で往復したとき，平均時速は何 km か。 【3】

① 20　② 30　③ 40　④ 45　⑤ 60　⑥ 35　⑦ 70

4) $|x-3|+|x-2| \leqq 6$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。 【4】

① $x<2$　② $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$　③ $2 \leqq x < 3$　④ $3 \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$

⑤ $x \leqq 3$　⑥ $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$　⑦ $x \leqq \dfrac{11}{2}$

5) 2 進法の 11011101 を，2 進法の 1101 で割った商は 10 進法で何か。 【5】

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19　⑥ 20　⑦ 21

6) 底面の半径が r，高さが $2r$ の円錐の体積を V_1，底面の半径が r，高さが $2r$ の円柱の体積を V_2，半径 r の球の体積を V_3 としたとき，$V_1 : V_2 : V_3$ の比はどうなるか。 【6】

① $1:3:2$　② $1:3:1$　③ $1:2:1$　④ $1:2:2$

⑤ $1:3:3$　⑥ $1:2:3$　⑦ $2:2:3$

7) 同一円周上に 7 個の点がある。このうち 3 点を頂点とする三角形はいくつできるか。 【7】

① 210　② 21　③ 15　④ 35　⑤ 135　⑥ 10　⑦ 20

8) 2 次方程式 $(a-1)x^2+ax+1=0$ が重なる解をもつとき，a の値はいくつか。 【8】

① -1　② 0　③ -2　④ 3　⑤ -3　⑥ 2　⑦ 5

9) 三角形 ABC において，$a=9$，$b=8$，$c=7$ のとき，三角形 ABC の面積を求めよ。 【9】

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $6\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{15}$　⑤ $3\sqrt{15}$　⑥ $12\sqrt{5}$　⑦ $\sqrt{15}$

10) $y = x^2 + \sqrt{3}$ のグラフと傾き 1 の平行直線群との交点の中点はつねに定直線上にある。この直線の方程式は次のどれか。 **【10】**

① $y = x$　② $y = x + \sqrt{3}$　③ $y = x + \dfrac{1}{2}$　④ $y = \sqrt{3}$
⑤ $x = \sqrt{3}$　⑥ $x = \dfrac{1}{2}$　⑦ $x = 1$

II. 次の各問に答えよ。

68 人の学生に，A，B，C の 3 つの専門学校の受験状況をたずねたところ，全員が A，B，C のうち少なくとも 1 校は受験していた。また，B と C の両方，C と A の両方，A と B の両方を受験した人数は，それぞれ 25 人，24 人，23 人であり，B と C の少なくとも一方，C と A の少なくとも一方，A と B の少なくとも一方を受験した人数は，それぞれ 65 人，62 人，59 人であった。このとき，以下の設問に答えよ。

1) A 校を受験した学生の人数はいくらか。 **【11】**

① 35　② 36　③ 37　④ 38　⑤ 39　⑥ 40　⑦ 41

2) B 校のみを受験した学生の人数はいくらか。 **【12】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

3) B 校と C 校の両方を受験したが，A 校を受験しなかった人数はいくらか。 **【13】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

4) A，B，C の 3 校すべてを受験した学生の人数はいくらか。 **【14】**

① 3　② 6　③ 9　④ 11　⑤ 12　⑥ 13　⑦ 14

III. 次の問に答えよ。

$$\alpha = \sin\theta + \sin^2\theta + \sin(\theta + 180^\circ) + \sin^2(\theta + 90^\circ)$$
$$\beta = \cos\theta + \cos(\theta + 90^\circ) + \cos(\theta + 180^\circ) + \cos(\theta + 270^\circ)$$
$$\gamma = \cos^2\theta + \cos^2(\theta + 90^\circ) + \cos^2(\theta + 180^\circ) + \cos^2(\theta + 270^\circ)$$

のとき，$\alpha + \beta + \gamma$ の値は次のどれか。 **【15】**

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4

IV. 下記のアイウのそれぞれの 2 条件 (A) と (B) の関係について，次の ①，②，③，④ のうちどの場合が成り立つか。

ア．a は実数とする。 (A) $a < 2$ (B) $a^2 < 4$ 【16】

イ．a は実数とする。 (A) $-2 < a < 2$ (B) $a^4 < a^2$ 【17】

ウ．$a,\ b$ は実数とする。 (A) $|a| < 2,\ |b| < 2$ (B) $|a^2 - b^2| < 4$ 【18】

① 「(A) ならば (B)」,「(B) ならば (A)」がともに正しい。

② 「(A) ならば (B)」は正しいが,「(B) ならば (A)」は正しくない。

③ 「(A) ならば (B)」は正しくないが,「(B) ならば (A)」は正しい。

④ 「(A) ならば (B)」,「(B) ならば (A)」のどちらも正しくない。

解答例

I. 1) $5184 = 2^6 \times 3^4$ したがって，求める正の約数の個数は $7 \times 5 = \mathbf{35}$ 個

2) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2^3 - 3 \cdot 2 = \mathbf{2}$

3) 片道 $l$km とすると，行きに要する時間は $\dfrac{l}{30}$ 時間，帰りに要する時間は $\dfrac{l}{60}$ 時間であるから，往復したときの平均時速は

$$2l \div \left(\frac{l}{30} + \frac{l}{60}\right) = 2l \div \frac{l}{20} = \mathbf{40}$$

4) [1] $x < 2$ のとき $(-x+3) + (-x+2) \leqq 6$

これを解いて $x \geqq -\dfrac{1}{2}$

条件に注意して $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 2$

[2] $2 \leqq x < 3$ のとき

$|x-3| + |x-2| = (-x+3) + (x-2) = 1$

このとき，与えられた不等式を満たす.

[3] $3 \leqq x$ のとき $(x-3) + (x-2) \leqq 6$

これを解いて $x \leqq \dfrac{11}{2}$

条件に注意して $3 \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}$

よって，求める不等式の解は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{11}{2}}$

5) $11011101_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 221$

$1101_{(2)} = 2^3 + 2^2 + 1 = 13$ よって，$221 \div 13 = \mathbf{17}$

(別解) $11011101_{(2)} = (11010000 + 1101)_{(2)} = \{1101 \times (1000 + 1)\}_{(2)}$

よって，求める商は $(10000 + 1)_{(2)} = 2^4 + 1 = \mathbf{17}$

6) $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r = \dfrac{2}{3}\pi r^3$，$V_2 = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$，$V_3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

したがって $V_1 : V_2 : V_3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 : \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \mathbf{1 : 3 : 2}$

7) 異なる 7 個の点から 3 個とる組合せであるから ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{35}$

8) 2 次方程式であるから $a - 1 \neq 0$ ゆえに $a \neq 1$

この 2 次方程式が重解をもつための条件は $D = 0$ であるから

$$a^2 - 4(a-1) \cdot 1 = 0$$

整理して $(a-2)^2 = 0$

$a \neq 1$ に注意して $\boldsymbol{a = 2}$

9) (ヘロンの公式を用いる．)

$2s = 9 + 8 + 7$ これより $s = 12$

よって $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)} = \mathbf{12\sqrt{5}}$

10) 直線の方程式を $y = x + k$ (k は定数) とする．この直線の方程式と $y = x^2 + \sqrt{3}$ から y を消去すると

$$x^2 - x + \sqrt{3} - k = 0 \quad \cdots ①$$

となる．共有点が存在するためには，係数について

$$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3} - k) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad k \geqq \sqrt{3} - \frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

① の 2 つの解を α，β とすると，2 つの共有点の中点の座標は

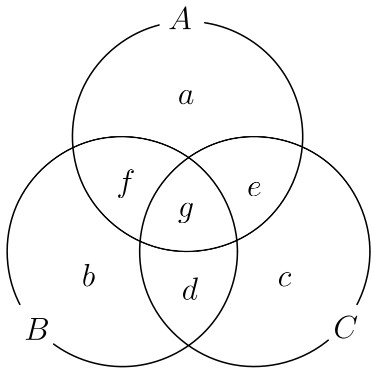
$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2},\ \frac{\alpha + \beta}{2} + k\right)$$

① の解と係数の関係から $\alpha + \beta = 1$

よって，中点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} + k\right)$

② より，求める中点の軌跡は 直線 $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$ $\left(y \geqq \sqrt{3} + \dfrac{1}{4}\right)$

II. 右図のベン図のように人数をおくと



$n(A \cup B \cup C) = a+b+c+d+e+f+g = 68$
$n(B \cap C) = d + g = 25$
$n(C \cap A) = e + g = 24$
$n(A \cap B) = f + g = 23$
$n(B \cup C) = 68 - a = 65$
$n(C \cup A) = 68 - b = 62$
$n(A \cup B) = 68 - c = 59$
第 5 式から第 7 式より　$a = 3$，$b = 6$，$c = 9$
第 2 式から第 5 式より　$d = 25 - g \cdots$ ①，$e = 24 - g \cdots$ ②，$f = 23 - g \cdots$ ③
これらを第 1 式に代入して

$$3 + 6 + 9 + (25 - g) + (24 - g) + (23 - g) + g = 68$$

これを解いて　$g = 11 \cdots$ ④
④ を ①，②，③ に代入して　$d = 14$，$e = 13$，$f = 12$

1) $n(A) = a + e + f + g = 3 + 13 + 12 + 11 = \mathbf{39}$ (人)
2) ベン図より　$b = \mathbf{6}$ (人)
3) ベン図より　$d = \mathbf{14}$ (人)
4) $n(A \cap B \cap C) = g = \mathbf{11}$ (人)

III.

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin\theta + \sin^2\theta + \sin(\theta + 180^\circ) + \sin^2(\theta + 90^\circ)\\ &= \sin\theta + \sin^2\theta - \sin\theta + \cos^2\theta\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \cos\theta + \cos(\theta + 90^\circ) + \cos(\theta + 180^\circ) + \cos(\theta + 270^\circ)\\ &= \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta + \sin\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \cos^2\theta + \cos^2(\theta + 90^\circ) + \cos(\theta + 180^\circ) + \cos^2(\theta + 270^\circ)\\ &= \cos^2\theta + (-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\\ &= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2\end{aligned}$$

したがって　$\alpha + \beta + \gamma = 1 + 0 + 2 = \mathbf{3}$

IV. ア. $a^2 < 4$ を解いて $-2 < a < 2$

よって (B) $\Longrightarrow$ (A)

イ. $a^4 < a^2$ を解いて $-1 < a < 0,\ 0 < a < 1$

よって (B) $\Longrightarrow$ (A)

ウ. $|a| < 2,\ |b| < 2$ のとき $0 < a^2 < 4,\ -4 < -b^2 < 0$

ゆえに $-4 < a^2 - b^2 < 4$ すなわち $|a^2 - b^2| < 4$ が成り立つ.

逆に, $a = 3,\ b = \sqrt{7}$ は $|a^2 - b^2| < 4$ を満たすが,

$|a| < 2,\ |b| < 2$ を満たさない.

よって (A) $\Longrightarrow$ (B)

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
⑥	①	③	⑥	③
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
①	④	⑥	⑥	⑥
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
⑤	②	⑦	④	⑥
【16】	【17】	【18】		
③	③	②		

2.3 九州中央リハビリテーション学院

2.3.1 一般試験

[1] $a = \dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$ の小数部分を b とするとき，

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}$，$a^3 + b^3 = \boxed{4}\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}$ となる．

[2] 関数 $y = -(x^2+4x+6)^2 + 2(x^2+4x+6) + 3 \cdots$ ① について，

$x^2 + 4x + 6 = t$ とおく．このとき t の最小値が $\boxed{7}$ であることより，① の最大値は $\boxed{8}$ となる．

[3] 次の $\boxed{9}$ ～ $\boxed{12}$ にあてはまるものを，下の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ．

(1) $x = 1$ であることは，$x^2 = 1$ であるための $\boxed{9}$．

(2) $ab + 3 = 2a + 2b$ であることは，$a = 1$ かつ $b = 1$ であるための $\boxed{10}$．

(3) $a + b$，ab が有理数であることは，a，b が有理数であるための $\boxed{11}$．

(4) 2 次不等式 $x^2 + 2ax + 2a + 3 > 0$ がすべての x について成り立つことは，$|a-1| < 2$ であるための $\boxed{12}$．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

[4] 2 次不等式 $x^2 - 3x - 4 < 0 \cdots$ ①，$x^2 - (a+5)x + 5a < 0 \cdots$ ② において，① を満たす x の範囲は $-\boxed{13} < x < \boxed{14}$ となる．このとき，①，② を同時に満たす整数 x が 2 つ存在するときの a の値の範囲は $\boxed{15} \leqq a < \boxed{16}$ となる．また，② を満たす実数 x が存在しないとき，$a = \boxed{17}$ である．

[5] 三角形 ABC において，AB $= 5$，AC $= 3$，$\angle$BAC $= 120^\circ$ とする．このとき，BC $= \boxed{18}$，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{19}\boxed{20}\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$ であり，三角形 ABC に内接する円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ となる．

また，三角形 ABC に外接する円において，弦 BC に対して点 A と反対側に点 P をとるとき，四角形 ABPC の面積の最大値は $\boxed{25}\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}}$ となる．

[6] $medical$ の 7 文字を 1 列に並べるとき

(1) 並べ方は全部で $\boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}\boxed{31}$ 通りある．

(2) m，d，l がとなり合わない並び方は $\boxed{32}\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}$ 通りある．

(3) m，d，l がこの順に並ぶ並び方は $\boxed{36}\boxed{37}\boxed{38}$ 通りある．

解答例

[1] $a=\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\sqrt{7}+2$

$2<\sqrt{7}<3$ であるから $4<\sqrt{7}+2<5$ となり，a の整数部分は 4,

小数部分 b は $b=a-4=(\sqrt{7}+2)-4=\sqrt{7}-2$ であるから

$$a+b=(\sqrt{7}+2)+(\sqrt{7}-2)=2\sqrt{7}$$
$$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$$

したがって　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}$

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=(2\sqrt{7})^3-3\cdot3\cdot2\sqrt{7}\\&=56\sqrt{7}-18\sqrt{7}=\boldsymbol{38\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(答) $\boxed{1}$ 2　$\boxed{2}$ 7　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 3　$\boxed{5}$ 8　$\boxed{6}$ 7

[2] $t=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$

ゆえに，t の最小値は　**2**

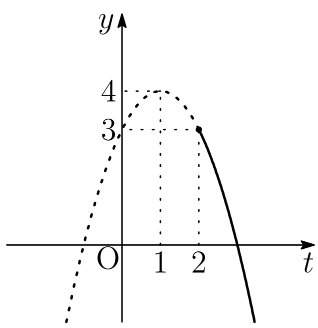
y を t を用いて表すと

$$y=-t^2+2t+3\quad(t\geqq2)$$

よって　$\qquad=-(t-1)^2+4$

したがって，y の最大値は　**3**

(答) $\boxed{7}$ 2　$\boxed{8}$ 3



[3] (1) $x=1 \quad \Longrightarrow \quad x^2=1$ したがって **十分条件**
(必要条件ではない $[x=-1]$)

(2) $ab+3=2a+2b \quad \Longleftarrow \quad a=1$ かつ $b=1$ したがって **必要条件**
(十分条件ではない $[a=3,\ b=3]$)

(3) $a+b,\ ab$ が有理数 $\quad \Longleftarrow \quad a,\ b$ が有理数 したがって **必要条件**
(十分条件ではない $[a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{2}]$)

(4) 2 次不等式 $x^2+2ax+2a+3>0$ がすべての x について成り立つとき，
x^2 の係数が正であるから，$D<0$ を満たせばよい．

$D/4<0$ より $\quad a^2-1\cdot(2a+3)<0$
整理して $\quad a^2-2a-3<0$
ゆえに $\quad (a+1)(a-3)<0$
よって $\quad -1<a<3 \quad \cdots$①

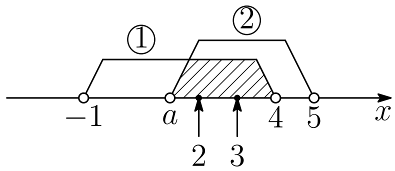
$|a-1|<2$ を解くと
$$-2<a-1<2 \quad \text{すなわち} \quad -1<a<3 \quad \cdots ②$$
①，② から **必要十分条件**

(答) $\boxed{9}$ 2 $\boxed{10}$ 1 $\boxed{11}$ 1 $\boxed{12}$ 0

[4] $x^2-3x-4<0\cdots$①，$x^2-(a+5)x+5a<0\cdots$②

① から $\quad (x+1)(x-4)<0$
よって $\quad \boldsymbol{-1<x<4}$

② から $\quad (x-a)(x-5)<0\cdots$③
① と ② を同時に満たす整数 x が 2 つ存在するとき，その整数は 2，3 である．このとき，a の値の範囲は $\quad \boldsymbol{1 \leqq a < 2}$



② を満たす実数 x が存在しないとき，③ より $\quad \boldsymbol{a=5}$

(答) $\boxed{13}$ 1 $\boxed{14}$ 4 $\boxed{15}$ 1 $\boxed{16}$ 2 $\boxed{17}$ 5

[5] △ABC に余弦定理を適用して

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 3^2 + 5^2 - 2{\cdot}3{\cdot}5\cos 120^\circ$$
$$= 9 + 25 - 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

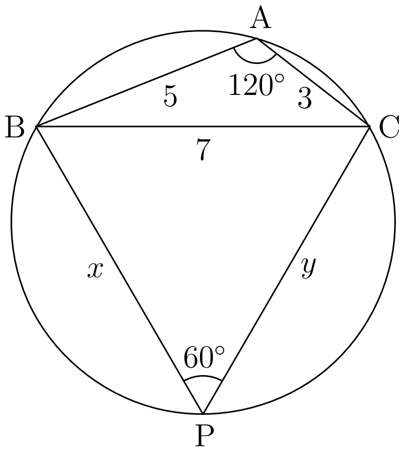
BC > 0 より　$\mathbf{BC = 7}$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}5\sin 120^\circ = \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$$

$2s = a + b + c = 7 + 3 + 5$ とすると

$$s = \frac{15}{2}$$



△ABC の内接円の半径を r とすると，
$S = rs$ により

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = r{\cdot}\frac{15}{2}$$

よって　　$r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

四角形 ABPC は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{BPC} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$$

BP $= x$，PC $= y$ とおいて，△BPC に余弦定理を適用すると

$$7^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ$$

整理して　　$49 = x^2 - xy + y^2$

ゆえに　　$xy = 49 - (x - y)^2 \quad \cdots ①$

△BPC の面積は

$$\triangle\mathrm{BPC} = \frac{1}{2}xy\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad \cdots ②$$

四角形 ABPC の面積が最大となるのは，△BPC の面積が最大となるときであるから

①，② より，$x = y$ のとき最大となる．このとき，△BPC $= \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$

したがって，四角形 ABPC の面積の最大値は　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4} + \dfrac{49\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{16\sqrt{3}}$

(答) $\boxed{18}$ 7　$\boxed{19}$ 1　$\boxed{20}$ 5　$\boxed{21}$ 3　$\boxed{22}$ 4　$\boxed{23}$ 3　$\boxed{24}$ 2　$\boxed{25}$ 1　$\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 3

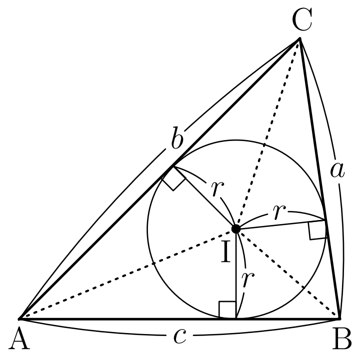
内接円の半径

三角形ABCの内接円の中心をI，内接円の半径をr，$2s = a + b + c$ とする．このとき，△IBC，△ICA，△IABの面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar,\quad \frac{1}{2}br,\quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形ABCの面積をSとすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs \end{aligned}$$



[6] (1) 異なる7文字の並べ方であるから

$$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{5040}\ (\text{通り})$$

(2) m，d，l以外の4文字を一列に並べる並べ方は　○○○○

$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$$

m，d，lの並べ方は，右の図のように　|○|○|○|○|

5ヶ所の｜に3ヶ所を選んで並べる方法であるから

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$$

求める並べ方の総数は，積の法則により　$24 \times 60 = \mathbf{1440}$　(通り)

(3) e，i，c，a，○，○，○を並べるときに，○には順に，m，d，lを並べればよいので，求める並べ方の総数は

$$\frac{7!}{3!} = \mathbf{840}\quad (\text{通り})$$

(答) $\boxed{28}$ 5　$\boxed{29}$ 0　$\boxed{30}$ 4　$\boxed{31}$ 0　$\boxed{32}$ 1　$\boxed{33}$ 4　$\boxed{34}$ 4　$\boxed{35}$ 0
$\boxed{36}$ 8　$\boxed{37}$ 4　$\boxed{38}$ 0

2.4 西日本リハビリテーション学院

2.4.1 一般前期試験 (昼間部・夜間部)

[A] x の方程式 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$ について，$x=0$ は解ではなく，$X=x+\dfrac{1}{x}$ についての方程式に書き直すと $X^2+pX+q=0$ となる。
ここで $p=\boxed{\text{問 1}}$，$q=\boxed{\text{問 2}}$ である。また，もとの方程式の実数解について，それを越えない最大の整数の値は $\boxed{\text{問 3}}$ または $\boxed{\text{問 4}}$ である。

問 1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-1	-2	-3	-4	-5	-6

問 3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-1	0	1	2	3	4

問 4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-7	-6	-5	-4	-3	-2

[B] 2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ の $a \leqq x \leqq a+2$ における最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とし，$g(a) = \dfrac{M(a)+m(a)}{2}$ とする。このとき $g(0) =$ $\boxed{\text{問 5}}$，$g(1) =$ $\boxed{\text{問 6}}$ であり，$g(a) = a^2 - 2a + 4$ となるような a の値の範囲は $a \leqq$ $\boxed{\text{問 7}}$ または $\boxed{\text{問 8}}$ $\leqq a$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 5	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 6	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	-3	-2	-1	0	1	2

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	-2	-1	0	1	2	3

[C] x の方程式 $|9-x^2|=x+k$ の実数解について考える。
ちょうど 1 個の実数解をもつような k の値は $\boxed{\text{問 9}}$ で，そのときの解は $x=\boxed{\text{問 10}}$ である。
ちょうど 3 個の実数解をもつような k の値は $\boxed{\text{問 11}}$ または $\boxed{\text{問 12}}$ で，$k=\boxed{\text{問 11}}$ のときの 3 解の積は $\boxed{\text{問 13}}$ である。
ただし，$\boxed{\text{問 11}} < \boxed{\text{問 12}}$ である。

問 9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-9	-6	-3	3	6	9

問 10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-9	-6	-3	3	6	9

問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-9	-6	-3	3	6	9

問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{37}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{41}{4}$	$\frac{43}{4}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{47}{4}$

問 13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-36	-24	-12	12	24	36

[D] (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=\boxed{\text{問 14}}$，$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}$ である。

(2) 四角形 ABCD において，
$AB=\sqrt{3}-1$，$BC=CD=\sqrt{2}$，$DA=2$，$\angle A=120^\circ$ であるとき，
BD の長さは $\boxed{\text{問 16}}$，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{問 17}}$ である。

問 14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$-\dfrac{3}{5}$	$-\dfrac{2}{5}$	$-\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

問 15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$-\dfrac{65}{2}$	$-\dfrac{65}{4}$	$-\dfrac{65}{8}$	$\dfrac{65}{8}$	$\dfrac{65}{4}$	$\dfrac{65}{2}$

問 16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}+1$

問 17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{3}{2}$

[E] 1，2，3，4，5，6，7から異なる5個の数字を取って並べ5桁の整数をつくる。このような数は全部で 問18 通りでき，このうち千の位と一の位の数字がともに偶数であるものは 問19 通り，また4の倍数は 問20 通りである。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問18	1260	1440	1800	1960	2100	2520

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問19	240	360	480	600	720	840

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問20	240	360	480	600	720	840

[F] 3個のサイコロを同時に投げて，出た目を a，b，c とする。
$T=(a-2)(b-2)(c-2)$ とおくとき，$T=0$ となる確率は 問21，
$T>0$ となる確率は 問22，$T>2$ となる確率は 問23 である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問22	$\frac{41}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{71}{216}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{101}{216}$	$\frac{121}{216}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問23	$\frac{19}{54}$	$\frac{23}{54}$	$\frac{25}{54}$	$\frac{29}{54}$	$\frac{31}{54}$	$\frac{35}{54}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問24	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$

解答例

[A] $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0\cdots$ ① について，$x \neq 0$ より両辺を x^2 で割ると

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=X$，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=X^2-2$ であるから

$$(X^2-2)+2X-1=0 \quad \text{すなわち} \quad X^2+\mathbf{2}X\mathbf{-3}=0$$

これを解いて　$X=1,-3$

$x+\dfrac{1}{x}=1$　すなわち　$x^2-x+1=0$ は実数解をもたない.

$x+\dfrac{1}{x}=-3$　すなわち　$x^2+3x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$$-\frac{1}{2}=\frac{-3+\sqrt{4}}{2}<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<\frac{-3+\sqrt{9}}{2}=0$$
$$-3=\frac{-3-\sqrt{9}}{2}<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<\frac{-3-\sqrt{4}}{2}=-\frac{5}{2}$$

よって，① の実数解で，それを越えない最大の整数は　$\mathbf{-1,\ -3}$

(答) 問 1 [2]　問 2 [3]　問 3 [1]　問 4 [5]

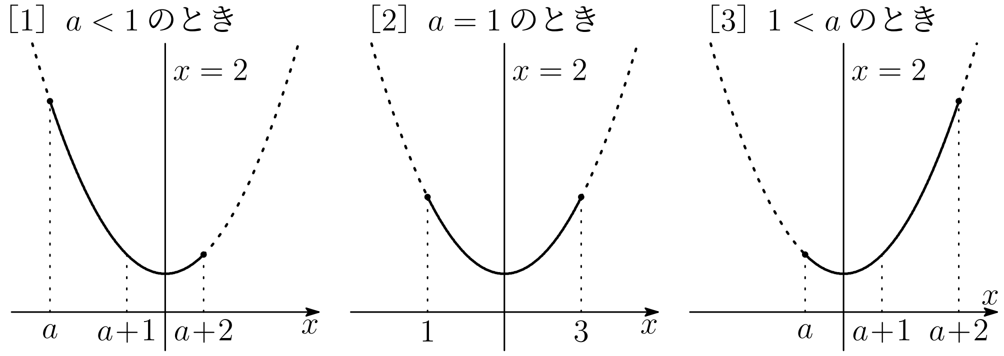
[B] $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x=2$ である．$a \leqq x \leqq a+2$ の中央は　$x=a+1$

最大値 $M(a)$ は，次の3つの場合に分けて求める．

[1] $a+1<2$　すなわち　$a<1$ のとき
$x=a$ で最大値をとるから　$M(a)=f(a)=a^2-4a+6$

[2] $a+1=2$　すなわち　$a=1$ のとき
$x=1,\ 3$ で最大値をとるから　$M(a)=f(1)=f(3)=3$

[3] $2<a+1$　すなわち　$1<a$ のとき
$x=a+2$ で最大値をとるから　$M(a)=f(a+2)=a^2+2$

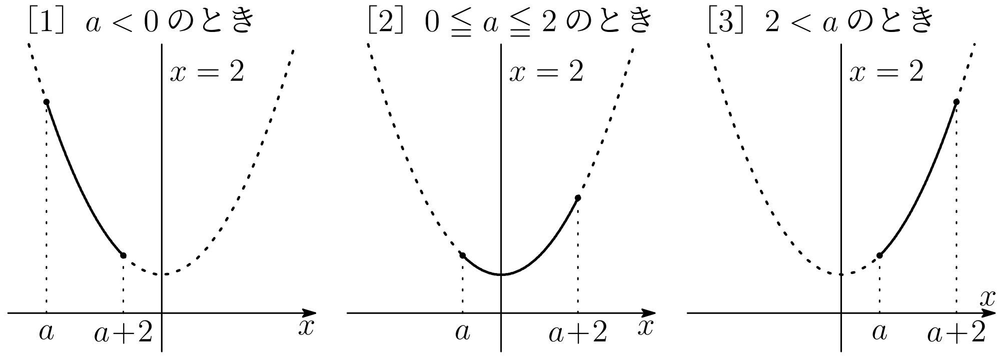


最小値 $m(a)$ は，次の3つの場合に分けて求める．

[1] $a+2<2$　すなわち　$a<0$ のとき
$x=a+2$ で最小値をとるから　$m(a)=f(a+2)=a^2+2$

[2] $a \leqq 2 \leqq a+2$　すなわち　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
$x=2$ で最小値をとるから　$m(a)=f(2)=2$

[3] $2<a$ のとき
$x=a$ で最小値をとるから　$m(a)=f(a)=a^2-4a+6$



$g(a) = \dfrac{M(a)+m(a)}{2}$ であるから

$a < 0$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2-4a+6)+(a^2+2)}{2} = a^2-2a+4$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2-4a+6)+2}{2} = \dfrac{1}{2}a^2-2a+4$

$1 \leqq a < 2$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2+2)+2}{2} = \dfrac{1}{2}a^2+2$

$2 \leqq a$ のとき　$g(a) = \dfrac{(a^2+2)+(a^2-4a+6)}{2} = a^2-2a+4$

したがって，$g(0) = \mathbf{4}$，$g(1) = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

また，$g(a) = a^2-2a+4$ となる a の値の範囲は　$a \leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{2} \leqq a$

(答) 問5 [6]　問6 [3]　問7 [4]　問8 [5]

[C] 方程式 $|9-x^2| = x+k$ の実数解の個数は，曲線 $y = |9-x^2|$ と直線 $y = x+k$ の共有点の個数である．

ちょうど1個の実数解をもつのは，直線が点 $(3,\ 0)$ を通るときであるから (図:2.1)

$0 = 3+k$　すなわち　$k = \mathbf{-3}$，このときの解は　$\mathbf{3}$

ちょうど3個の実数解をもつのは，直線が点 $(-3,\ 0)$ を通るか，$-3 < x < 3$ において曲線と直線が接する (方程式は重解をもつ) ときである (図:2.2).

直線が点 $(-3,\ 0)$ を通るとき　$0 = -3+k$　すなわち　$k = \mathbf{3}$

$|9-x^2| = x+k \ \ (-3 < x < 3)$ が重解をもつとき，方程式 $x^2+x+k-9 = 0$ の係数について

$1^2-4\cdot1(k-9) = 0$　すなわち　$k = \dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{4}}$

また，$k = 3$ のとき，方程式 $|9-x^2| = x+3 \cdots$ ① の解は

[1] $9-x^2 \geqq 0$　すなわち　$-3 \leqq x \leqq 3$ のとき
　$9-x^2 = x+3$ を解いて　$x = -3,\ 2$

[2] $9-x^2 < 0$　すなわち　$x < -3,\ 3 < x$ のとき
　$-(9-x^2) = x+3$ を解いて　$x = 4$

したがって，方程式 ① を解いて　$x = -3,\ 2,\ 4$

よって，これらの解の積は　$-3\cdot2\cdot4 = \mathbf{-24}$

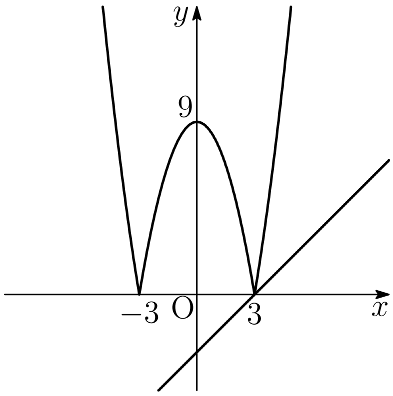


図 2.1: 共有点が1個

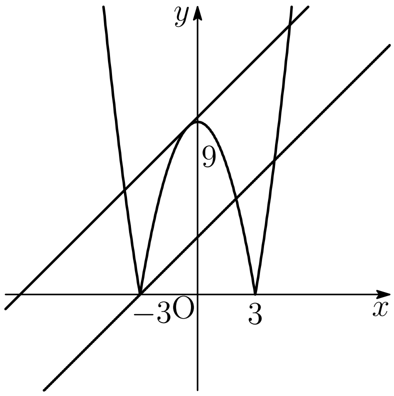


図 2.2: 共有点が3個

(答) 問9 [3] 問10 [4] 問11 [4] 問12 [1] 問13 [2]

[D] (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

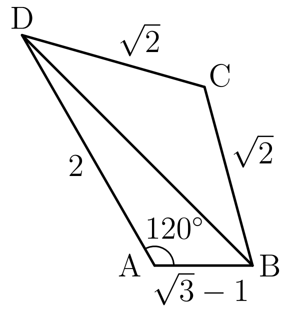
よって $$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$$

したがって $$\sin\theta\cos\theta=-\boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

ここで $$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=1\div\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}$$

ゆえに $$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$
$$=\left(-\frac{5}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\boldsymbol{\frac{65}{8}}$$

(2) △ABD に余弦定理を適用して



$$
\begin{aligned}
BD^2 &= 2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 \\
&\qquad - 2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cos 120^\circ \\
&= 4 + (4-2\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3}-1) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

BD > 0 であるから　$BD = \boldsymbol{\sqrt{6}}$

△BCD に余弦定理を適用して

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに　$C = 120^\circ$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}-1)\sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}\sin 120^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

(答) 問 14 [2]　問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [6]

[E] (1，2，3，4，5，6，7 から 5 個の数字をとって並べる 5 桁の整数の個数)

7 個から 5 個とる順列であるから　${}_7P_5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = \mathbf{2520}$ (通り)

(千の位と一の位の数字がともに偶数である整数の個数)

千の位と一の位は，2，4，6 の 3 個から 2 個取る順列であるから

${}_3P_2$ 通り

そのおのおのについて，万，百，十の位は，残りの 5 個の数字から 3 個とる順列で　${}_5P_3$ 通り

求める場合の数は，積の法則により　${}_3P_2 \times {}_5P_3 = 3\cdot 2 \times 5\cdot 4\cdot 3 = \mathbf{360}$ (通り)

(4 の倍数の個数)

4 の倍数であるためには，下 2 桁が 4 の倍数であればよいから，その下 2 桁は

12，16，24，32，36，52，56，64，72，76 の 10 通り

そのおのおのについて，万，千，百の位は，残りの 5 個の数字から 3 個とる順列で　$_5\mathrm{P}_3$ 通り

求める場合の数は，積の法則により　$10 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 10 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{600}$ (通り)

(答) 問 18 [6]　問 19 [2]　問 20 [4]

[F] $T \neq 0$ となるのは，$a \neq 2$，$b \neq 2$，$c \neq 2$ の場合で　$P(T \neq 0) = \dfrac{5^3}{6!} = \dfrac{125}{216}$

ゆえに　$P(T = 0) = 1 - P(T \neq 0) = 1 - \dfrac{125}{216} = \mathbf{\dfrac{91}{216}}$

$T > 0$ となるのは，a，b，c がすべて 3 以上であるか，a，b，c のどれか 1 つだけが 3 以上で残りの 2 つがともに 1 の場合であるから

$$P(T > 0) = \frac{4^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot 4}{6^3} = \frac{76}{216} = \mathbf{\frac{19}{54}}$$

$T = 1$ となるのは，a，b，c がすべて 3 であるか，a，b，c のどれか 1 つだけが 3 で残りの 2 つがともに 1 の場合であるから

$$P(T = 1) = \frac{1 + {}_3\mathrm{C}_1}{6^3} = \frac{4}{216}$$

$T = 2$ となるのは，a，b，c のどれか 1 つだけが 4 で残りの 2 つがともに 3 またはともに 1 の場合であるから

$$P(T = 2) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot 2}{6^3} = \frac{6}{216}$$

よって　$P(T > 2) = P(T > 0) - \{P(T = 1) + P(T = 2)\}$

$$= \frac{76}{216} - \left(\frac{4}{216} + \frac{6}{216}\right) = \mathbf{\frac{11}{36}}$$

(答) 問 21 [4]　問 22 [1]　問 23 [3]

2.4.2 一般後期試験 (昼間部・夜間部)

[A] (1) $\sqrt{7}$ の小数部分を γ とするとき，$\dfrac{3}{\gamma}-\gamma$ は整数であり，その値は $\boxed{\text{問 1}}$ である。

(2) 不等式 $a(x+2)+b(x-1)>0$ をみたす x の範囲が $x<\dfrac{1}{2}$ であるとき，$b=\boxed{\text{問 2}}\,a$ であり，$b(x+2)+a(x-1)<0$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{問 3}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 1	2	3	4	5	6	7

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 2	2	3	4	5	6	7

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 3	$x<-\dfrac{5}{2}$	$x<-\dfrac{3}{2}$	$x<-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}<x$	$-\dfrac{3}{2}<x$	$-\dfrac{5}{2}<x$

[B] 実数 x，y，z が $x+y+3z-19=0$，$3x-y+z-13=0$，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ をみたしながらうごくとき，$x^2+y^2+z^2 = 6x^2 -$ $\boxed{\text{問 4}}$ $x+$ $\boxed{\text{問 5}}$ であり，x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{問 6}} \leqq x \leqq \boxed{\text{問 7}}$ である。したがって，$x^2+y^2+z^2$ の最大値は $\boxed{\text{問 8}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 4	6	12	18	24	30	36

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 5	49	59	69	79	89	99

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 6	1	2	3	4	5	6

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	7	8	9	10	11	12

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	121	131	141	151	161	171

[C] 整数 m，n を係数とする x の 2 次方程式 $x^2 - mx + n = 0$ の 2 つの解 α，β は実数であり $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たしている。

$m = 4$ のとき，n の値は $\boxed{\text{問 9}}$ 通り，$m \leqq 10$ のとき，m，n の組は $\boxed{\text{問 10}}$ 通りあり，$m = 3$ のとき，$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{問 11}}$，またこのとき β^4 の小数第 1 位を四捨五入した値は $\boxed{\text{問 12}}$ である。

問 9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	10	15	21	28	36	45

問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	46	47	48	49	50	51

[D] 三角形 ABC において，$AB = 2\sqrt{5}$，$BC = 5$，$CA = 5$ とする。また，A から BC に下ろした垂線を AH とし，AH を直径とする円と AB との交点を B′，AC との交点を C′ とする。このとき，AH，BH の長さは順に $\boxed{\text{問 13}}$，$\boxed{\text{問 14}}$ であり，AB′，AC′ の長さは順に $\boxed{\text{問 15}}$，$\boxed{\text{問 16}}$ である。また，△AB′C′ の面積は $\boxed{\text{問 17}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 13	$\sqrt{5}$	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 15	$\frac{6}{\sqrt{5}}$	$\frac{7}{\sqrt{5}}$	$\frac{8}{\sqrt{5}}$	$\frac{9}{\sqrt{5}}$	$\frac{11}{\sqrt{5}}$	$\frac{12}{\sqrt{5}}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 16	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{17}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 17	$\frac{64}{25}$	$\frac{96}{25}$	$\frac{112}{25}$	$\frac{128}{25}$	$\frac{142}{25}$	$\frac{176}{25}$

[E] A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字から異なる 4 文字を取り出して一列に並べ文字列をつくる。全部で $\boxed{\text{問 18}}$ 通りの文字列ができ，このうち，A と B が隣り合う文字列は $\boxed{\text{問 19}}$ 通りある。また，できる文字列を辞書式に並べるとき，CAFE は $\boxed{\text{問 20}}$ 番目にくる。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 18	960	1080	1200	1320	1440	1680

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	180	210	240	270	300	330

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	430	432	434	436	438	440

[F] 赤玉 5 個，白玉 4 個，青玉 3 個が入っている袋から，無作為に 3 個の玉を取り出す。このとき，3 個とも赤玉である確率は $\boxed{\text{問 21}}$，3 個とも色が異なる確率は $\boxed{\text{問 22}}$，3 個の色が 2 種類である確率は $\boxed{\text{問 23}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 21	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{3}{22}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\frac{23}{44}$	$\frac{25}{44}$	$\frac{27}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{31}{44}$	$\frac{33}{44}$

解答例

[A] (1) $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ より，$\sqrt{7}$ の整数部分が 2 であるから

$\sqrt{7}=2+\gamma$　ゆえに　$\gamma=\sqrt{7}-2$

したがって
$$\begin{aligned}\frac{3}{\gamma}-\gamma&=\frac{3}{\sqrt{7}-2}-(\sqrt{7}-2)\\&=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}-\sqrt{7}+2\\&=(\sqrt{7}+2)-\sqrt{7}+2=\mathbf{4}\end{aligned}$$

(2)
$$a(x+2)+b(x-1)>0$$

すなわち　$(a+b)x>-2a+b$

この不等式の解が $x<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$a+b<0,\quad \frac{-2a+b}{a+b}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\boldsymbol{b=5a}$，$a<0$

上の条件から，不等式 $b(x+2)+a(x-1)<0$ の解は

$$\begin{aligned}5a(x+2)+a(x-1)&<0\\5(x+2)+(x-1)&>0\\6x&>-9\\\boldsymbol{x}&\boldsymbol{>-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(答) 問 1 [3]　問 2 [4]　問 3 [5]

[B]

$$x+y+3z-19=0 \quad \cdots ①$$

$$3x-y+z-13=0 \quad \cdots ②$$

①，② を加えて　$4x+4z-32=0$

ゆえに　$z=8-x \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して　$x+y+3(8-x)-19=0$

ゆえに　$y=2x-5 \quad \cdots ④$

$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ であるから，③，④ より

$8-x \geqq 1$ かつ $2x-5 \geqq 1$　ゆえに　$\mathbf{3 \leqq \boldsymbol{x} \leqq 7} \quad \cdots ⑤$

③，④ より

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^2+(2x-5)^2+(8-x)^2 \\ &= 6x^2-\mathbf{36}x+\mathbf{89} \\ &= 6(x^2-6x)+89 \\ &= 6\{(x-3)^2-3^2\}+89 \\ &= 6(x-3)^2+35 \end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲において，$x=7$ で**最大値 131** をとる．

(答) 問 4 [6]　問 5 [5]　問 6 [3]　問 7 [1]　問 8 [2]

[C] $f(x) = x^2 - mx + n$ とおく．
2 次方程式 $f(x) = 0$ の解 α，β が $0 < \alpha < 1 < \beta$ をみたすとき

$$f(0) > 0,\quad f(1) < 0$$

$f(0) > 0$ から　　$n > 0$　　$\cdots$①
$f(1) < 0$ から　　$n < m - 1$　$\cdots$②

①，② をみたす整数 m，n の組は，$m \leqq 10$ について

$m = 3$ のとき	$n = 1$	の 1 通り
$m = 4$ のとき	$n = 1, 2$	の **2** 通り
$m = 5$ のとき	$n = 1, 2, 3$	の 3 通り
$m = 6$ のとき	$n = 1, 2, 3, 4$	の 4 通り
$m = 7$ のとき	$n = 1, 2, 3, 4, 5$	の 5 通り
$m = 8$ のとき	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$	の 6 通り
$m = 9$ のとき	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$	の 7 通り
$m = 10$ のとき	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	の 8 通り

したがって　$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \mathbf{36}$ 通り

$m = 3$ のとき $n = 1$ であるから，α，β は方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解で

仮定より　　$\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

ゆえに　　$\alpha + \beta = 3$，$\alpha\beta = 1$

したがって　　$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2\cdot 1 = \mathbf{7}$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 7^2 - 2\cdot 1^2 = 47 \quad \cdots ①$$

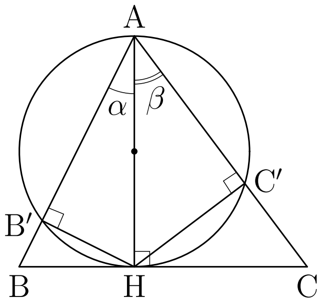
ここで，$\dfrac{1}{2} - \alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{2} > 0$ であるから

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}\quad \text{これから}\quad 0 < \alpha^4 < \frac{1}{16} \quad \cdots ②$$

①，② より，β^4 の小数第 1 位を四捨五入した値は　**47**

(答) 問 9 [2]　問 10 [5]　問 11 [4]　問 12 [2]

[D] △ABC に余弦定理を適用して



$$\cos C = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}} = \frac{5^2 + 5^2 - (2\sqrt{5})^2}{2\cdot 5\cdot 5} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

ゆえに　$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\sin C = 5 \times \frac{4}{5} = \mathbf{4}$

$\mathrm{HC} = \mathrm{AC}\cos C = 5 \times \frac{3}{5} = 3$

したがって　$\mathrm{BH} = \mathrm{BC} - \mathrm{HC} = 5 - 3 = \mathbf{2}$

$\angle\mathrm{BAH} = \alpha$，$\angle\mathrm{CAH} = \beta$ とおくと

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}$$

B′，C′ は AH を直径とする円周上の点であるから　$\angle\mathrm{AB'H} = \angle\mathrm{AC'H} = 90^\circ$

よって　$\mathrm{AB'} = \mathrm{AH}\cos\alpha = 4 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{8}{\sqrt{5}}}$

$\mathrm{AC'} = \mathrm{AH}\cos\beta = 4 \times \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{16}{5}}$

△ABC に正弦定理を適用して　$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

ゆえに　$\sin A = \frac{\mathrm{BC}\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AB}} = 5 \times \frac{4}{5} \div 2\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

したがって，△AB′C′ の面積は

$$\triangle\mathrm{AB'C'} = \frac{1}{2}\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\sin\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{16}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{128}{25}}$$

(答) 問 13 [5]　問 14 [2]　問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [4]

[E] A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字から異なる 4 文字取り出して一列に並べる方法は

$${}_8\mathrm{P}_4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = \mathbf{1680}\ (\text{通り})$$

(A，B が隣り合う文字列の個数)

A，B のひとまとめと残りの 6 文字から 2 文字取り出して並べる方法は

$${}_6\mathrm{C}_2 \times 3!\ (\text{通り})$$

A と B が隣り合う並び方は　$2!$ (通り)

したがって，A と B が隣り合うこれらの文字列の総数は

$${}_6\mathrm{C}_2 \times 3! \times 2! = \mathbf{180}\ (\text{通り})$$

(CAFE の順番)

文字列を辞書式に並べると

A □□□型の文字列は　${}_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot6\cdot5 = 210$ (個)

B □□□型の文字列は　${}_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot6\cdot5 = 210$ (個)

CAB □型の文字列は　5 (個)

CAD □型の文字列は　5 (個)

CAE □型の文字列は　5 (個)

これに続く文字列は　CAFB，CAFD，CAFE

したがって，CAFE は　$210 \times 2 + 5 \times 3 + 3 = \mathbf{438}$ (番目)

(答) 問 18 [6]　問 19 [1]　問 20 [5]

[F] 3 個とも赤玉である確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{10}{220} = \boldsymbol{\dfrac{1}{22}}$

3 個とも白玉である確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{220}$

3 個とも青玉である確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{220}$

3 個とも色が異なる確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \dfrac{5{\cdot}4{\cdot}3}{220} = \dfrac{60}{220} = \boldsymbol{\dfrac{3}{11}}$

3 個の色が 2 種類である確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{60}{220}\right) = \boldsymbol{\frac{29}{44}}$$

(答) 問 21 [2]　問 22 [3]　問 23 [4]

2.5 熊本労災看護専門学校

2.5.1 一般試験 60 分

〔問 1〕 △ABC において BC $= 17$，CA $= 10$，AB $= 9$ とするとき内接円の半径を求めよ。

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 5

〔問 2〕 $6x^2 - 7xy - 3y^2 - x + 7y - 2$ を因数分解せよ。

(1) $(3x - y + 2)(2x + 3y - 1)$

(2) $(3x - y - 2)(2x - 3y + 1)$

(3) $(3x + y + 2)(2x + 3y - 1)$

(4) $(3x - y - 2)(2x + 3y + 1)$

(5) $(3x + y - 2)(2x - 3y + 1)$

〔問 3〕 頂点が $(3,\ 2)$ で点 $(4,\ 5)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 11$

(2) $y = -x^2 + 6x + 2$

(3) $y = 2x^2 - 12x + 27$

(4) $y = -3x^2 + 12x - 27$

(5) $y = 3x^2 - 18x + 29$

〔問 4〕 $(2x^2 + 3x - 1)^6$ を展開したとき，x^4 の係数を求めよ。

(1) 195

(2) 198

(3) 201

(4) 208

(5) 211

〔問 5〕 $a\cos B - b\cos A = c$ を満たす三角形の形状を求めよ。

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$ の二等辺三角形

(2) $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ の直角三角形

(3) $\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ の二等辺三角形

(4) $\angle\mathrm{B} = 90^\circ$ の直角三角形

(5) $\mathrm{AB} = \mathrm{CA}$ で $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形

〔問 6〕 a，b，c，d，e，f の文字が書いてある玉が 1 個ずつあるとき，これらの玉にひもを通し，輪を作る方法は何通りあるか求めよ。

(1) 30

(2) 45

(3) 60

(4) 90

(5) 120

〔問 7〕 $x^2 - 2y^2 + xy + kx + 2y + 4$ が，x，y についての 2 つの 1 次式の積に分解されるとき，k の値を求めよ。

(1) $k = -2,\ 3$

(2) $k = 2, -3$

(3) $k = -4,\ 5$

(4) $k = 4, -5$

(5) $k = 5,\ 6$

〔問 8〕 1800 の正の約数はいくつあるか求めよ。

(1) 24

(2) 26

(3) 28

(4) 32

(5) 36

〔問 9〕 $x+y+z=3$，$xy+yz+zx=1$，$xyz=-2$ のとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。

(1) 6

(2) 12

(3) 18

(4) 24

(5) 30

〔問 10〕 40 人の生徒に，沖縄，北海道，京都のどこに旅行に行きたいか，アンケート調査をしたところ，沖縄 18 人，北海道 12 人，京都 21 人，沖縄と北海道 6 人，沖縄と京都 9 人，北海道と京都 5 人，どこも行きたくない 5 人という結果が得られた。このとき，沖縄，北海道，京都すべてに行きたいと答えた生徒は何人いるか求めよ。

(1) 2

(2) 3

(3) 4

(4) 6

(5) 8

〔問 11〕 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ を求めよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{37}}{5}$

(2) $\pm\dfrac{\sqrt{37}}{5}$

(3) $\pm\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

(4) $\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

(5) $-\dfrac{\sqrt{43}}{5}$

〔問 12〕 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$b^2 + ab$ の値を求めよ。

(1) $1+\sqrt{2}$

(2) $2+2\sqrt{2}$

(3) $2+6\sqrt{2}$

(4) $3+2\sqrt{2}$

(5) $3+4\sqrt{2}$

〔問 13〕 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，2 次方程式 $x^2 - 2x\sin\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつように θ の範囲を求めよ。

(1) $0^\circ \leqq \theta < 30^\circ$

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$

(3) $0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$

(4) $0^\circ \leqq \theta < 150^\circ$

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$

〔問 14〕 5 枚の 100 円硬貨を投げて，表が出た硬貨の枚数が奇数ならば，その枚数の分だけ賞金としてもらえる。また表が出た枚数が偶数ならば 100 円支払わなければならないとしたとき，賞金の期待値を求めよ。

(1) 50

(2) 75

(3) 100

(4) 125

(5) 150

〔問 15〕 $x^2 - 2ax + 5a - 4 = 0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつように，定数 a の値を求めよ。

(1) $a < 0$

(2) $0 < a < 1$

(3) $1 < a < 2$

(4) $2 < a < 4$

(5) $4 < a$

解答例

〔問 1〕 $2s = 17 + 10 + 9 = 36$ とすると　　$s = 18$

ゆえに，三角形の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S = \sqrt{18(18-17)(18-10)(18-9)} = 36$$

これらを $S = rs$ に代入して

$$36 = r\cdot 18$$

よって　　$r = \mathbf{2}$

〔問 2〕

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 7xy - 3y^2 - x + 7y - 2 \\ = & 6x^2 + (-7y-1)x - (y-2)(3y-1) \\ = & \{3x + (y-2)\}\{2x - (3y-1)\} \\ = & \boldsymbol{(3x + y - 2)(2x - 3y + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcr} 3 & y-2 \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & -(3y-1) \longrightarrow & -9y+3 \\ \hline 6 & -(y-2)(3y-1) & -7y-1 \end{array}$$

〔問 3〕 頂点が $(3,\ 2)$ であるから，求める関数は $y = a(x-3)^2 + 2$ とおける．

このグラフが $(4,\ 5)$ を通るから　　$5 = a + 2$　　ゆえに　$a = 3$

よって　　$y = 3(x-3)^2 + 2$　すなわち　$\boldsymbol{y = 3x^2 - 18x + 29}$

〔問 4〕 $(2x^2 + 3x - 1)^6 = \{2x^2 + 3x + (-1)\}^6$ の一般項は

$$\frac{6!}{a!b!c!}(2x^2)^a(3x)^b(-1)^c = \frac{6!\cdot 2^a\cdot 3^b\cdot(-1)^c}{a!b!c!}x^{2a+b} \quad (a + b + c = 6)$$

よって，$a + b + c = 6$，$2a + b = 4$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$(a,\ b,\ c) = (0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$$

したがって，x^4 の係数は

$$\begin{aligned} \frac{6!\cdot 3^4\cdot(-1)^2}{4!2!} + \frac{6!\cdot 2\cdot 3^2\cdot(-1)^3}{1!2!3!} + \frac{6!\cdot 2^2\cdot(-1)^4}{2!4!} &= 1215 - 1080 + 60 \\ &= \mathbf{195} \end{aligned}$$

〔問 5〕 余弦定理により，与えられた等式は

$$a\cdot\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b\cdot\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

よって　　$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = c$$

すなわち　　$(c^2 + a^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$

整理して　　$2a^2 - 2b^2 = 2c^2$

ゆえに　　$a^2 = b^2 + c^2$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は　　**$\angle\mathbf{A} = 90^\circ$ の直角三角形**

〔問6〕 6個の数珠(じゅず)順列の個数であるから

$$\frac{(6-1)!}{2}=\frac{5!}{2}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}=\mathbf{60}\ (\text{通り})$$

> n 個の数珠(じゅず)順列は　$\dfrac{(n-1)!}{2}$

〔問7〕 x について整理すると

$$\begin{aligned}
&x^2-2y^2+xy+kx+2y+4\\
=&x^2+(y+k)x-2y^2+2y+4\\
=&x^2+(y+k)x+\left(\frac{y+k}{2}\right)^2-\left(\frac{y+k}{2}\right)^2-2y^2+2y+4\\
=&\left(x+\frac{y+k}{2}\right)^2-\left\{\frac{9}{4}y^2+\left(\frac{k}{2}-2\right)y+\frac{k^2}{4}-4\right\}\\
=&\left(x+\frac{y+k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left\{9y^2+2(k-4)y+k^2-16\right\}
\end{aligned}$$

$9y^2+2(k-4)y+k^2-16$ が平方式であればよいから，y について

$D/4=0$ から　$(k-4)^2-9(k^2-16)=0$

整理して　$k^2+k-20=0$

ゆえに　$(k-4)(k+5)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{k=4,-5}$

解説

$9y^2+2(k-4)x+k^2-16$ が平方式であれば

$$x+\frac{y+k}{2}=A,\ \ 9y^2+2(k-4)x+k^2-16=B^2$$

とおくと (B は y の1次式)

$$(\text{与式})=A^2-\frac{1}{4}B^2=\left(A+\frac{1}{2}B\right)\left(A-\frac{1}{2}B\right)$$

$A\pm\dfrac{1}{2}B$ は1次式であるから，(与式) は2つの1次式の積である．

〔問8〕 $1800=2^3\times3^2\times5^2$ であるから，1800の正の約数は 2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で表される．2^3，3^2，5^2 の正の約数の個数は，それぞれ4個，3個，3個であるから，求める正の約数の個数は　$4\times3\times3=\mathbf{36}$ (個)

〔問 9〕 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ であるから

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= (x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz \\ &= 3(3^2-3\cdot 1)+3\cdot(-2)=\mathbf{12} \end{aligned}$$

〔問 10〕 沖縄に行きたい人の集合を A，北海道に行きたい人の集合を B，京都に行きたい人の集合を C とすると，条件から

$$n(A)=18,\ n(B)=12,\ n(C)=21,$$
$$n(A\cap B)=6,\ n(A\cap C)=9,\ n(B\cap C)=5,$$

$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=5$ であるから

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(\overline{A\cup B\cup C})=40-5=35$$

これらを

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C) \\ &\quad -n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C) \\ &\quad +n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

に代入すると　$35=18+12+21-6-9-5+n(A\cap B\cap C)$

これを解いて　$n(A\cap B\cap C)=\mathbf{4}$

〔問 11〕 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ の両辺を 2 乗すると

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{25}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{9}{25}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする x の 2 次方程式は

$$x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta=0$$

ゆえに　$5x^2-\sqrt{7}x-\dfrac{9}{5}=0$

これを解いて　$x=\dfrac{\sqrt{7}\pm\sqrt{43}}{10}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $\sin\theta\geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{43}}{10},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{43}}{10}$$

よって　$\boldsymbol{\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{43}}{5}}$

〔問 12〕 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であるから　$2<2\sqrt{2}<3$

ゆえに　　$5<3+2\sqrt{2}<6$

したがって　　$a+b=3+2\sqrt{2},\ a=5$

上の2式から　　$b=2\sqrt{2}-2$

よって　　$b^2+ab=(2\sqrt{2}-2)^2+(2\sqrt{2}-2)\cdot 5$

$$=\mathbf{2+2\sqrt{2}}$$

〔問 13〕 異なる2つの実数解をもつ条件は　　$D>0$

したがって　　$(-2\sin\theta)^2-4\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)>0$

整理して　　$2\sin^2\theta+3\cos\theta>0$

$$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta>0$$

ゆえに　　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2<0$

よって　　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)<0$

$\cos\theta-2<0$ より　　$2\cos\theta+1>0$

$$\cos\theta>-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ に注意して　　$\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta<120^\circ}$

〔問 14〕 表が1枚の確率は　　${}_5C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{5}{32}$

表が3枚の確率は　　${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{10}{32}$

表が5枚の確率は　　${}_5C_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$

表の枚数が偶数である確率は　　$1-\left(\dfrac{5}{32}+\dfrac{10}{32}+\dfrac{1}{32}\right)=\dfrac{16}{32}$

よって，賞金を X 円とすると，右のような表ができる．したがって，求める期待値は

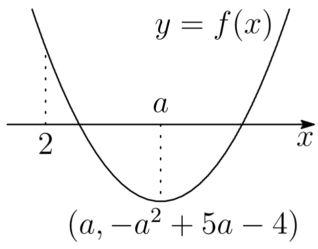
X	100	300	500	-100
確率	$\dfrac{5}{32}$	$\dfrac{10}{32}$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{16}{32}$

$$100\times\frac{5}{32}+300\times\frac{10}{32}+500\times\frac{1}{32}+(-100)\times\frac{16}{32}=\mathbf{75}$$

〔問 15〕 $f(x) = x^2 - 2ax + 5a - 4$ とおくと　$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 5a - 4$

$y = f(x)$ のグラフは，頂点が $(a, -a^2 + 5a - 4)$ で下に凸の放物線であるから

$f(x) = 0$ が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもつための条件は



$$\begin{cases} a > 2 & \cdots ① \\ -a^2 + 5a - 4 < 0 & \cdots ② \\ f(2) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

② から　$a^2 - 5a + 4 > 0$

$(a-1)(a-4) > 0$

これを解いて　$a < 1,\ 4 < a \quad \cdots ④$

③ から　$2^2 - 2a \cdot 2 + 5a - 4 > 0$

これを解いて　$a > 0 \quad \cdots ⑤$

①，④，⑤ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{4 < a}$

(答)

〔問 1〕	**〔問 2〕**	**〔問 3〕**	**〔問 4〕**	**〔問 5〕**
(2)	(5)	(5)	(1)	(2)
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
(3)	(4)	(5)	(2)	(3)
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
(4)	(2)	(3)	(2)	(5)