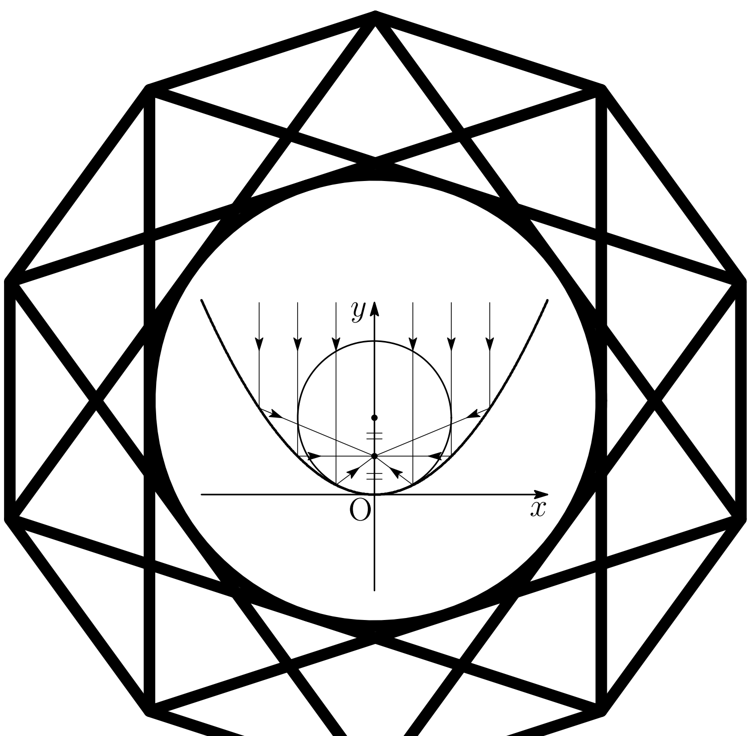
熊本県入試問題　数学正解

大学・短大・医療系

2008年受験用



Typed by LaTeX 2ε

序

熊本県内の高校間，特に工業科をもつ県立高校 10 校を中心に進路情報の共有化を推進するため，進路指導の研究協議会が平成 8 年度に発足した．時代の要請である情報化とそれを支えるインフラが平成 12 年度に整備されたことにより，同協議会が得意とする情報技術を活用した進路指導の在り方が研究され，学校間で就職試験問題・入学試験問題などが共有化されることになった (ユーザー名とパスワードが必要).

平成 14・15 年度には,「教育情報共有化促進モデル事業」が県立高校数学科を中心に推進され，近年,「ICT 活用に関する研究」も行われ，こうした事業の成果として，教科教材や試験問題がインターネットを通じて入手できるようになった．熊本県内の入試問題 (数学) などを次のサイトに掲載しており，本書はこれらの情報を紹介するために製本したものである．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 熊本県内の大学・短大・医療系専門学校 (リハビリ・高看) が公開した平成 19 年度 (2007) の入学試験問題 (数学) をすべて掲載した．

2. 解答においては，基本事項の使い方を示し，答案の書き方を例示した．

3. 試験日程や試験時間を調べて掲載した．なお，複数の教科を同時に受験する入学試験については，その試験時間を明示しなかった．

平成 19 年 7 月　編者

目 次

第 1 章　大学・短大

過去 10 年余りにインターネットが急速に普及し，有名大学を中心に入学試験問題を容易に入手できるようになった．グローバル化と云われて久しいが，我々が必要とする情報の多くはローカルな内容が中心であり，熊本県内にある大学の入学試験問題についてはインターネットで公開している大学が少ないのが現状である．こうした状況下にあって，本書は，県内の大学・短大が要求する数学的知識とはどのようなものであるかを紹介するとともに，県内で進学を目指す者にとって何を学んでおくべきか．またどのような受験対策をとるべきであるか．これらの問いに本書が何らかの解答を与えることを編者は希望するものである．また，本書に掲載した入学試験問題は，次のサイトからもダウンロード (PDF) することができるようにした．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

本書に掲載した平成 19 年度 (2007) 入学試験問題は次のとおりである．

本書に掲載した 2007 年度入学試験問題

学校名	試験科目	試験日
熊本大学 (文系一般 2 次前期)	I・II・A・B	2/25
熊本大学 (理系一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
熊本大学 (理学部一般 2 次後期)	I・II・III・A・B・C	3/12
熊本県立大学 (一般 2 次前期)	I・II・III・A・B・C	2/25
崇城大学 (普通高校推薦)	I・II	11/11·12
崇城大学 (専門高校推薦)	I	11/11·12
崇城大学 (一般前期・後期)	I・II・A・B	1/31，2/1，3/14
九州東海大学 (一般)	[I・A] と [II・B] の選択	2/2·3
熊本学園大学 (一般 A 日程)	I・II・A	2/8·10·11·12·13
熊本保健科学大学 (一般推薦)	I・A	11/18
熊本保健科学大学 (一般)	I・II(衛生技術・理学療法)	2/4
熊本保健科学大学 (一般)	I・A(看護・作業療法)	2/4
九州看護福祉大学 (一般)	I・A	2/1·2·3
九州ルーテル学院大学 (一般)	I	2/3，3/3
熊本県立保育大学校 (一般)	I	2/2
熊本県立技術短期大学校 (推薦)	I	11/26
熊本県立技術短期大学校 (一般)	I・II	2/11

1.1 熊本大学

1.1.1 二次前期文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻)120 分

1 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを 4 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

2 四面体 OABC の 6 つの辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\ \mathrm{OB}=\sqrt{5},\ \mathrm{OC}=\sqrt{6},\ \mathrm{AB}=\sqrt{5},\ \mathrm{AC}=2\sqrt{2},\ \mathrm{BC}=\sqrt{5}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のいずれとも直交することを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

3 α を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y=-x^2, \qquad C_2 : y=3(x-1)^2+a$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ は以下の条件を満たしているものとする。

$$\begin{aligned}
&x_1 = 8, \qquad y_1 = -5 \\
&x_{n+1} = 2x_n + y_n + 3n - 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\
&y_{n+1} = 2y_n + x_n - 3n + 8 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $z_n = x_n + y_n$，また $w_n = x_n - y_n$ とおく。数列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になるような n の値をすべて求めよ。

解答例

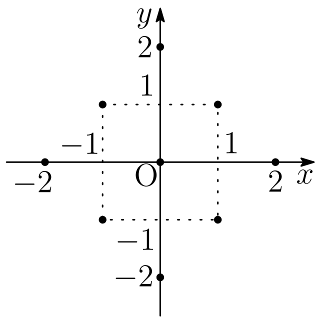
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$$ {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{972}} $$

(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数はともに 2 である．したがって，求める確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{54}} $$

(3) さいころを2回投げたとき，点Pの座標は



x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$

x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$

x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$

x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$

x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$

となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} \times 2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{13}{36}$

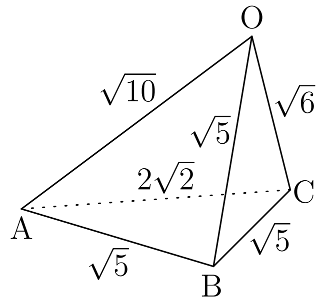
x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$

したがって，点Pの x 座標の期待値は

$$(-2) \times \frac{1}{36} + (-1) \times \frac{6}{36} + 0 \times \frac{13}{36} + 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$
を代入して

$$5 = 5 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{10}$ を代入して

$$8 = 6 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 10$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$ を代入して

$$5 = 6 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 5$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{1}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

したがって，(1) の結果を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 10 + \frac{2}{5}\times 5 - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{1}{5}\times 5 + \frac{2}{5}\times 5 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，(2) の結果より H は C から $\triangle$OAB に下ろした垂線の足である．

$\triangle$ABO は $\angle\mathrm{ABO} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ABO} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

また

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \left|\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{25}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{4}{25}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\
&\qquad + \frac{4}{25}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{1}{25}\cdot 10 + \frac{4}{25}\cdot 5 + 6 + \frac{4}{25}\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 4 - \frac{4}{5}\cdot 3 = 4
\end{aligned}$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = 2$

したがって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABO} \times |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times 2 = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=-x^2$ を微分すると　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t, -t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち　$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots ①$$

このとき，ℓ が 2 本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する．
したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

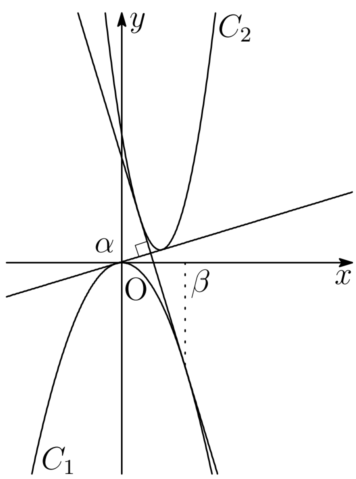
(2) ① の 2 解を α，β とすると，2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって　$-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x_{n+1}=2x_n+y_n+3n-8$，$y_{n+1}=2y_n+x_n-3n+8$

の辺々の和と差をとると

$$x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$$
$$x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n+6n-16$$

$z_n=x_n+y_n$，$w_n=x_n-y_n$ であるから

$$z_{n+1}=3z_n,\qquad z_1=x_1+y_1=8+(-5)=3$$
$$w_{n+1}=w_n+6n-16,\quad w_1=x_1-y_1=8-(-5)=13$$

数列 $\{z_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{z_n}=3\cdot3^{n-1}=\boldsymbol{3^n}$$

数列 $\{w_n\}$ は $n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}w_n&=w_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-16)\\&=13+6\times\frac{1}{2}(n-1)n-16(n-1)\\&=3n^2-19n+29\end{aligned}$$

$w_1=13$ なので，上の w_n は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　　$\boldsymbol{w_n=3n^2-19n+29}$

(2) 点 $(x_n,\ y_n)$ と直線 $y=x$ の距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$d=\frac{|\,x_n-y_n\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\,w_n\,|}{\sqrt{2}}$$

w_n の階差数列 b_n は，$b_n=6n-16$ であるから

$n\geqq3$ のとき　　　　$b_n>0$

$w_4=1$ であるから　　$n\geqq5$ のとき $w_n>1$

よって，$d=\dfrac{|w_n|}{\sqrt{2}}$ を最小にする n の値は $n\leqq4$ について調べればよい．

実際，$w_1=13$，$w_2=3$，$w_3=-1$，$w_4=1$ であるから

求める n の値は　　$\boldsymbol{n=3,\ 4}$

1.1.2 二次前期理系 (理，医，薬，工学部)120 分

1 α を定数とする。2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2, \quad C_2 : y = 3(x-1)^2 + a$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ。

(2) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3) C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

2 xy 平面上で，点 P は原点を出発点とし，さいころを 1 回投げるたびに以下のように進むものとする。1 または 2 の目が出たときは x 軸方向に 1 だけ進み，3 の目が出たときは x 軸方向に -1 だけ進み，4 または 5 の目が出たときは y 軸方向に 1 だけ進み，6 の目が出たときは y 軸方向に -1 だけ進む。以下の問いに答えよ。

(1) さいころを 5 回投げるとき，点 P が座標 $(2, -3)$ の位置にいる確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P が x 軸上のみを動いて最後に原点にいる確率を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げるとき，点 P の x 座標の期待値を求めよ。

3 行列 A の表す移動によって xy 平面上の点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ はそれぞれ $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$ に移されるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 曲線 $y = e^x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が動くとき，P がこの移動によって移る点の軌跡 C を求めよ。ただし，$-\infty < t < \infty$ とする。

(3) 曲線 D を $y = x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right)$ とする。ただし，$x < e + \dfrac{1}{e}$ である。2 つの曲線 C と D で囲まれる領域の面積を求めよ。

4 a を定数とする。方程式 $(\log x)^2 = ax\ (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 解の個数を調べよ。必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$ を用いよ。

(2) 解がちょうど 2 個のとき，これらの解を p^2，$q^2\ (0 < p < q)$ とおく。q の値を求めよ。また，p は $\dfrac{e}{e+1} < p < 1$ を満たすことを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=-x^2$ を微分すると　　$y'=-2x$

C_1 上の点 $(t,-t^2)$ における接線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $-2t$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-t^2)=-2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=-2tx+t^2$$

ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$3(x-1)^2+a=-2tx+t^2$$

すなわち　$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0$

の解であり，ℓ と C_2 が接するとき，この方程式は重解をもつので

$$(t-3)^2-3\cdot(-t^2+a+3)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4t^2-6t-3a=0 \quad \cdots①$$

このとき，ℓ が2本存在するためには，① の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(-3a)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

別解

C_1 は上に凸，C_2 は下に凸の放物線であるから，C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在する．
したがって，$y=-x^2$，$y=3(x-1)^2+a$ から y を消去して

$$-x^2=3(x-1)^2+a \quad \text{すなわち} \quad 4x^2-6x+a+3=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると，$D<0$ であるから

$$D/4=(-3)^2-4\cdot(a+3)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a>-\frac{3}{4}}$$

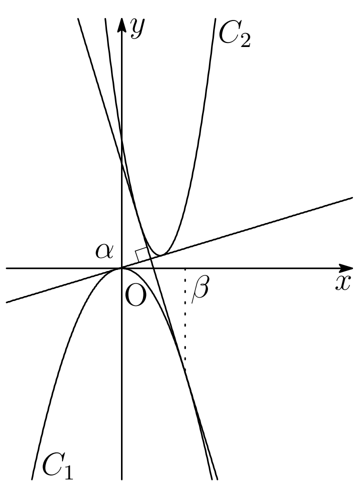
(2) ① の2解を α，β とすると，2点 $(\alpha,-\alpha^2)$，$(\beta,-\beta^2)$ における接線の傾きは，それぞれ 2α，2β であり，これらが直交するとき

$$2\alpha\cdot2\beta=-1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

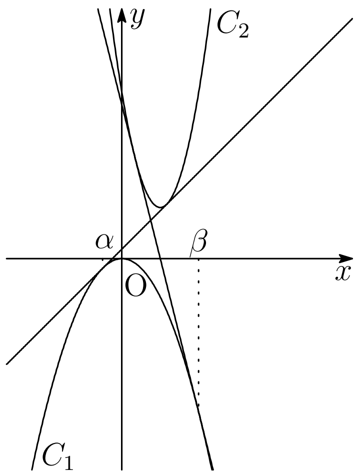
また，① の解と係数の関係から　$\alpha\beta=-\dfrac{3a}{4}$

したがって　　$-\dfrac{3a}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$a>-\dfrac{3}{4}$ に注意して　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$



(3) ℓ 上の 2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ における接線を x 軸の正の向きから測った角を，それぞれ θ_1，θ_2 とすると



$$\tan\theta_1 = -2\alpha,\ \tan\theta_2 = -2\beta$$

このとき，$|\,\theta_1 - \theta_2\,| = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ であるから $|\tan(\theta_1 - \theta_2)\,| = 1$ より

$$\left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}\right| = 1$$

したがって　$$\left|\frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta}\right| = 1$$

平方して整理すると　$$4(\beta - \alpha)^2 = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

したがって　$$4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

① の解と係数の関係から $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta = -\dfrac{3a}{4}$ であるから

$$4\left(\frac{9}{4} + 3a\right) = (1 - 3a)^2$$

すなわち　$$9a^2 - 18a - 8 = 0$$

$a > -\dfrac{3}{4}$ に注意して　$$\boldsymbol{a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) P が点 $(2, -3)$ の位置にいるためには，x 軸方向に 2 回以上，y 軸方向に 3 回以上移動しなければならない．したがって，さいころを 5 回投げてこの位置にいるためには x 軸方向に 1 だけ進む移動を 2 回，y 軸方向へ -1 だけ進む移動を 3 回行うことになる．すなわち，さいころを 5 回投げて，1 または 2 の目が出る回数が 2 回，6 の目が出る回数が 3 回である確率を求めればよい．

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{972}}$$

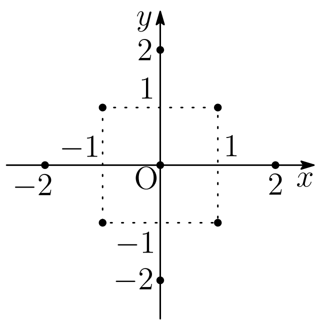
(2) x 軸方向のみを移動して P が原点にいるためには，x 軸方向に 1 だけ進む回数と x 軸方向へ -1 だけ進む回数が等しい．したがって n が奇数のときのときは，求める確率は 0 である．n が偶数のとき，$m = \dfrac{n}{2}$ とおくと，求める確率は

$${}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{2}{6}\right)^m\left(\frac{1}{6}\right)^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2 \cdot 18^m}$$

ゆえに，m を自然数とすると，求める確率は

$$\boldsymbol{n = 2m - 1\ \text{のとき}\quad 0,\qquad n = 2m\ \text{のとき}\quad \frac{(2m)!}{(m!)^2 \cdot 18^m}}$$

(3) さいころを2回投げたとき，点Pの座標は



x 座標が -2 のとき　$(-2,\ 0)$

x 座標が -1 のとき　$(-1,\ 1),\ (-1, -1)$

x 座標が 0 のとき　$(0,\ 2),\ (0,\ 0),\ (0, -2)$

x 座標が 1 のとき　$(1,\ 1),\ (1, -1)$

x 座標が 2 のとき　$(2,\ 0)$

となる．ゆえにそれぞれの確率は

x 座標が -2 のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

x 座標が -1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{36}$

x 座標が 0 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} \times 2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{13}{36}$

x 座標が 1 のとき　${}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{6} + {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{12}{36}$

x 座標が 2 のとき　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2 = \dfrac{4}{36}$

したがって，点Pの x 座標の期待値は

$$(-2) \times \frac{1}{36} + (-1) \times \frac{6}{36} + 0 \times \frac{13}{36} + 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

3 (1) 条件から　$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　$\cdots$①

行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について　$\Delta = 0\cdot2 - 1\cdot1 = -1 \neq 0$

よって　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

①より　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ が行列 A の表す移動によって点 $(x,\ y)$ に移るとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

すなわち　$x = e^t,\ \ y = -t + e^t$

$-\infty < t < \infty$ より　$x = e^t > 0,\ \ t = \log x$

したがって，求める軌跡 C の方程式は

$$\boldsymbol{y = -\log x + x}$$

(3) C と D の交点の x 座標は

$$-\log x + x = x + \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

$$\log\frac{1}{x} = \log\left(e + \frac{1}{e} - x\right)$$

よって　$\dfrac{1}{x} = e + \dfrac{1}{e} - x$

したがって　$x^2 - \left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + 1 = 0$　これを解いて　$x = \dfrac{1}{e},\ e$

区間 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$ において

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \left(e + \frac{1}{e} - x\right) &= \frac{1}{x}\left\{x^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)x + 1\right\} \\ &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{e}\right)(x - e) \leqq 0\end{aligned}$$

ゆえに　$e + \dfrac{1}{e} - x \geqq \dfrac{1}{x}$

$$\log\left(e + \frac{1}{e} - x\right) \geqq \log\frac{1}{x}$$

よって　$x + \log\left(e + \dfrac{1}{e} - x\right) \geqq -\log x + x$

したがって，$\dfrac{1}{e} < x < e$ において，曲線 D は，曲線 C の上側にある．

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{x+\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)-(-\log x+x)\right\}dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left\{\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)+\log x\right\}dx$$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx$ において $e+\frac{1}{e}-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$\frac{1}{e}\longrightarrow e$
t	$e\longrightarrow\frac{1}{e}$

よって

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log\left(e+\frac{1}{e}-x\right)dx$$
$$=\int_{e}^{\frac{1}{e}}\log t\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log t\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx$$

したがって

$$S=2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\log x\,dx$$
$$=2\Big[x\log x-x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}=\boldsymbol{\frac{4}{e}}$$

解説

等式 $\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx}$ を利用する．

証明 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ において $a+b-x=t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる．

x	$a\longrightarrow b$
t	$b\longrightarrow a$

よって

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$
$$=\int_b^a f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x \neq 0$ であるから $f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$$

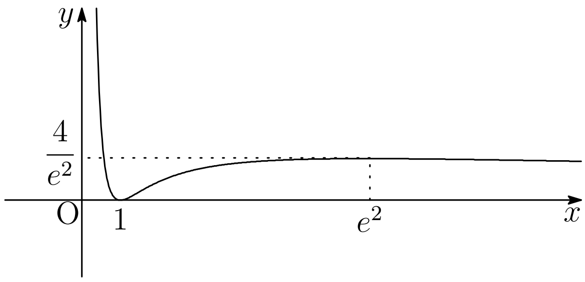
よって，$f(x)$ の増減表は次のようなる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)^2}{x} = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

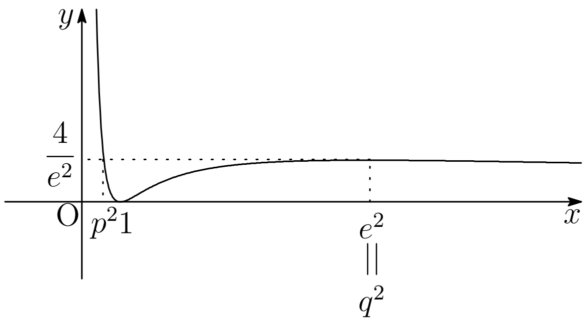
したがって，$y = f(x)$ のグラフは下の図のようになる．



このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって

$\boldsymbol{a < 0}$ **のとき**	**0 個**
$\boldsymbol{a > \frac{4}{e^2}}$，$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき**	**1 個**
$\boldsymbol{a = \frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**2 個**
$\boldsymbol{0 < a < \frac{4}{e^2}}$ **のとき**	**3 個**

(2) 解が2個となるのは $a = \dfrac{4}{e^2}$ のときで，$0 < p < q$ であるから p^2，q^2 は下の図ような位置関係になる．



$k = \dfrac{e}{e+1}$ とおくと

$$f(k^2) = \frac{(\log k^2)^2}{k^2} = \left(\frac{2\log k}{k}\right)^2 = \left\{\frac{2(e+1)}{e}\log\frac{e}{e+1}\right\}^2$$
$$= \frac{4}{e^2}\left\{(e+1)\log\frac{e+1}{e}\right\}^2 \quad \cdots ①$$

ここで関数 $g(x) = \log x$ を考え，この関数は区間 $(e,\ e+1)$ で微分可能で，

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

区間 $[e,\ e+1]$ において，平均値の定理を適用すると

$$\frac{\log(e+1) - \log e}{(e+1) - e} = \frac{1}{c},\quad e < c < e+1$$

を同時に満たす c が存在する．よって

$$\frac{1}{e+1} < \log\frac{e+1}{e} < \frac{1}{e}$$

ゆえに　　$(e+1)\log\dfrac{e+1}{e} > 1 \quad \cdots ②$

$f(p^2) = \dfrac{4}{e^2}$ であるから，①，② より　　$f(k^2) > f(p^2)$

グラフから　　$k^2 < p^2 < 1$，$q^2 = e^2$

$0 < p < q$ より　　$\boldsymbol{\dfrac{e}{e+1} < p < 1,\ q = e}$

1.1.3 二次後期 (理学部)

1 次の問いに答えよ。

(問 1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 3A + 2E = O$ をみたすとき，$ad - bc$ の値をすべて求めよ。ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(問 2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(1 + 2x)}$ の値を求めよ。

2 曲線 $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ を C とし，C 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(問 1) 直線 l の方程式を求めよ。

(問 2) 直線 l と x 軸との交点を $(p,\ 0)$ としたとき，p を求めよ。

(問 3) 直線 l と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を S，曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = p$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の値を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{36 + 5a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で与えられているとする。また，$f(x) = \sqrt{36 + 5x} - x$ とし，x に関する方程式 $f(x) = 0$ の正の解を a とする。このとき，次の問いに答えよ。

(問 1) a の値を求めよ。

(問 2) すべての正の整数 n について，$a_n \leqq a$ であることを証明せよ。

(問 3) $0 \leqq x \leqq a$ において，$f(x) \geqq \dfrac{2}{3}(a - x)$ であることを証明せよ。

(問 4) $b_n = a - a_n$ とするとき，すべての正の整数 n について，$b_{n+1} \leqq \dfrac{1}{3}b_n$ であることを証明せよ。

(問 5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad \cdots ①$$

仮定から　$A^2-3A+2E=O$ $\quad\cdots ②$

② − ① より　$(a+d-3)A-(ad-bc-2)E=O$

［1］ $a+d-3=0$ のとき

$-(ad-bc-2)E=O$, $E\neq O$ より　$-(ad-bc-2)=0$

よって　$ad-bc=2$

［2］ $a+d-3\neq 0$ のとき

$k=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}$ とおくと　$A=kE$ $\quad\cdots ③$

③ を ② に代入して　$(k^2-3k+2)E=O$

$E\neq O$ より　$k^2-3k+2=0$

ゆえに　$k=1,\ 2$

③ より　$k=1$ のとき $ad-bc=1$

$k=2$ のとき $ad-bc=4$

［1］,［2］ より　$\boldsymbol{ad-bc=1,\ 2,\ 4}$

(問 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\log(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\log(1+2x)}{2x}}\times\frac{1}{2} \quad\cdots(*)$

$x^2=h$, $2x=k$ とおくと，$x\to 0$ のとき $h\to +0$, $k\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}=\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}$$

ここで，$f(x)=e^x$, $g(x)=\log(1+x)$ とすると，これらの関数は，$x=0$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{g(k)-g(0)}{k}=g'(0)=1$$

$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\log(1+2x)}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\textbf{2}}$

(問 1)　$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ とすると $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ であるから　$f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$

よって，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}} \quad \cdots ①$$

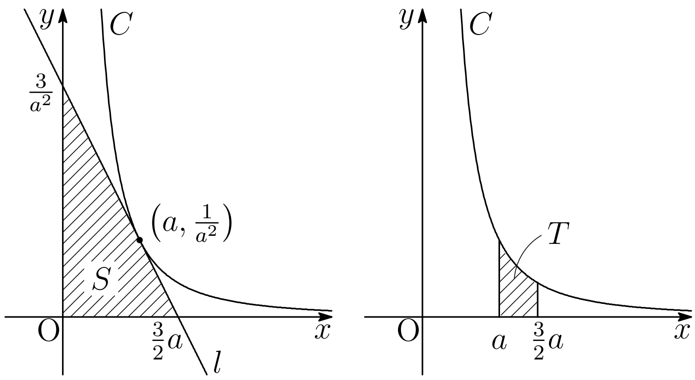
(問 2)　① に $x = p$，$y = 0$ を代入して　$\boldsymbol{p = \dfrac{3}{2}a}$

(問 3)　S，T は下の図のようになるから

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}a \times \frac{3}{a^2} = \frac{9}{4a}$$

$$T = \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\frac{3}{2}a} = -\frac{2}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{3a}$$

したがって　$\dfrac{S}{T} = \dfrac{9}{4a} \div \dfrac{1}{3a} = \boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$



$\boxed{3}$

(問1) $f(x)=0$ より　$x=\sqrt{36+5x}$

両辺を平方して整理すると　$x^2-5x-36=0$

すなわち　$(x+4)(x-9)=0$

$x=\sqrt{36+5x} \geqq 0$ より　$x=9$

したがって　$\boldsymbol{a=9}$

(問2) $a_1=1>0$，また $a_{n+1}=\sqrt{36+5a_n}\cdots$① より $a_n>0$ のとき $a_{n+1}>0$

したがって，すべての正の整数 n について　$a_n>0$

① から

$$\begin{aligned}9-a_{n+1}&=9-\sqrt{36+5a_n}\\&=\frac{(9-\sqrt{36+5a_n})(9+\sqrt{36+5a_n})}{9+\sqrt{36+5a_n}}\\&=\frac{5}{9+\sqrt{36+5a_n}}(9-a_n) \qquad \cdots②\end{aligned}$$

$9-a_1=9-1>0$，また上式から $9-a_{n+1}$ は $9-a_n$ と同符号である．

したがって，すべての正の整数 n について　$9-a_n>0$

ゆえに $\boldsymbol{a_n \leqq 9}$ が成り立つ．　$\longleftarrow (x<y \Longrightarrow x \leqq y)$

(問3)

$$f(x) \geqq \frac{2}{3}(9-x) \iff \sqrt{36+5x} \geqq 6+\frac{x}{3}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 9$ において $\sqrt{36+5x} \geqq 6+\dfrac{x}{3}$ を証明すればよい．

$$(\sqrt{36+5x})^2-\left(6+\frac{x}{3}\right)^2=x-\frac{x^2}{9}=\frac{x}{9}(9-x) \geqq 0$$

$\sqrt{36+5x}>0$，$6+\dfrac{x}{3}>0$ であるから　$\sqrt{36+5x} \geqq 6+\dfrac{x}{3}$

(問4) ② より　$b_{n+1}=\dfrac{5}{\sqrt{36+5a_n}+9}b_n$

$a_n>0$ であるから　$0<\dfrac{5}{\sqrt{36+5a_n}+9}<\dfrac{5}{\sqrt{36}+9}=\dfrac{1}{3}$

(問2) の結果より，すべての正の整数 n について $b_n>0$ であるから

$$b_{n+1}<\frac{1}{3}b_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_{n+1} \leqq \frac{1}{3}b_n}$$

(問5) $b_1=9-a_1=8$ および (問4) の結果より

$$0<b_n \leqq 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \text{ゆえに} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

$a_n=9-b_n$ であるから　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=9}$

1.2 熊本県立大学

1.2.1 二次前期 (環境共生学部居住環境学専攻)

問題 I $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ の値を求めよ。ただし，e は自然対数の底であり，$\log$ は自然対数を表す。

問題 II 正の整数 n に対して

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n},\quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

とする。以下の各問に答えよ。

問 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ の値を求めよ。

問 2 S_n を T_n と n を使った式で表せ。

問 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。ただし，ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ を利用してよい。

問題 III 問 1 $\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

問 2 $\tan 75^\circ$ の値を計算せよ。

問 3 一辺の長さが 1 の正 12 角形の面積を求めよ。

問題 IV 問 1 x^3 を x^2+1 で割った余りを求めよ。

問 2 x^4 を x^2+1 で割った余りを求めよ。

問 3 $x^{19}+x$ を x^2+1 で割った余りを求めよ.

解答例

問題 I (部分積分を用いる)

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x\,dx &= \int_1^e (x)'\log x\,dx\\ &= \Big[\,x\log x\,\Big]_1^e - \int_1^e x(\log x)'\,dx\\ &= e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= e - \Big[\,x\,\Big]_1^e = \mathbf{1}\end{aligned}$$

問題 II 問 1 T_n は初項が $\frac{1}{2}$，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$T_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} T_n = 1}$

問 2

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}\\ \frac{1}{2}S_n &= \quad\;\; \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

ゆえに　$\frac{1}{2}S_n = T_n - \frac{n}{2^{n+1}}$　よって　$\boldsymbol{S_n = 2T_n - \frac{n}{2^n}}$

問 3 $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ および $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ なので，問 2 の結果から

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2T_n - \frac{n}{2^n}\right) = 2\times 1 - 0 = \mathbf{2}$$

問題 III 問 1 $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

問 2 $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2 + \sqrt{3}}$$

問 3 円の中心と正十二角形の各頂点を結ぶと，面積の等しい 12 個の二等辺三角形ができる．この二等辺三角形の頂角は 30° である．

よって，正十二角形の面積は

$$12 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 30^\circ\right) = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{12}$$

問題 IV 問 1

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline x^2 + 1 & x^3 \\ & x^3 \quad +x \\ \hline & \qquad -x \end{array}$$

(答) **余りは** $\boldsymbol{-x}$

問 2

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \qquad -1 \\ \hline x^2 + 1 & x^4 \\ & x^4 \quad +x^2 \\ \hline & \qquad -x^2 \\ & \qquad -x^2 \quad -1 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 1 \end{array}$$

(答) **余りは** $\mathbf{1}$

問 3 $x^{19} + x$ を 2 次式 $x^2 + 1$ で割った余りを $ax + b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$x^{19} + x = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$$

この等式に $x = i$ を代入すると　　$0 = ai + b$

a，b は実数であるから　　$a = 0$，$b = 0$

よって，求める**余りは**　　$\mathbf{0}$

1.3 崇城大学

1.3.1 推薦試験1日目(普通高校)60分

1 次の各問に答えよ。

(1) $k \neq 0$ とする。x の2次方程式 $x^2 - 2kx + k = 0$ の1つの解が他の解の2倍に等しいとき，定数 k の値を求めよ。

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は直線 $y = 2x - 1$ に接し，かつ $x = 1$ において x 軸に接している。定数 a，b，c の値を求めよ。

(3) $2\log_4(x+2) + \log_2(x+5) = 2$ を満たす x の値を求めよ。

2 $\triangle\mathrm{ABC}$ は半径3の円に内接し，$\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = 2$，$\mathrm{CA} > \mathrm{AB}$ である。このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

3 放物線 $y = -(x-a)^2 + a^2$ (a は定数) と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。a が $-2 \leqq a \leqq 3$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 つの解は α，2α と表すことができる．

解と係数の関係から　$\alpha+2\alpha=2k$，$\alpha\cdot 2\alpha=k$

すなわち　$3\alpha=2k$，$2\alpha^2=k$

上の 2 式から　$(\alpha,\ k)=(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{9}{8}\right)$

$k\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{k=\dfrac{9}{8}}$

(2) $x=1$ において，x 軸に接するから，放物線の方程式は

$$y=a(x-1)^2 \quad \cdots ①$$

とおける．

放物線と直線の方程式から y を消去すると

$$a(x-1)^2=2x-1$$

ゆえに　$ax^2-2(a+1)x+a+1=0$

放物線と直線が接するとき，$D=0$ であるから

$$D/4=\{-(a+1)\}^2-a(a+1)=0$$

整理すると　$a+1=0$

よって　$a=-1$

これを ① に代入して　$y=-x^2+2x-1$

したがって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=2,\ c=-1}$

(3) 真数は正であるから　$x+2>0$ かつ $x+5>0$

すなわち　$x>-2$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$2\times\dfrac{\log_2(x+2)}{\log_2 4}+\log_2(x+5)=2$

$\log_2(x+2)(x+5)=2$

よって　$(x+2)(x+5)=2^2$

$x^2+7x+6=0$

したがって　$(x+1)(x+6)=0$

① に注意して　$\boldsymbol{x=-1}$

2 正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ であるから

$\dfrac{b}{\sin B}=2\cdot3$　すなわち　$\sin B=\dfrac{b}{6}$　$\cdots$①

余弦定理により

$$\cos B=\frac{3^2+2^2-b^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{13-b^2}{12}\qquad\cdots②$$

①，② を $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ に代入して

$$\left(\frac{b}{6}\right)^2+\left(\frac{13-b^2}{12}\right)^2=1$$

ゆえに　$(2b)^2+(13-b^2)^2=12^2$

$b^4-22b^2+25=0$

$b^2=11\pm\sqrt{11^2-25}=11\pm2\sqrt{24}$

$b>0$ より　$b=\sqrt{11\pm2\sqrt{24}}=\sqrt{8}\pm\sqrt{3}$

仮定より $b>3$ であるから　$b=\sqrt{8}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

① より　$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線の方程式は　$y = -x^2 + 2ax$

放物線と直線の共有点の x 座標は，方程式

$$-x^2 + 2ax = x$$

を解いて　$x = 0,\ 2a - 1$

［1］ $\underline{\frac{1}{2} \leqq a \leqq 3 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{2a-1} \{(-x^2 + 2ax) - x\}\,dx \\ &= -\int_0^{2a-1} x\{x - (2a-1)\}\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(2a-1) - 0\}^3 = \frac{1}{6}(2a-1)^3 \end{aligned}$$

［2］ $\underline{-2 \leqq a < \frac{1}{2} \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{2a-1}^{0} \{(-x^2 + 2ax) - x\}\,dx \\ &= -\int_{2a-1}^{0} x\{x - (2a-1)\}\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{0 - (2a-1)\}^3 = -\frac{1}{6}(2a-1)^3 \end{aligned}$$

［1］，［2］より $\boldsymbol{a = 3, -2}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{125}{6}}$，$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ **のとき最小値** $\mathbf{0}$

1.3.2 推薦試験2日目(普通高校)60分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b と表すとき，$\dfrac{a}{b}$ を計算せよ。

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)} + \dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ の値を求めよ。

(3) $a = \log_2 3$，$b = \log_3 5$ とする。$\log_{10} 6$ を a，b で表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 不等式 $\dfrac{1}{2}x^2 + x \leqq y \leqq -x^2 - 2x$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$\dfrac{y}{x}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a > 0$ とする。関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + b$ が極大値 0 をもち，$f(1) = 0$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$ より $3<\sqrt{5}+1<4$ であるから　$a=3$

$a+b=\sqrt{5}+1$ より　$b=\sqrt{5}+1-a=\sqrt{5}-2$

よって　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\mathbf{3\sqrt{5}+6}$

(2) $$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}+\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}&=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

ゆえに　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

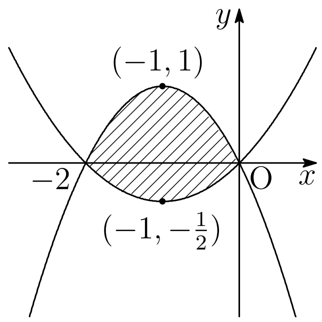
したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

① より　$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}+\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\div\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{16}{3}}$

(3) $b=\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 5}{a}$ より　$\log_2 5=ab$

よって　$\log_{10} 6=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 10}=\dfrac{\log_2 2+\log_2 3}{\log_2 2+\log_2 5}=\boldsymbol{\dfrac{1+a}{1+ab}}$

$\boxed{2}$ (1) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+x$ の上側，放物線 $y=-x^2-2x$ の下側に共通する領域で，境界線を含む.



(2) (1) より，$\frac{y}{x}$ は $-2 \leqq x < 0$ $\cdots$①

$\frac{1}{2}x^2+x \leqq y \leqq -x^2-2x$ の 3 辺を x で割って

$$\frac{1}{2}x+1 \geqq \frac{y}{x} \geqq -x-2$$

$$-x-2 \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{1}{2}x+1$$

① より　$-2 < -x-2 \leqq 0,\ 0 \leqq \frac{1}{2}x+1 < 1$

よって　　$\boldsymbol{-2 < \frac{y}{x} < 1}$

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3-3a^2x+b$ から

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ から，$f(x)$ の増減表は右のようになる．$f(-a)=0$ であるから

x		$-a$		a	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

$$(-a)^3-3a^2\cdot(-a)+b=0$$

すなわち　　$b=-2a^3$　　$\cdots$①

$f(1)=0$ から　$1^3-3a^2\cdot 1+b=0$

ゆえに　　$b=3a^2-1$　　$\cdots$②

①，② より　$-2a^3=3a^2-1$

整理して　$2a^3+3a^2-1=0$

よって　$(a+1)^2(2a-1)=0$

$a>0$ より　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{b=-\frac{1}{4}}$

1.3.3 推薦試験 1 日目 (専門高校)60 分

1 次の各問に答えよ。

(1) x の方程式 $x^2+2ax+5a^2+4a+1=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値とその解を求めよ.

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，放物線 $y=2x^2+x-1$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ.

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=-\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

2 関数 $y=-x^2+ax+b$ の $x \leqq 0$ における最大値は 1 で，すべての x における最大値は 5 である。定数 a，b の値を求め，この関数のグラフをかけ。

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=3+3\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=6$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。

(2) $\angle\mathrm{B}$ の大きさを求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 1\cdot(5a^2+4a+1) \\ &= -4a^2-4a-1 = -(2a+1)^2 \end{aligned}$$

この 2 次方程式が実数解をもつのは，$D \geqq 0$ のときであるから

$$-(2a+1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$$

このとき，2 次方程式は重解をもち，その解は

$$x = -\frac{2a}{2\cdot 1} = -a = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 放物線 $y = ax^2+bx+c \cdots$ ① は放物線 $y = 2x^2+x-1 \cdots$ ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

放物線 ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y-3 = 2(x+2)^2+(x+2)-1$$

整理して $\quad y = 2x^2+9x+12$

よって，上式は ① に一致するから $\quad \boldsymbol{a=2,\ b=9,\ c=12}$

(3) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta = \frac{16}{41}$$

$\tan\theta < 0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta < 0$ である．

よって $\quad \cos\theta = -\sqrt{\dfrac{16}{41}} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{\sqrt{41}}}$

また $\quad \sin\theta = \tan\theta\times\cos\theta = -\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{41}}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x=0$ のとき $y=1$ であるから　$\boldsymbol{b=1}$

$y=-x^2+ax+1$ と $y=5$ から y を消去して

$$-x^2+ax+1=5 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+4=0 \quad \cdots ①$$

は，重解をもつので，係数について

$$(-a)^2-4\cdot1\cdot4=0$$

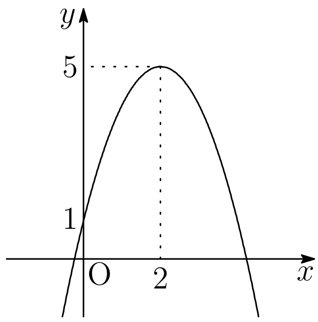
ゆえに　$a=\pm4 \quad \cdots ②$

重解は，① より　$x=-\dfrac{-a}{2\cdot1}=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}>0$ であるから，② より　$\boldsymbol{a=4}$

$y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$

よって，頂点の座標は　$(2,\ 5)$



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\&=(3+3\sqrt{3})^2+6^2-2(3+3\sqrt{3})\cdot6\cdot\frac{1}{2}\\&=54\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\sqrt{54}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{(3+3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{6})^2-6^2}{2(3+3\sqrt{3})\cdot3\sqrt{6}}\\&=\frac{54+18\sqrt{3}}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\angle\mathrm{B}$ は　$\boldsymbol{\angle\mathrm{B}=45^\circ}$

1.3.4 推薦試験 2 日目 (専門高校)60 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = 4x^2 + ax + 5$ の頂点の y 座標が 2 のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y = -x^2 + 4x + c$ $(0 \leqq x \leqq 6)$ の最小値が -11 のとき，定数 c の値およびこの関数の最大値を求めよ。

(3) 傾斜角が θ の坂道を 5km 進むと，垂直方向に 100m 登ったことになるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 軸の方程式が $x = 1$ で，2 点 $(-1,\ 5)$，$(2, -1)$ を通る放物線について，次の各問に答えよ。

(1) この放物線の方程式を求めよ。

(2) この放物線が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC において，$\mathrm{BC} = 8\sqrt{5}$，$\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，外接円の半径が $5\sqrt{5}$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)
$$
\begin{aligned}
y &= 4x^2 + ax + 5 \\
&= 4\left(x^2 + \frac{a}{4}x\right) + 5 \\
&= 4\left\{\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \left(\frac{a}{8}\right)^2\right\} + 5 \\
&= 4\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + 5
\end{aligned}
$$

頂点の y 座標が 2 であるから

$$-\frac{a^2}{16} + 5 = 2$$

ゆえに　$a^2 = 48$

よって　$\boldsymbol{a = \pm 4\sqrt{3}}$

(2)
$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 4x + c \\
&= -(x-2)^2 + c + 4
\end{aligned}
$$

$0 \leqq x \leqq 6$ であるから

$x = 2$ で最大値 $c + 4$，$x = 6$ で最小値 $c - 12$

をとる．最小値が -11 であるから

$c - 12 = -11$　ゆえに　$\boldsymbol{c = 1}$

よって，最大値は　$c + 4 = \mathbf{5}$

(3) $\sin\theta = \dfrac{100}{5000} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}$

θ は鋭角であるから

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{50}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{1}{50}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{51}{50} \times \frac{49}{50}} = \frac{\mathbf{7\sqrt{51}}}{\mathbf{50}}
\end{aligned}
$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{50} \div \dfrac{7\sqrt{51}}{50} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7\sqrt{51}}}$

$\boxed{2}$ (1) 直線 $x=1$ を軸とするから，求める関数は $y=a(x-1)^2+q$ とおける．
このグラフが2点 $(-1,\ 5)$，$(2, -1)$ を通るから

$$5=4a+q,\ -1=a+q \quad \text{これを解くと} \quad a=2,\ q=-3$$

よって　$y=2(x-1)^2-3$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x^2-4x-1}$

(2) 放物線と x 軸との共有点の座標は $2x^2-4x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$$

よって，求める線分の長さは　$\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$\boxed{3}$ (1) $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より $c=2R\sin C$ であるから

$$c=2\cdot5\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=20$$

余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$20^2=(8\sqrt{5})^2+b^2-2\cdot8\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

整理して　$b^2-16b-80=0$

$$(b+4)(b-20)=0$$

$b>0$ であるから　$b=20$

よって　$\mathbf{AC=20}$

1.3.5　前期日程 1 日目

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		1	2	3	4	5
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**ソフトウェアサイエンス学科**	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{b+y}{a+x}=5$ であるとき，$\dfrac{2b+3y}{2a+3x}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos^8\theta-2\cos^4\theta\sin^4\theta+\sin^8\theta$ の値を求めよ。

(3) $f(x)=\log_4(1+x)\ (x>0)$ とするとき，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y=2x^2-4x+5$ と，この放物線の頂点 P における接線，および点 Q$(2,\ 5)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の数列について各問に答えよ。

$$1\cdot 1,\ 3\cdot 3,\ 5\cdot 3^2,\ 7\cdot 3^3,\ 9\cdot 3^4,\ \cdots$$

(1) 第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) $S_n=3646$ となるときの n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$ で定義されている。次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)=x^2-2ax+b\ (0\leqq x\leqq 2)$ は $f(1)=1$ であり，最大値と最小値の差が 3 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{b}{a}=5$ より $\quad b=5a \quad \cdots ①$

$\dfrac{b+y}{a+x}=5$ より $\quad b+y=5(a+x) \quad \cdots ②$

① を ② に代入して $\quad 5a+y=5a+5x$

$y=5x \quad \cdots ③$

①，③ より

$$\frac{2b+3y}{2a+3x}=\frac{2\cdot5a+3\cdot5x}{2a+3x}=\frac{5(2a+3x)}{2a+3x}=\mathbf{5}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\cos^8\theta-2\cos^4\theta\sin^4\theta+\sin^8\theta &=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)^2\\
&=\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\}^2\\
&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\\
&=1^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\\
&=\{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)\}^2\\
&=(\cos\theta+\sin\theta)^2(\cos\theta-\sin\theta)^2\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^2(\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\\
&=\frac{1}{4}(1-2\sin\theta\cos\theta) \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

よって $\quad 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

したがって $\quad \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8} \quad \cdots ②$

② を ① に代入して

$$\cos^8\theta-2\cos^4\theta\sin^4\theta+\sin^8\theta=\frac{1}{4}\left\{1-2\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\mathbf{\frac{7}{16}}$$

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_4(1+x)+\log_4\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\log_4(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log_4\left(2+x+\frac{1}{x}\right)$$

$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2+x+\frac{1}{x}\geqq 2+2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=4$$

したがって　$\log_4(1+x)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\geqq\log_4 4=1$

よって，**最小値は　1**

2　$y=2x^2-4x+5$

$$=2(x-1)^2+3$$

であるから，頂点 P の座標は $(1,\ 3)$

よって，P における接線の方程式は

$$y=3 \qquad \cdots ①$$

$y=2x^2-4x+5$ を微分して

$$y'=4x-4$$

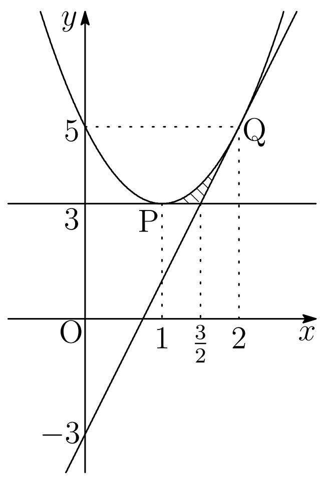
点 $\mathrm{Q}(2,\ 5)$ における接線の傾きは

$$y'=4\cdot2-4=4$$

点 Q における接線の方程式は

$$y-5=4(x-2)$$

ゆえに　$\boldsymbol{y=4x-3}$　$\cdots ②$



①，② の共有点の x 座標は　$3=4x-3$　これを解いて　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，求める面積 S は，図の斜線部分であるから

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{(2x^2-4x+5)-3\}\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\{(2x^2-4x+5)-(4x-3)\}\,dx$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}2(x-1)^2\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}2(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $S_n - 3S_n$ を計算すると

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 1\cdot1 + 3\cdot3 + 5\cdot3^2 + 7\cdot3^3 + \cdots + (2n-1)\cdot3^{n-1} \\
-) & 3S_n = & \qquad 1\cdot3 + 3\cdot3^2 + 5\cdot3^3 + \cdots + (2n-3)\cdot3^{n-1} + (2n-1)\cdot3^n \\ \hline
 & -2S_n = & 1\cdot1 + (2\cdot3 + 2\cdot3^2 + 2\cdot3^3 + \cdots + 2\cdot3^{n-1}) - (2n-1)\cdot3^n
\end{array}
$$

ここで，$2\cdot3 + 2\cdot3^2 + 2\cdot3^3 + \cdots + 2\cdot3^{n-1}$ は，初項 $2\cdot3$，公比 3，項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$2\cdot3 + 2\cdot3^2 + 2\cdot3^3 + \cdots + 2\cdot3^{n-1} = \frac{2\cdot3(3^{n-1}-1)}{3-1} = 3^n - 3$$

よって　　$-2S_n = 1\cdot1 + (3^n - 3) - (2n-1)\cdot3^n$

整理して　　$-2S_n = -(2n-2)\cdot3^n - 2$

したがって　　$\boldsymbol{S_n = (n-1)\cdot3^n + 1}$

(2) (1) の結果から，$3646 = (6-1)\cdot3^6 + 1$ であるから　$\boldsymbol{n = 6}$

等比数列の和

初項 a，末項 l，公比 r の等比数列の和は　$\boldsymbol{\dfrac{rl-a}{r-1}}$

[証明] 末項 l は，$l = ar^{n-1}$ であるから

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{r\cdot ar^{n-1} - a}{r-1} = \frac{rl-a}{r-1}$$ **[証終]**

たとえば，$2\cdot3 + 2\cdot3^2 + 2\cdot3^3 + \cdots + 2\cdot3^{n-1}$ は，$a = 2\cdot3$，$l = 2\cdot3^{n-1}$，$r = 3$ から

$$\frac{rl-a}{r-1} = \frac{3\times2\cdot3^{n-1} - 2\cdot3}{3-1} = 3^n - 3$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2n+3$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) \\ &= 3+2\times\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1) \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

初項は $a_1=3$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項 a_n は　　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

(2)
$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right. \\ &\qquad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax+b \\ &= (x-a)^2-a^2+b \end{aligned}$$

であるから，頂点の座標は $(a, -a^2+b)$

$f(1)=1$ より

$$1=1^2-2a\cdot 1+b \quad \text{すなわち} \quad b=2a \quad \cdots①$$

［1］$a < 0$ のとき，$f(2) - f(0) = 3$ であるから

$$(-4a + b + 4) - b = 3 \text{ を解いて} \quad a = \frac{1}{4}$$

これは，$a < 0$ に反する．

［2］$0 \leqq a < 1$ のとき，$f(2) - f(a) = 3$ であるから

$$(-4a + b + 4) - (-a^2 + b) = 3 \text{ を解いて} \quad a = 2 \pm \sqrt{3}$$

$0 \leqq a < 1$ に注意して　$a = 2 - \sqrt{3}$

① から　$b = 4 - 2\sqrt{3}$

［3］$1 \leqq a < 2$ のとき，$f(0) - f(a) = 3$ であるから

$$b - (-a^2 + b) = 3 \text{ を解いて} \quad a = \pm\sqrt{3}$$

$1 \leqq a < 2$ に注意して　$a = \sqrt{3}$

① から　$b = 2\sqrt{3}$

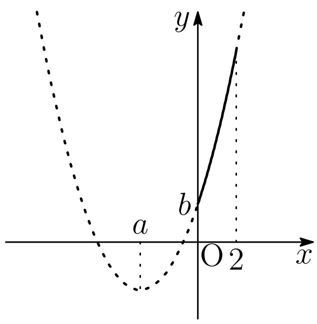
［4］$2 \leqq a$ のとき，$f(0) - f(2) = 3$ であるから

$$b - (-4a + b + 4) = 3 \text{ を解いて} \quad a = \frac{7}{4}$$

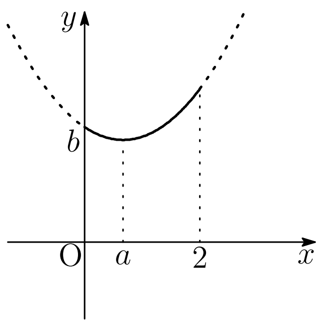
これは，$2 \leqq a$ に反する．

よって，$\boldsymbol{(a,\ b) = (2 - \sqrt{3},\ 4 - 2\sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})}$

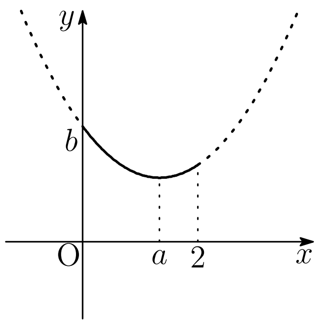
［1］$a < 0$ のとき



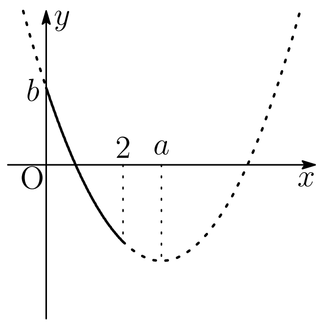
［2］$0 \leqq a < 1$ のとき



［3］$1 \leqq a < 2$ のとき



［4］$2 \leqq a$ のとき



1.3.6　前期日程2日目

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に〇印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **〇印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**ソフトウェアサイエンス学科**	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

1 次の各問に答えよ。

(1) $|\,x-5\,|+|\,2x-1\,|=10$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において，3 辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 2，$\sqrt{3}$，x とする。x を動かすとき，$\angle$A の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(3) 円 $x^2+y^2-4x-8y+k=0$ が直線 $y=x$ から長さ 4 の線分を切り取るとき，定数 k の値を求めよ。

2 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標が -1，2 であり，この 2 つの放物線で囲まれた図形の面積が 9 であるとき，$f(x)$ を求めよ。

3 x，y，z を自然数とする。$5 \leqq x(y+z) \leqq 10$ を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか。

4 平面上に，線分 AB，AC があり，AB $=7$，AC $=10$ である。点 D は線分 AB 上の点で，AD $=3$ であり，2 点 B，D は C を中心とする同一円周上にある。このとき，この円の半径および $\angle$BAC の大きさを求めよ。

5 a は正の定数とする。放物線 $y=a(x-1)^2+2$ と，この放物線の頂点を通り y 軸に平行な直線，およびこの放物線の傾き 2 の接線で囲まれた図形の面積が 3 であるとき，a の値を求めよ。

解答例

1 (1) [1] $x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$|x-5|=-x+5$，$|2x-1|=-2x+1$ であるから

方程式は　$(-x+5)+(-2x+1)=10$

これを解いて　$x=-\dfrac{4}{3}$

これは，$x<\dfrac{1}{2}$ を満たすから，解である.

[2] $\dfrac{1}{2}\leqq x<5$ のとき，$|x-5|=-x+5$，$|2x-1|=2x-1$ であるから

方程式は　$(-x+5)+(2x-1)=10$

これを解いて　$x=6$

これは，$\dfrac{1}{2}\leqq x<5$ に反するから，解ではない。

[3] $5\leqq x$ のとき，$|x-5|=x-5$，$|2x-1|=2x-1$ であるから

方程式は　$(x-5)+(2x-1)=10$

これを解いて　$x=\dfrac{16}{3}$

これは，$5\leqq x$ を満たすから，解である.

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{16}{3}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\&=\frac{x^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2x\cdot 2}=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ であるから，$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$

ゆえに，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2\quad\cdots②$$

よって　$x+\dfrac{1}{x}\geqq 2$

上式で，等号が成り立つのは　$x=\dfrac{1}{x}$　すなわち　$x=1$ のときである.

①，② から　$\cos A\geqq\dfrac{1}{4}\times 2=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$A\leqq 60°$

よって，**$x=1$ のとき ∠A の最大値は 60°** である.

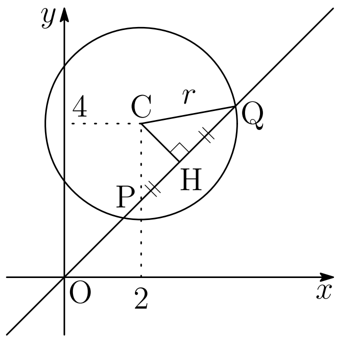
(3) 円の方程式 $x^2+y^2-4x-8y+k=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-4)^2=20-k$$

ゆえに，中心が C(2, 4) で，半径 r が $\sqrt{20-k}$ の円である．

点 C と直線 $x-y=0$ の距離 CH は

$$\mathrm{CH}=\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$



円と直線の共有点を P，Q とすると

PQ $=4$ より　PH $=$ HQ $=2$

直角三角形 CHQ において

$$r^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{HQ}^2$$

であるから

$$20-k=(\sqrt{2})^2+2^2 \qquad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=14}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=x^2$ との交点の x 座標が -1，2 であるから

$$f(-1)-(-1)^2=0,\ \ f(2)-2^2=0$$

$f(x)-x^2$ は x の 2 次式で，$x+1$，$x-2$ を因数にもち，定数 k を用いて

$$f(x)-x^2=k(x+1)(x-2) \quad \cdots ①$$

とおける．ゆえに，この 2 つの放物線で囲まれた図形の面積が 9 であるから

$$\int_{-1}^{2}|\,f(x)-x^2\,|\,dx=9$$

① を上式に代入して

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}|\,k(x+1)(x-2)\,|\,dx&=9\\ -|\,k\,|\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx&=9\\ -|\,k\,|\times\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3&=9\\ \frac{9}{2}|\,k\,|&=9\end{aligned}$$

よって，$k=\pm2$．これを ① に代入して

$$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x-4} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{f(x)=-x^2+2x+4}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y+z \geqq 2$ であるから $x(y+z) \leqq 10$ であるから $x \leqq 5$

［1］$x=1$ のとき，$5 \leqq y+z \leqq 10$

$$\begin{aligned}(y,z)=&(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),\\&(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),\\&(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),\\&(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),\\&(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1),\\&(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\end{aligned}$$

以上の 39 組

［2］$x=2$ のとき，$\dfrac{5}{2} \leqq y+z \leqq 5$　すなわち　$3 \leqq y+z \leqq 5$

$$\begin{aligned}(y,z)=&(1,2),(2,1),\\&(1,3),(2,2),(3,1)\\&(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\end{aligned}$$

以上の 9 組

［3］$x=3$ のとき，$\dfrac{5}{3} \leqq y+z \leqq \dfrac{10}{3}$　すなわち　$2 \leqq y+z \leqq 3$

$(y,z)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の 3 組

［4］$x=4$ のとき，$\dfrac{5}{4} \leqq y+z \leqq \dfrac{5}{2}$　すなわち　$y+z=2$

$(y,z)=(1,1)$ の 1 組

［5］$x=5$ のとき，$1 \leqq y+z \leqq 2$　すなわち　$y+z=2$

$(y,z)=(1,1)$ の 1 組

よって，［1］〜［5］より　$39+9+3+1+1=\mathbf{53}$ (組)

$\boxed{\mathbf{4}}$ C は BD の垂直二等分線上にあるから，C から BD に垂線 CH を引くと，AH $= 5$ であるから

$$\cos A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

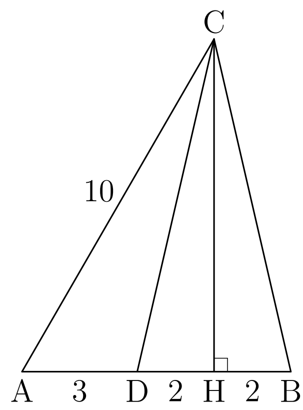
ゆえに　$\angle\mathbf{BAC = 60^\circ}$

また　$\mathrm{CH} = \mathrm{AH}\tan 60^\circ = 5\sqrt{3}$

求める円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} R^2 &= \mathrm{DH}^2 + \mathrm{CH}^2 \\ &= 2^2 + (5\sqrt{3})^2 = 79 \end{aligned}$$

よって，**円の半径は**　$\sqrt{\mathbf{79}}$



$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = a(x-1)^2 + 2$ を微分して

$$y' = 2a(x-1)$$

傾きが 2 の接線の接点の x 座標は

$$2a(x-1) = 2$$

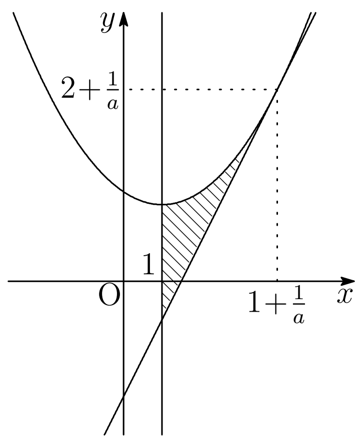
ゆえに　$x = 1 + \dfrac{1}{a}$

接点の座標は $\left(1 + \dfrac{1}{a},\ 2 + \dfrac{1}{a}\right)$

よって，接線の方程式は

$$y - \left(2 + \frac{1}{a}\right) = 2\left\{x - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$y = 2x - \frac{1}{a}$$



右の図の斜線部の面積が S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{1+\frac{1}{a}} \left\{a(x-1)^2 + 2 - \left(2x - \frac{1}{a}\right)\right\} dx \\ &= \left[\frac{a}{3}(x-1)^3 + 2x - x^2 + \frac{x}{a}\right]_1^{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{3a^2} \end{aligned}$$

$S = 3$ であるから　$\dfrac{1}{3a^2} = 3$　　$a > 0$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$

公式

$$\int (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n} + \mathbf{1}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \boldsymbol{C} \qquad (a \text{ は定数，} n = 0, 1, 2, \cdots)$$

1.3.7　後期日程

注意事項

1. この試験問題は,「工学部」・「情報学部」・「生物生命学部」共通となっています。
2. この試験問題は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$まで出題されていますが, 志望学部・学科別に解答すべき問題を定めています。
3. **※印の欄に受験票を確認の上，志望学科名を記入してください。**
4. **下表を十分確認の上，志望学部・学科に○印のある問題番号のみ解答してください。**
5. **○印以外の問題は採点の対象となりませんので十分注意してください。**

志望学科	※　　　　　　　　　　学科

志望学部	志望学科	問題番号				
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$
工学部	**機械工学科**	○	○	○		
	ナノサイエンス学科	○	○			○
	エコデザイン学科	○	○			○
	建築学科	○	○	○		
	宇宙航空システム工学科	○	○	○		
情報学部	**ソフトウェアサイエンス学科**	○	○			○
	電子情報ネットワーク学科	○	○			○
	コンピュータシステムテクノロジー学科	○	○			○
生物生命学部	**応用微生物工学科**	○	○		○	
	応用生命科学科	○	○		○	

6. **この試験問題は，監督者の指示があるまで次のページを開けないでください。**

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ のとき，x^2+xy+y^2 と x^3+y^3 の値を求めよ。

(2) $0 < x < \pi$，$0 < y < \pi$ のとき，次の 2 式を満たす x，y の値を求めよ。

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x - \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(3) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2^{x-2y} = 8 \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) - \log_2 3 = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(t) = at + b$ とするとき，次の各問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = -8$，$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt = -7$ となるように定数 a，b の値を定めよ。

(2) (1) で定めた $f(t)$ について，関数 $G(x) = \displaystyle\int_0^x (t-2)\,f(t)\,dt$ の極値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ SOJODAI の 7 つの文字を一列に並べるとき，次の各問に答えよ。

(1) 並べ方は全部で何通りあるか。

(2) (1) における文字列を 1 つずつ印刷したカードが箱に入っている。この中から 1 枚のカードを取り出すとき，2 つの O の間に 2 つの文字が入っているカードを取り出す確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \dfrac{1}{2}n^2 + 2n$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin(a_k\pi)$ を求めよ。

5 xy 平面において，連立不等式 $y \geqq |x^2-1|$，$y \leqq -x^2+2x+3$ の表す領域を D とする。次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。

解答例

1 (1)

$$x+y = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{2}{1-3} = -1$$

$$xy = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

したがって

$$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = (-1)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (-1)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) = \boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

(2) 与えられた等式から $\sin x = \dfrac{1}{2} - \cos y$ $\cdots$①，$\cos x = \sin y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cdots$②

①，② から

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{1}{2} - \cos y\right)^2 + \left(\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$1 = (\sin^2 y + \cos^2 y) - \cos y - \sqrt{3}\sin y + 1$$

$$\sqrt{3}\sin y + \cos y = 1$$

$$2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$0 < y < \pi$ より $\dfrac{\pi}{6} < y + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{7}{6}\pi$ であるから，上式から

$$y + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \quad すなわち \quad y = \frac{2}{3}\pi$$

これを ② に代入して　$\cos x = 0$

$0 < x < \pi$ より　　$x = \dfrac{\pi}{2}$　　(答) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2},\ y = \frac{2}{3}\pi}$

(3) 第 1 式から　$2^{x-2y} = 2^3$

ゆえに　$x - 2y = 3$　よって　$x = 2y + 3$　$\cdots$①

① を第 2 式に代入して

$$\log_2(3y+3) + \log_2(y+3) - \log_2 3 = 3 \quad \cdots ②$$

真数は正であるから　$3y + 3 > 0$ かつ $y + 3 > 0$

すなわち　$y > -1$　$\cdots$③

② を変形すると　$\log_2(y+1)(y+3) = \log_2 8$

ゆえに　$(y+1)(y+3) = 8$

整理して　$y^2 + 4y - 5 = 0$

よって　$(y+5)(y-1) = 0$

③ に注意して　$y = 1$

これを ① に代入して　$x = 5$　　(答) $\boldsymbol{x = 5,\ y = 1}$

2 (1) $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = -8$ から　$\displaystyle\int_0^2 (at+b)dt = -8$

$$\left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_0^2 = -8$$

ゆえに　$2a + 2b = -8$

したがって　$a + b = -4$　$\cdots$①

$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt = -7$ から　$\displaystyle\int_{-1}^0 (at+b)dt = -7$

$$\left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_{-1}^0 = -7$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2}a + b = -7$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{a = 2,\ b = -6}$

(2) (1) の結果から

$$G(x) = \int_0^x 2(t-2)(t-3)\,dt$$

これを x で微分して

$$G'(x) = 2(x-2)(x-3)$$

$G'(x) = 0$ とすると　$x = 2,\ 3$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　**極大値は**　$G(2) = \displaystyle\int_0^2 2(t-2)(t-3)\,dt = \boldsymbol{\frac{28}{3}}$

極小値は　$G(3) = \displaystyle\int_0^3 2(t-2)(t-3)\,dt = \boldsymbol{9}$

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{7!}{2!} = \mathbf{2520}$ (通り)

(2) 2 つの O とその間に入る 2 文字をひとまとめにし，これと残りの 3 文字の並び方を考えればよい．

O			O			

O の間に入る 2 つの文字の入り方は　${}_5\mathrm{P}_2$ (通り)

ひとまとめにしたものと残りの 3 文字の並び方は　$4!$ (通り)

したがって，並び方の総数は　${}_5\mathrm{P}_2 \times 4!$

よって，求める確率は　${}_5\mathrm{P}_2 \times 4! \div \dfrac{7!}{2!} = \mathbf{\dfrac{4}{21}}$

$\boxed{4}$ (1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + 2n - \left\{\frac{1}{2}(n-1)^2 + 2(n-1)\right\} = n + \frac{3}{2}$$

初項は　$a_1 = S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = \dfrac{5}{2}$

よって，$a_n = n + \dfrac{3}{2}$ は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n = n + \dfrac{3}{2}}$

(2) k が整数のとき

$$\sin(a_k\pi) = \sin\left(k + \frac{3}{2}\right)\pi = (-1)^{k-1}$$

であるから

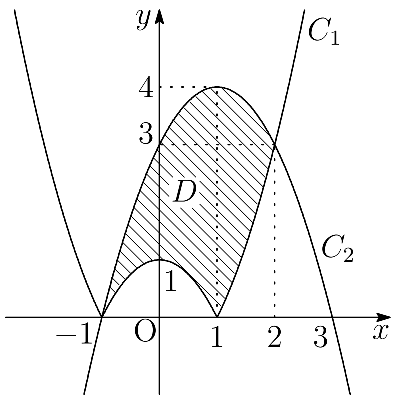
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin(a_k\pi) &= \sum_{k=1}^{n} 3^k\cdot(-1)^{k-1} \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}(-3)^{k-1} \\ &= 3 \times \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\{1-(-3)^n\}}\end{aligned}$$

5 (1) $y=|x^2-1|$，$y=-x^2+2x+3$ の表すグラフをそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=|x^2-1| \\ y=-x^2+2x+3 \end{cases}$$

を解いて　$(-1,\ 0)$，$(2,\ 3)$

D の表す領域は，C_1 の上側，C_2 の下側に共通する領域で，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(2) D の面積を S とすると，右の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-|x^2-1|\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)\}\,dx \\ &\qquad\qquad + \int_{1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}(2x+2)\,dx + \int_{1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx \\ &= \Big[\ x^2+2x\ \Big]_{-1}^{1} + \Big[\ -\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\ \Big]_{1}^{2} = \boldsymbol{\frac{19}{3}} \end{aligned}$$

1.3.8 前期日程 1 日目 (薬学部)80 分

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 正の奇数の列を，次のように群に分ける。

$$1 \,|\, 3, 5 \,|\, 7, 9, 11 \,|\, 13, 15, 17, 19 \,|\, 21, \cdots$$

(a) 第 n 群の最初の数は何か。

(b) 909 は第何群の何番目の数か。

(2) $\triangle$ABC は AB $= 3$，BC $= 3$，CA $= 4$ である。辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PR と BC が平行な $\triangle$PQR を作る。このとき，$\triangle$PQR の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ のグラフと x 軸で囲まれた領域を D(境界を含む) とするとき，次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$x + y$ のとる値の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において，AB $= 2$，AC $= 3$，$\angle$A $= 60^\circ$ とする。辺 AB，AC の垂直二等分線の交点を P とし，直線 AP が辺 BC と交わる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$ として，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\triangle$ABQ の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) m 番目の正の奇数は，$2m-1$ である．

第 n 群の最初の数は，$\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目の正の奇数であり，

$m=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ とすると，求める数は $2m-1$ であるから

$$\begin{aligned}2m-1&=2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1\\&=\boldsymbol{n^2-n+1}\end{aligned}$$

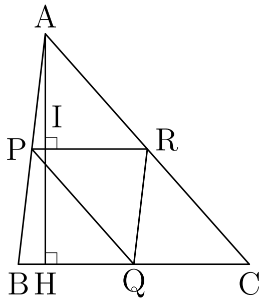
(b) $2m-1=909$ を解いて　$m=455$　ゆえに　909 は 455 番目の奇数.

$$455=\frac{1}{2}\cdot29\cdot30+20$$

であるから，**909 は第 30 群の 20 番目の数**

(2) $2s=3+3+4$ とおくと $s=5$

ヘロンの公式により



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

A から辺 BC に下ろした垂線を AH とすると

$\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot\mathrm{AH}=2\sqrt{5}\qquad\text{ゆえに}\qquad\mathrm{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

AH と PR の交点を I とする．△ABC と △APR は相似であり，その相似比を $1:k$ とすると $(0<k<1)$

$$\mathrm{PR}=k\mathrm{BC}=3k$$

$$\mathrm{IH}=(1-k)\mathrm{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}(1-k)$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PR}\cdot\mathrm{IH}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times3k\times\frac{4\sqrt{5}}{3}(1-k)=2\sqrt{5}k(1-k)\\&=2\sqrt{5}\{-k^2+k\}=2\sqrt{5}\left\{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}\end{aligned}$$

よって　$k=\frac{1}{2}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

2 (1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると
$x = 0,\ 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表は，右のようになる．

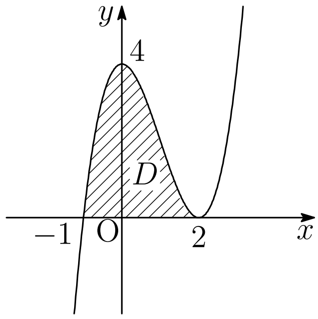
x 軸との共有点の x 座標は　$f(x) = 0$ より

ゆえに　　$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

因数分解をして　　$(x+1)(x-2)^2 = 0$

よって　　$x = -1,\ 2$

領域 D は右の図のようになる．

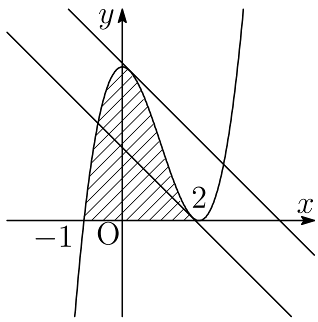


(2) $x + y = k \cdots$ ① とおくと，① は傾き -1，
y 切片 k の直線で，
① と $y = f(x)$ のグラフが接するとき
$f'(x) = -1$ であるから

$3x^2 - 6x = -1$

ゆえに　　$3x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \cdots$ ①

よって　　$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$



k が最大となるのは，グラフから

$$x = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \qquad \cdots ②$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x \quad -\frac{1}{3} \\ 3x^2-6x+1 \,\big)\, x^3 - 3x^2 \qquad\quad +4 \\ x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x \qquad \\ \hline -x^2 - \frac{1}{3}x \ +4 \\ -x^2 + 2x \ -\frac{1}{3} \\ \hline -\frac{7}{3}x + \frac{13}{3} \end{array}$$

また　$y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$= (3x^2 - 6x + 1)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$$

であるから，これに ①，② を代入して

$$y = -\frac{7}{3} \times \frac{3 - \sqrt{6}}{3} + \frac{13}{3} = \frac{18 + 7\sqrt{6}}{9}$$

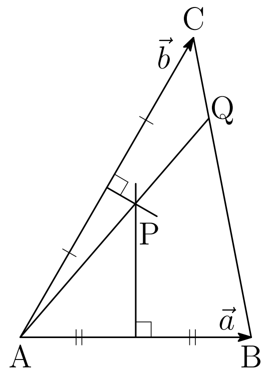
よって，$x = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{3}$，$y = \dfrac{18 + 7\sqrt{6}}{9}$ のとき，最大値

$$\frac{3 - \sqrt{6}}{3} + \frac{18 + 7\sqrt{6}}{9} = \frac{27 + 4\sqrt{6}}{9}$$

をとる．また，上の図から $x = -1$，$y = 0$ のとき，最小値 -1 をとる．

(答) **最大値 $\boldsymbol{\dfrac{27 + 4\sqrt{6}}{9}}$，最小値 $\boldsymbol{-1}$**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}^{\perp}=\vec{b}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$，$\vec{b}^{\perp}=\vec{a}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ とおくと



$$\vec{a}\cdot\vec{a}^{\perp}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{b}^{\perp}=0$$

すなわち　$\vec{a}\perp\vec{a}^{\perp}$，$\vec{b}\perp\vec{b}^{\perp}$

また

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3$$

であるから

$$\vec{a}^{\perp}=\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a},\ \vec{b}^{\perp}=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

P は AB の垂直二等分線上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\vec{a}^{\perp}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+s\vec{b}$$

同様に P は AC の垂直二等分線上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{b}^{\perp}=\frac{1}{2}\vec{b}+t\left(\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=t\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s=t,\ s=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t\quad これを解いて\quad s=\frac{4}{9},\ t=\frac{1}{6}$$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}}$

(2) 実数 k を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}$

Q は BC 上の点であるから　$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{4}{9}k=1$　ゆえに　$k=\dfrac{18}{11}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3\vec{a}+8\vec{b}}{11}$

したがって　$\triangle\mathrm{ABQ}=\dfrac{8}{11}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{8}{11}\times\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{12}{11}\sqrt{3}}$

1.3.9　前期日程 2 日目 (薬学部)80 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $x^3+ax^2+bx-12=0$ が $\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$ (i は虚数単位) を解にもつとき，実数 a，b の値を求めよ。

(2) 6 個の数字 0，1，1，2，2，3 を全部使って 6 桁の整数を作る。

(a) 6 桁の整数はいくつできるか。

(b) 200000 以上の偶数はいくつできるか。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 直線 $y=x$ 上を動く点 P から放物線 $y=x^2+1$ に 2 本の接線を引き，接点を Q，R とする。線分 QR の中点 $\mathrm{M}(X,\ Y)$ とするとき，Y の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に △ABC がある。この平面上の点 P に対して AP の中点を Q，BQ の中点を R，CR の中点を S とする。2 点 P，S が一致しているとき，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △PQR と △ABC との面積比を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}=1+\sqrt{3}\,i$$

これが方程式の解であるから

$$(1+\sqrt{3}\,i)^3+a(1+\sqrt{3}\,i)^2+b(1+\sqrt{3})-12=0$$

ゆえに　$-8+a(-2+2\sqrt{3}\,i)+b(1+\sqrt{3}\,i)-12=0$

整理して　$(-2a+b-20)+(2a+b)\sqrt{3}\,i=0$

a，b は実数であるから　$-2a+b-20=0$，$2a+b=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=10}$

(2) (a) 6 個の数字 0，1，1，2，2，3 の並べ方は，

$$\frac{6!}{1!2!2!1!}=180\quad(\text{通り})$$

数字 0 を一番左に並べ，残りの数字 1，1，2，2，3 の並べ方は

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30\quad(\text{通り})$$

よって，6 桁の整数は　$180-30=150$ (通り)

(b) 200000 以上の偶数は，最高位が 2 または 3，一の位が 0 または 2 であるから，次の 4 つの場合を求めればよい.

［1］ $2\,\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\,0$ の場合

間に 1，1，2，3 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$　(通り)

［2］ $2\,\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\,2$ の場合

間に 0，1，1，3 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$　(通り)

［3］ $3\,\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\,0$ の場合

間に 1，1，2，2 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$　(通り)

［4］ $3\,\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\,2$ の場合

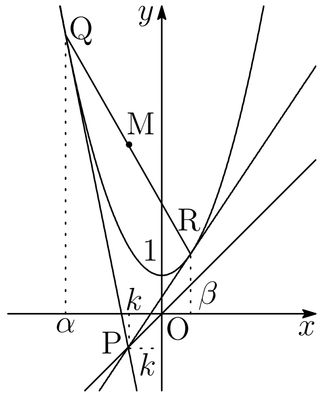
間に 0，1，1，2 が並ぶ場合の総数で　$\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$　(通り)

［1］～［4］から　$12+12+6+12=\mathbf{42}$　(通り)

$\boxed{2}$ P の座標を $(k,\ k)$ とする．$y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$

接点の座標を $(t,\ t^2+1)$ とすると，接線の傾きは $2t$ となるから，その方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)$$



この直線が点 P$(k,\ k)$ を通るから

$$k-(t^2+1)=2t(k-t)$$

よって　　$t^2-2kt+k-1=0$　　　…①

この t に関する2次方程式の判別式 D は

$$D/4=(-k)^2-(k-1)=k^2-k+1$$
$$=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，① は異なる2つの実数解をもつ．

この2つの解を α，β とし，これらに対応する点をそれぞれ Q$(\alpha,\ \alpha^2+1)$，R$(\beta,\ \beta^2+1)$ とする．また解と係数の関係から

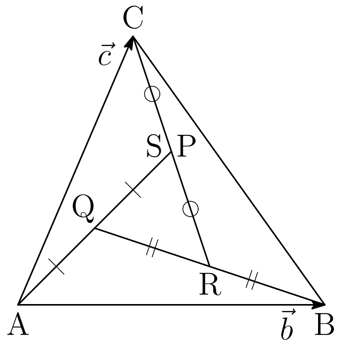
$$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=k-1$$

であるから

$$Y=\frac{(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2}{2}$$
$$=\frac{(2k)^2-2(k-1)+2}{2}=2k^2-k+2$$
$$=2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$$

よって，Y の最小値は　$\boldsymbol{\frac{15}{8}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p}$ とおく.



Q は AP の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{2}\vec{p}$$

R は BQ の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{p}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{p}\end{aligned}$$

S は CR の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\vec{c} + \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{p}\right)\right\} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{8}\vec{p}\end{aligned}$$

2 点 P，S が一致しているとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AS}}$ であるから

$$\vec{p} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{8}\vec{p}$$

よって $\quad \boldsymbol{\vec{p} = \dfrac{2\vec{b} + 4\vec{c}}{7}}$

(2) QA = QS，QB = 2QR であるから

$$\triangle\mathrm{QAB} = 2 \times \triangle\mathrm{PQR} \quad \cdots ①$$

RB = RQ，RC = 2RP

$$\triangle\mathrm{RBC} = 2 \times \triangle\mathrm{PQR} \quad \cdots ②$$

PC = PR，PA = 2PQ であるから

$$\triangle\mathrm{PCA} = 2 \times \triangle\mathrm{PQR} \quad \cdots ③$$

$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{QAB} + \triangle\mathrm{RBC} + \triangle\mathrm{PCA} + \triangle\mathrm{PQR}$ であるから ①，②，③ より

$$\triangle\mathrm{ABC} = 7 \times \triangle\mathrm{PQR}$$

よって $\quad \boldsymbol{\triangle\mathrm{PQR} : \triangle\mathrm{ABC} = 1 : 7}$

1.3.10　後期日程 (薬学部)80 分

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ。

(1) x，y が $(\log_2 x)^2 + \log_2(x^2y) = 2$ を満たすとき，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) 実数 x，y が $3x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $y = |-x^2+4|$ のグラフを C とする。次の各問に答えよ。

(1) 曲線 C に点 $(1,\ 7)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C に点 $(1,\ p)$ からちょうど 2 本の接線が引けるような実数 p の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上の 2 点 A，B の x 座標をそれぞれ a，b $(a < b)$ とする。$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ を満たす点 C がこの放物線上に存在するための a，b の条件を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x^2y>0$

ゆえに　$x>0,\ y>0$

与式を変形すると　$(\log_2 x)^2+2\log_2 x+\log_2 y=2$

$\log_2 y=-(\log_2 x+1)^2+3$

y が最大となるとき，$\log_2 y$ は最大となるから，

$\log_2 x=-1$ のとき，$\log_2 y$ は最大値 3 をとる．

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **のとき，$\boldsymbol{y}$ は最大値 8** をとる．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと　$3x^2-2xy+y^2=2$ は

$$\begin{aligned}
3(r\cos\theta)^2-2r\cos\theta\cdot r\sin\theta+(r\sin\theta)^2&=2\\
r^2(3\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)&=2\\
r^2\{2-(\sin 2\theta-\cos 2\theta)\}&=2\\
r^2\left\{2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}&=2
\end{aligned}$$

このとき，$x^2+y^2=r^2$ の最大値と最小値を求めればよいので

$$r^2=\frac{2}{2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$$

よって　**最大値は**　$\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$

最小値は　$\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

数学 C を用いた別解 (行列 A が ${}^tA=A$ を満たす対称行列を用いた解法)

定理 1

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=\{-(a+c)\}^2-4\cdot1(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1\cdot u_2$ は行列の積 ${}^tu_1u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1)\cdot u_2={}^t(Au_1)u_2={}^tu_1{}^tAu_2={}^tu_1Au_2=u_1\cdot(Au_2)$$

$Au_1=\lambda_1u_1$，$Au_2=\lambda_2u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1u_1)\cdot u_2=u_1\cdot(\lambda_2u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1-\lambda_2)u_1\cdot u_2=0$$

$\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$ であるから　$u_1\cdot u_2=0$　よって　$u_1 \perp u_2$　**証終**

u_1，u_2 を単位固有ベクトルとし，これらを基底とする座標変換を用いることで，$ax^2+2bxy+cy^2$ について次の定理 2 が成り立つ．

定理 2

u_1，u_2 を A の単位固有ベクトルとする．

基底の変換　$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=Xu_1+Yu_2$　　(x, y, X, Y は実数)

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ により次が成り立つ．

$$ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$$

証明 $ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
ax^2+2bxy+cy^2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
\end{aligned}
$$

証終

とくに，この座標変換ついては，次式も成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^2+Y^2
\end{aligned}
$$

(2) の別解

$$3x^2-2xy+y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は　$\lambda^2-4\lambda+2=0$

これを解いて　$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$

したがって　$(2-\sqrt{2})X^2+(2+\sqrt{2})Y^2=2$ のときの X^2+Y^2 の最大値と最小値を求めればよいから

$X^2 = 2+\sqrt{2}$，$Y=0$ のとき　最大値 $2+\sqrt{2}$

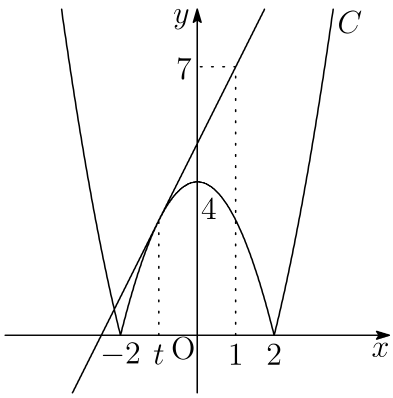
$X=0$，$Y^2=2-\sqrt{2}$ のとき　最小値 $2-\sqrt{2}$

2 (1) 点 $(1,\ 7)$ から C に引いた接線は，この点から曲線 $y=-x^2+4\ (-2<x<2)$ に引いた接線を求めればよい．

$y=-x^2+4$ を微分すると　$y'=-2x$

接点の座標を $(t, -t^2+4)$ とすると，接線の傾きは $-2t$ となるから，その方程式は

$$y-(-t^2+4)=-2t(x-t)\quad\cdots①$$



この直線が点 $(1,\ 7)$ を通るから

$$7-(-t^2+4)=-2t(1-t)$$

よって　　$t^2-2t-3=0$

すなわち　　$(t+1)(t-3)=0$

$-2<t<2$ であるから　$t=-1$

① より　　$\boldsymbol{y=2x+5}$

(2) C に $(1,\ p)$ からちょうど2本の接線が引けるのは，次の2つの場合である．

［1］ $y=-x^2+4\ (-2<x<2)$ に2本の接線が引けるとき

① が $(1,\ p)$ を通るから

$$p-(-t^2+4)=-2t(1-t)\quad すなわち\quad t^2-2t+4-p=0$$

この方程式が $-2<t<2$ に2つの解をもつから

$f(t)=t^2-2t+4-p$ とおくと，$f(t)=(t-1)^2+3-p$

このとき，$f(1)<0$ かつ $f(2)>0$ であるから

$3-p<0$ かつ $4-p>0$　ゆえに　$3<p<4$

［2］ $y=x^2-4\ (x<-2,\ 2<x)$ に2本の接線が引けるとき

$y=x^2-4$ を微分すると　$y'=2x$

接点の座標を $(t,\ t^2-4)$ とすると，接線の傾きは $2t$ となるから，その方程式は

$$y-(t^2-4)=2t(x-t)$$

この直線が点 $(1,\ p)$ を通るから

$$p-(t^2-4)=2t(1-t)\quad すなわち\quad t^2-2t+4+p=0$$

この方程式が $t<-2,\ 2<t$ に2つの解をもつから

$g(t)=t^2-2t+4+p$ とおくと，$g(t)=(t-1)^2+3+p$

このとき，$g(-2)<0$ であるから

$12+p<0$　ゆえに　$p<-12$

［1］，［2］より　$\boldsymbol{p<-12,\ 3<p<4}$

3 点 C の座標を $\left(c,\ \dfrac{1}{2}c^2\right)$ とする．

直線 CA の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}c^2}{a-c}=\dfrac{a^2-c^2}{2(a-c)}=\dfrac{(a+c)(a-c)}{2(a-c)}=\dfrac{a+c}{2}$

直線 CB の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2}{b-c}=\dfrac{b^2-c^2}{2(b-c)}=\dfrac{(b+c)(b-c)}{2(b-c)}=\dfrac{b+c}{2}$

この 2 つの直線は直交するから

$$\frac{a+c}{2}\times\frac{b+c}{2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad c^2+(a+b)c+ab+4=0 \quad \cdots ①$$

c に関する 2 次方程式 ① が a，b と異なる実数解をもてばよい．
この 2 次方程式の係数について

$$\begin{aligned} D &= (a+b)^2-4\cdot1(ab+4) \\ &= (b-a)^2-16 \\ &= (b-a+4)(b-a-4) \end{aligned}$$

$a<b$ であるから　$b-a+4>0$

ゆえに　$b>a+4$ のとき $D>0$，　$b=a+4$ のとき $D=0$

[1] $b>a+4$ のとき
① は異なる 2 つの実数解をもち，これらを c_1，c_2 $(c_1<c_2)$ とすると，解と係数の関係から

$$c_1c_2=ab+4$$

であるから，$c_1=a$，$c_2=b$ ではない．したがって，方程式 ① は a，b と異なる解を少なくとも 1 つもつ．

[2] $b=a+4$ のとき
① は重解をもち，これを c_3 とすると，① の係数から

$$c_3=-\frac{a+b}{2}$$

$c_3\neq a$ から　$a\neq-1$，　$c_3\neq b$ から　$a\neq-3$

よって，求める条件は　**$b>a+4$　または　$b=a+4$ $(a\neq-1,-3)$**

1.4　九州東海大学

1.4.1　一般試験1日目 60分

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 出題科目，ページおよび選択方法は，下表のとおりです。

出 題 科 目	選 択 方 法
数学 I ・数学 A	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学 II ・数学 B	

3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従ってそれぞれ正しく記入し，マークしなさい。
4. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{\boxed{2}\ \boxed{3}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字 (1〜0)，符号 (–) が入ります。1，2，3，$\cdots$ の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の 1，2，3，$\cdots$ で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}}$ に -12 と答えたいとき

	解 答 欄										
1	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
3	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

2. 分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。符号は分子につけ分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\boxed{4}\ \boxed{5}}}{\boxed{6}}$ に $-\dfrac{3}{5}$ と答えたいときは $\dfrac{-3}{5}$ として

	解 答 欄										
4	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
5	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

数学 I・数学 A

I 次の $\boxed{}$ の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) $x=-2$ のとき，$|2x+1|=\boxed{1}$ である。また，$|2x+1|=5$ の解は，$x=\boxed{2}$ である。

$\boxed{1}$ の選択肢　① -5　② -3　③ 1　④ 3　⑤ 5

$\boxed{2}$ の選択肢　① ±5　② $-3,\ 2$　③ $-2,\ 3$　④ ±2　⑤ 2

(2) 2 次関数 $y=2x^2+ax+b$ ($a,\ b$ は定数) は $x=1$ で最小になり，そのグラフは点 $(2,\ 7)$ を通る．このとき，$a=\boxed{3}$，$b=\boxed{4}$ であり，y の最小値は $\boxed{5}$ である。

$\boxed{3}$ の選択肢　① -4　② -3　③ 1　④ 2　⑤ 4

$\boxed{4}$ の選択肢　① -9　② -5　③ 1　④ 3　⑤ 7

$\boxed{5}$ の選択肢　① -11　② $-\dfrac{11}{2}$　③ $\dfrac{7}{8}$　④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 5

(3) 4 個のさいころを同時に投げるとき，3 の倍数の目が少なくとも 1 個出る確率は $\boxed{6}$ であり，3 の倍数の目がちょうど 2 個出る確率は $\boxed{7}$ である。

$\boxed{6}$ の選択肢　① $\dfrac{1}{81}$　② $\dfrac{8}{81}$　③ $\dfrac{32}{81}$　④ $\dfrac{65}{81}$　⑤ $\dfrac{80}{81}$

$\boxed{7}$ の選択肢　① $\dfrac{2}{27}$　② $\dfrac{4}{27}$　③ $\dfrac{8}{27}$　④ $\dfrac{4}{81}$　⑤ $\dfrac{8}{81}$

(4) 半径 3 の円 $\mathrm{O_1}$ と半径 2 の円 $\mathrm{O_2}$ が点 A で外接している。点 A における共通接線を l，A を通らない共通接線の 1 つを m とし，m と 2 円 $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ との接点をそれぞれ B，C，線分 BC と l との交点を M とする。このとき，$\mathrm{BC}=\boxed{8}$，$\mathrm{O_2M}=\boxed{9}$ である。

$\boxed{8}$ の選択肢　① 4　② $\sqrt{21}$　③ $2\sqrt{6}$　④ 5　⑤ $\sqrt{26}$

$\boxed{9}$ の選択肢　① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{2}$　③ 3　④ $\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{15}$

II △ABC において，AB = 4，BC = 5，CA = 6 である。また，△ABC の内接円の中心を I とし，AI の延長と BC との交点を D，△ABC の外接円と A 以外の交点を E とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\cos B = \dfrac{\boxed{10}}{\boxed{11}}$，$\sin B = \dfrac{\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}}$ である。

(2) △ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\boxed{15}\,\boxed{16}}\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$ であり，この三角形の内接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{19}}}{\boxed{20}}$ である。

(3) BD = $\boxed{21}$，DC = $\boxed{22}$ であり，AD = $\boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}$ である。

(4) DE = $\sqrt{\boxed{25}}$ より，面積について △ABC = $\boxed{26}$△BEC であるから，四角形 ABEC の面積は $\boxed{27}\sqrt{\boxed{28}}$ である。

III 0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字から異なる 3 個を選び 3 桁の自然数をつくる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 3 桁の自然数は全部で $\boxed{\boxed{29}\,\boxed{30}\,\boxed{31}}$ 個できる。

(2) 奇数は $\boxed{\boxed{32}\,\boxed{33}}$ 個，偶数は $\boxed{\boxed{34}\,\boxed{35}}$ 個できる。

(3) 5 の倍数は $\boxed{\boxed{36}\,\boxed{37}}$ 個，3 の倍数は $\boxed{\boxed{38}\,\boxed{39}}$ 個できる。

(4) 各位に使われる数字の中で最大の数を M とする。$M \leqq 4$ である 3 桁の自然数は $\boxed{\boxed{40}\,\boxed{41}}$ 個，$M = 4$ である 3 桁の自然数は $\boxed{\boxed{42}\,\boxed{43}}$ 個である。

数学II・数学B

I 次の$\boxed{}$の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) a，bを定数とする。3次方程式 $x^3+ax^2+x+b=0$ が $x=-1,\ 2$ を解にもつとき，$a=\boxed{1}$，$b=\boxed{2}$であり，他の解は $x=\boxed{3}$ である。

$\boxed{1}$の選択肢　① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

$\boxed{2}$の選択肢　① -6　② -4　③ -2　④ 4　⑤ 6

$\boxed{3}$の選択肢　① -3　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 3

(2) x，yが不等式$x^2+y^2 \leqq 5$を満たすとき，$2x+y$は，$x=\boxed{4}$，$y=\boxed{5}$ のとき，最大値$\boxed{6}$をとる。

$\boxed{4}$の選択肢　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$\boxed{5}$の選択肢　① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

$\boxed{6}$の選択肢　① 3　② 4　③ 5　④ $\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{5}$

(3) 連立方程式 $\begin{cases} 4\cdot 2^{x^2} = 4^y \\ \log_2 x = \log_2(y-1)-1 \end{cases}$ を解くと，$x=\boxed{7}$，$y=\boxed{8}$ である。

$\boxed{7}$の選択肢　① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

$\boxed{8}$の選択肢　① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

(4) 関数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ の周期は$\boxed{9}$であり，$y=f(x)$ のグラフは，$y=\boxed{10}\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に$\boxed{11}$だけ平行移動したものである。ただし，$\boxed{10}>0$，$0 \leqq \boxed{11} \leqq \pi$ とする。

$\boxed{9}$の選択肢　① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ π　④ 2π　⑤ 4π

$\boxed{10}$の選択肢　① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ 3　⑤ $2\sqrt{3}$

$\boxed{11}$の選択肢　① $\dfrac{\pi}{12}$　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{5}{12}\pi$　⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$

II a を定数とする。2つの放物線 $C_1 : y = x(x+4)$，$C_2 : y = -2x(x-a)$ があり，C_1 と C_2 は原点において共通接線 l をもつ。また，点 $(-1, -7)$ を通る C_1 の接線のうち傾きが負であるものを m とし，l と m の交点を A とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 直線 l の方程式は $y = \boxed{12}\,x$ であり，$a = \boxed{13}$ である。

(2) 直線 m の方程式は $y = -\boxed{14}\,x - \boxed{15}$ であり，

A$\left(\dfrac{\boxed{\boxed{16}\ \boxed{17}}}{\boxed{18}},\ \boxed{\boxed{19}\ \boxed{20}}\right)$ である。

(3) C_1 と l，m で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ である。

(4) 直線 $n : y = kx\ (k < 0)$ と C_2 との原点以外の交点の x 座標は $x = \dfrac{\boxed{23} - k}{\boxed{24}}$ である。したがって，C_2 と n で囲まれた図形の面積が 9 のとき，$k = \boxed{\boxed{25}\ \boxed{26}}$ である。

III 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和をそれぞれ S_n，T_n とすると，

$$S_n = n^2,\ T_n = \frac{3}{2}b_n + 2n - 4\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つ。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $a_1 = \boxed{27}$ であり，$a_n = \boxed{28}\,n - \boxed{29}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ である。

(2) $b_1 = \boxed{30}$ であり，$b_{n+1} = \boxed{31}\,b_n - \boxed{32}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ が成り立つから，$b_n = \boxed{33} \cdot \boxed{34}^{\,n-1} + \boxed{35}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ である。

(3) $c_n = \dfrac{b_n - 2}{2}$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k = \boxed{36}^{\,n}(n - \boxed{37}) + \boxed{38}$ である。

解答例

数学 I・数学 A

I (1) $x=-2$ のとき　$|2x+1|=|2\cdot(-2)+1|=|-3|=\mathbf{3}$

次に　$|2x+1|=5$ より　　$2x+1=\pm5$

ゆえに　　$2x+1=5$ のとき　$x=2$

　　　　　$2x+1=-5$ のとき　$x=-3$

よって　　$\boldsymbol{x=-3,\ 2}$

(2) 頂点の x 座標が 1 であるから

$$-\frac{a}{2\cdot2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=-4}$$

また，放物線 $y=2x^2-4x+b$ が点 $(2,\ 7)$ を通るから

$$7=2\cdot2^2-4\cdot2+b \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{b=7}$$

ゆえに　$$\begin{aligned}y&=2x^2-4x+7\\&=2(x-1)^2+5\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y}$ **の最小値は　5**

(3) 3 の倍数の目が出ない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

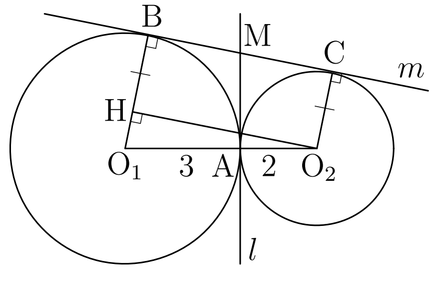
したがって，3 の倍数の目が少なくとも 1 個出る確率は

$$1-\frac{16}{81}=\boldsymbol{\frac{65}{81}}$$

次に，3 の倍数の目がちょうど 2 個出る確率は

$$_4C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{8}{27}}$$

(4) 図のように，O_2 から線分 O_1B に垂線 O_2H を下ろすと



$$O_1H=O_1B-O_2C=3-2=1$$

$\triangle O_1O_2H$ は直角三角形であるから

$$O_2H^2=O_1O_2{}^2-O_1H^2$$

よって　$BC=O_2H=\sqrt{5^2-1^2}=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

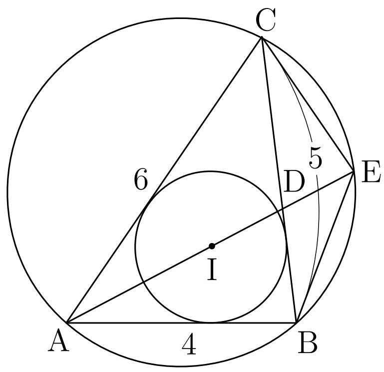
円 O_1 の 2 点 A，B における接線の交点が M であるから　$MA=MB$

円 O_2 の 2 点 A，C における接線の交点が M であるから　$MA=MC$

ゆえに　$MB=MC$　したがって　$MC=\sqrt{6}$

$\triangle O_2CM$ は直角三角形であるから　$O_2M=\sqrt{MC^2+O_2C^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

II (1) △ABC に余弦定理を適用して



$$\cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

$\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

(2) △ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

$s = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ とおくと　$s = \dfrac{1}{2}(4+5+6) = \dfrac{15}{2}$

△ABC の内接円の半径を r とすると，$S = rs$ であるから

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = r \times \frac{15}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

(3) AD は ∠CAB の二等分線であるから　BD : DC = AB : AC

ゆえに　　BD : DC = 4 : 6 = 2 : 3

よって　　$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \dfrac{2}{2+3} = \mathbf{2}$，$\mathrm{DC} = \mathrm{BC} \times \dfrac{3}{2+3} = \mathbf{3}$

次に，$\mathrm{AD} = x$，$\angle\mathrm{ADB} = \theta$ とおくと　$\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \theta$

△ADB に余弦定理を適用して

$$4^2 = x^2 + 2^2 - 2x\cdot2\cos\theta$$

よって　　$x^2 - 4x\cos\theta - 12 = 0$　　$\cdots$①

△ADC に余弦定理を適用して

$$6^2 = x^2 + 3^2 - 2x\cdot3\cos(180^\circ - \theta)$$

よって　　$x^2 + 6x\cos\theta - 27 = 0$　　$\cdots$②

① × 3 + ② × 2 より　　$5x^2 - 90 = 0$

$x > 0$ であるから　　$\mathrm{AD} = x = \sqrt{18} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}$

(4) D における対頂角から　$\angle BDA = \angle EDC$

$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角から　$\angle DAB = \angle DCE$

ゆえに　　$\triangle DAB \backsim \triangle DCE$

よって，$DE : DB = DC : DA$ であるから

$DE : 2 = 3 : 3\sqrt{2}$　ゆえに　$\mathbf{DE = \sqrt{2}}$

$\triangle ABC : \triangle BEC = AD : DE$ であるから

$\triangle ABC : \triangle BEC = 3\sqrt{2} : \sqrt{2} = 3 : 1$

ゆえに　$\triangle ABC = 3\triangle BEC$

したがって，四角形 ABEC の面積は

$$\triangle ABC \times \frac{4}{3} = \frac{15\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3} = \mathbf{5\sqrt{7}}$$

III (1) 百の位には 0 以外の数字であるから　5 通り

十の位と一の位は残りの 5 個の数字から 2 個を並べるから　${}_5P_2$ 通り

よって，3 桁の自然数の総数は　$5 \times {}_5P_2 = \mathbf{100}$ (個)

(2) 奇数となるのは，一の位が 1，3，5 の 3 通り

百の位は 0 以外の 4 通り，十の位は残りの 4 通り

よって，3 桁の奇数は　$4 \times 4 \times 3 = \mathbf{48}$ (個)

したがって，これと (1) の結果から，3 桁の偶数の個数は

$100 - 48 = \mathbf{52}$ (個)

(3) 5 の倍数となるのは，一の位が 0，5 の場合である.

［1］<u>一の位が 0 になる数</u>

他の位には，残りの 5 個の数字から 2 個とって並べるから，

その総数は ${}_5P_2 = 20$ (個)

［2］<u>一の位が 5 になる数</u>

百の位は 0 以外の 4 通り，十の位は残りの 4 通りであるから，

その総数は $4 \times 4 = 16$ (個)

したがって，5 の倍数の総数は　$20 + 16 = \mathbf{36}$ (個)

3 の倍数となるのは，各位の和が 3 の倍数である．

［A］<u>0 を含む数であるとき</u>

$\{0,1,2\}$，$\{0,1,5\}$，$\{0,2,4\}$，$\{0,4,5\}$ の 4 つの場合である．
百の位は 0 以外の 2 通りで，十の位と一の位は残りの 2 個を並べるから，その総数は　$4 \times 2 \times {}_2\mathrm{P}_2 = 16$

［B］<u>0 を含まない数であるとき</u>

$\{1,2,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$ の 4 つの場合で，
その総数は　$4 \times {}_3\mathrm{P}_3 = 24$ (個)

［A］，［B］より 3 の倍数となる数の総数は　$16 + 24 = \mathbf{40}$ (個)

(4) $M \leqq 4$ である 3 桁の自然数は $\{0,1,2,3,4\}$ からなる 3 桁の自然数である．
百の位は 0 以外の数字であるから　4 通り
十の位と一の位は残りの 4 個の数字から 2 個を並べるから　${}_4\mathrm{P}_2$ 通り
よって，$M \leqq 4$ となる 3 桁の自然数の総数は　$4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = \mathbf{48}$ (個)

$M \leqq 3$ である 3 桁の自然数は $\{0,1,2,3\}$ からなる 3 桁の自然数である．
百の位は 0 以外の数字であるから　3 通り
十の位と一の位は残りの 3 個の数字から 2 個を並べるから　${}_3\mathrm{P}_2$ 通り
よって，$M \leqq 3$ となる 3 桁の自然数の総数は　$3 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 18$ (個)

$M = 4$ である 3 桁の自然数の個数は，$M \leqq 4$ である自然数の個数から $M \leqq 3$ である自然数の個数を引けばよいから

$$48 - 18 = \mathbf{30} \text{ (個)}$$

	解	答	欄								
1	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
2	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
3	⊖	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
4	⊖	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
5	⊖	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
6	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
7	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
8	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
9	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
10	⊖	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
11	⊖	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
12	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
13	⊖	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
14	⊖	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
15	⊖	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
16	⊖	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
17	⊖	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
18	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
19	⊖	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
20	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
21	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
22	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
23	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
24	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
25	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
26	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
27	⊖	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
28	⊖	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
29	⊖	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
30	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**

	解	答	欄								
31	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
32	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
33	⊖	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
34	⊖	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
35	⊖	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
36	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
37	⊖	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
38	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
39	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
40	⊖	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
41	⊖	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
42	⊖	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
43	⊖	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**

解答例

数学II・数学B

I (1) -1，2 がこの方程式の解であるから

$$(-1)^3 + a\cdot(-1)^2 + (-1) + b = 0$$
$$2^3 + a\cdot 2^2 + 2 + b = 0$$

式を整理すると

$$a + b - 2 = 0,\ 4a + b + 10 = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -4,\ b = 6}$

よって，方程式は

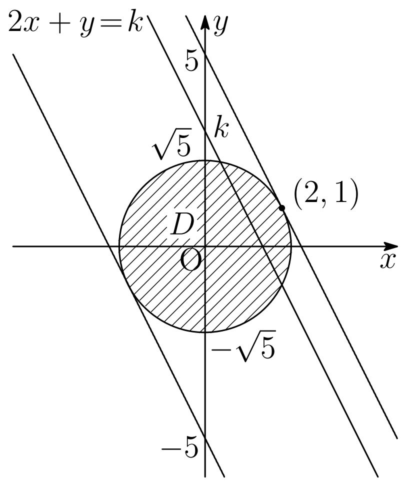
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

左辺が $x+1$，$x-2$ を因数にもつことに注意して因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x-3) = 0$$

したがって，求める**他の解は**　　**3**

(2) 不等式 $x^2 + y^2 \leqq 5$ の表す領域 D は，右の図の斜線部分 (境界線を含む).



$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots ①$$
$$2x + y = k \quad \cdots ②$$

とおくと，② は傾き -2 の直線を表す.

直線 ② が領域 D と共有点をもつような k の値は図から，直線 ② が円 ① に接するとき，最大または最小となる．このとき

$x^2 + (k-2x)^2 = 5$ から

$$5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \quad \cdots ③$$

について　$D/4 = (-2k)^2 - 5(k^2 - 5) = 0$

ゆえに　　$k = \pm 5$

よって k の最大値は 5 であり，これを ③ に代入して　$x = 2$

さらに ② から　$y = 1$

したがって　　$\boldsymbol{x = 2,\ y = 1}$ のとき，k は**最大値 5** をとる.

(3) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $y-1>0$

すなわち　$x>0$ かつ $y>1$ $\cdots$①

第 1 式を変形して　$2^{2+x^2}=2^{2y}$

すなわち　$2+x^2=2y$ $\cdots$②

第 2 式を変形して　$\log_2 x=\log_2 \dfrac{y-1}{2}$

$x=\dfrac{y-1}{2}$

すなわち　$y=2x+1$ $\cdots$③

③ を ② に代入して　$2+x^2=2(2x+1)$

整理して　$x^2-4x=0$

ゆえに　$x(x-4)=0$

①,③ に注意して　$\boldsymbol{x=4,\ y=9}$

(4)
$$\begin{aligned}\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x &= 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは**周期が $\boldsymbol{\pi}$** で，$y=\mathbf{2}\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ だけ平行移動したものである.

II (1) 放物線 C_1 について

$y=x^2+4x$ より $y'=2x+4$ であるから　$x=0$ のとき $y'=4$

放物線 C_2 について

$y=-2x^2+2ax$ より $y'=-4x+2a$ であるから　$x=0$ のとき $y'=2a$

C_1 と C_2 は原点において共通接線 l をもつから

$4=2a$　これを解いて　$\boldsymbol{a=2}$

また，l の方程式は　$\boldsymbol{y=4x}$

(2) 接点の座標を $(p,\ p^2+4p)$ をとすると，接線の傾きは $2p+4$ となり，条件から

$$2p+4<0 \quad \text{すなわち} \quad p<-2 \quad \cdots ①$$

接線の方程式は

$$y-(p^2+4p)=(2p+4)(x-p) \quad \cdots ②$$

この直線が点 $(-1,-7)$ を通るから

$$-7-(p^2+4p)=(2p+4)(-1-p)$$

よって　　$p^2+2p-3=0$

すなわち　　$(p+3)(p-1)=0$

① に注意して　　$p=-3$

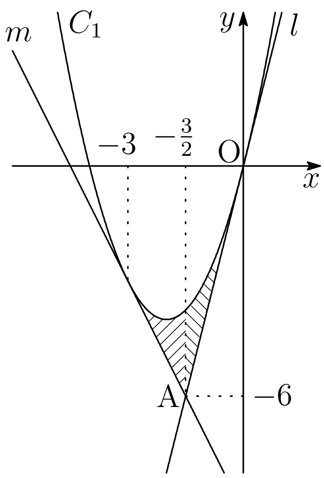
したがって，m は，点 $(-3,-3)$ を通り，傾き -2 の直線であるから

$$y-(-3)=-2\{x-(-3)\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x-9}$$

l と m の交点 A の座標は,

連立方程式 $\begin{cases} y=4x \\ y=-2x-9 \end{cases}$ を解いて　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{-\frac{3}{2}}, \boldsymbol{-6}\right)$

(3) C_1 と l，m で囲まれた図形は右の図の斜線部分で，その面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} \{(x^2+4x)-(-2x-9)\}dx \\ &\qquad + \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \{(x^2+4x)-4x\}dx \\ &= \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} (x+3)^2\,dx + \int_{-\frac{3}{2}}^{0} x^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{-\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} \\ &= \frac{9}{8}+\frac{9}{8} = \boldsymbol{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

公式

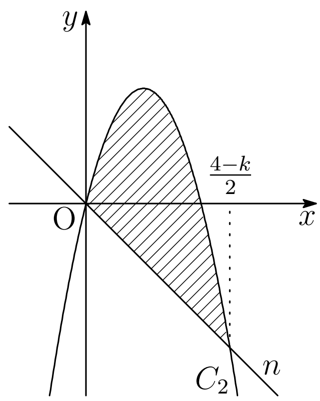
$$\int \boldsymbol{(x+a)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C} \quad (a\text{ は定数，}n=0,1,2,\cdots)$$

(4) C_2 と n の共有点の x 座標は

$$-2x^2+4x=kx$$

よって $x(2x-4+k)=0$

すなわち $x=0,\ \boldsymbol{\dfrac{4-k}{2}}$



C_2 と n で囲まれた図形は右の図の斜線部分で，その面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{4-k}{2}} \{(-2x^2+4x)-kx\}dx \\ &= -2\int_0^{\frac{4-k}{2}} x\left(x-\frac{4-k}{2}\right)dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4-k}{2}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{4-k}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

このとき，$S_2=9$ であるから

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4-k}{2}\right)^3 = 9 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{4-k}{2}\right)^3 = 3^3$$

ゆえに $\dfrac{4-k}{2}=3$ これを解いて $\boldsymbol{k=-2}$

III (1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

初項は $a_1 = S_1 = 1^2 = \mathbf{1}$

よって，$a_n = 2n - 1$ は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項は $\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$

(2) $b_1 = T_1$ であるから，$T_n = \dfrac{3}{2}b_n + 2n - 4$ に $n = 1$ を代入して

$$b_1 = \frac{3}{2}b_1 + 2{\cdot}1 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_1 = 4}$$

$T_{n+1} - T_n = b_{n+1}$ であるから

$$\left\{\frac{3}{2}b_{n+1} + 2(n+1) - 4\right\} - \left(\frac{3}{2}b_n + 2n - 4\right) = b_{n+1}$$

ゆえに $\boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n - 4}$

これは，$b_{n+1} - 2 = 3(b_n - 2)$ と変形できる.

よって，数列 $\{b_n - 2\}$ は，初項が，$b_1 - 2 = 2$，公比が 3 の等比数列であるから

$$b_n - 2 = 2{\cdot}3^{n-1} \qquad \cdots ①$$

すなわち $\boldsymbol{b_n = 2{\cdot}3^{n-1} + 2}$

(3) ① から $c_n = \dfrac{b_n - 2}{2} = 3^{n-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k c_k &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1){\cdot}3^{k-1} \\ &= 1{\cdot}1 + 3{\cdot}3 + 5{\cdot}3^2 + \cdots + (2n-1){\cdot}3^{n-1}\end{aligned}$$

であるから，$U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k$ とおいて

$$\begin{aligned} U_n &= 1{\cdot}1 + 3{\cdot}3 + 5{\cdot}3^2 + \cdots + (2n-1){\cdot}3^{n-1} \\ 3U_n &= \qquad 1{\cdot}3 + 3{\cdot}3^2 + \cdots + (2n-3){\cdot}3^{n-1} + (2n-1){\cdot}3^n \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$U_n - 3U_n = 1 + 2(3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1){\cdot}3^n$$

よって
$$-2U_n = 1 + 2{\cdot}\frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - (2n-1){\cdot}3^n$$

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k = U_n = \boldsymbol{3^n(n-1) + 1}$

	解	答	欄								
1	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
4	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
5	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
6	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
7	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
8	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
9	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
10	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
11	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
12	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
13	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
14	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
15	−	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	0
16	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
17	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
18	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
19	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
21	−	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	0
22	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
23	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
24	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
25	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
26	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
27	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
29	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
30	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
31	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
32	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
33	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
34	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
35	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
36	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
37	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
38	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0

1.4.2 一般試験2日目 60分

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 出題科目，ページおよび選択方法は，下表のとおりです。

出 題 科 目	選 択 方 法
数学I ・数学A	左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
数学II ・数学B	

3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従ってそれぞれ正しく記入し，マークしなさい。
4. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\ 1\ }$，$\boxed{\boxed{\ 2\ }\ \boxed{\ 3\ }}$ などには，特に指示がないかぎり，数字 (1〜0)，符号 (−) が入ります。1，2，3，$\cdots$ の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の1，2，3，$\cdots$ で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\boxed{\ 1\ }\ \boxed{\ 2\ }\ \boxed{\ 3\ }}$ に -12 と答えたいとき

	解	答	欄								
1	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
2	⊖	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
3	⊖	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

2. 分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。符号は分子につけ分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\boxed{\ 4\ }\ \boxed{\ 5\ }}}{\boxed{\ 6\ }}$ に $-\dfrac{3}{5}$ と答えたいときは $\dfrac{-3}{5}$ として

	解	答	欄								
4	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
5	⊖	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪
6	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

数学 I・数学 A

I 次の$\boxed{}$の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$，$y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき，$x^2+y^2 = \boxed{1}$，$x^3-y^3 = \boxed{2}$ である。

$\boxed{1}$の選択肢　① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

$\boxed{2}$の選択肢　① $2\sqrt{5}$　② $6\sqrt{5}$　③ $7\sqrt{5}$　④ $8\sqrt{5}$　⑤ $9\sqrt{5}$

(2) a を定数とする。x の 2 次不等式 $ax^2-4x+a+3<0$ の解がすべての実数となるとき，a の値の範囲は$\boxed{3}$である。

$\boxed{3}$の選択肢　① $a<-4,\ 1<a$　② $-4<a<1$　③ $-4<a<0$　④ $a<-4$　⑤ $a<-1$

(3) $0^\circ \leqq x < 90^\circ$ とする。x が等式 $3\tan x = 2\cos x$ を満たすとき $\boxed{4}\sin^2 x + \boxed{5}\sin x - 2 = 0$ であるから，$x = \boxed{6}$ である。

$\boxed{4}$の選択肢　① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

$\boxed{5}$の選択肢　① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

$\boxed{6}$の選択肢　① 0°　② 30°　③ 45°　④ 60°　⑤ 90°

(4) 6 人を 3 人ずつ 2 組に分ける方法は$\boxed{7}$通りあり，6 人を A，B の 2 組に分ける方法は$\boxed{8}$通りある。ただし，A，B どちらの組にも，少なくとも 1 人は入っているものとする。

$\boxed{7}$の選択肢　① 10　② 15　③ 20　④ 30　⑤ 45

$\boxed{8}$の選択肢　① 31　② 32　③ 41　④ 62　⑤ 64

II 赤玉4個，白玉3個，青玉2個が入っている袋がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) この袋の中から3個の玉を同時に取り出すとき，

(ア) 取り出した玉の色が1種類になる確率は $\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{\boxed{10}\,\boxed{11}}}$ である。

(イ) 取り出した玉の色が3種類になる確率は $\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$ である。

(ウ) 取り出した玉の色が2種類になる確率は $\dfrac{\boxed{\boxed{14}\,\boxed{15}}}{\boxed{\boxed{16}\,\boxed{17}}}$ である。

(エ) 取り出される青玉の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ 個である。

(2) この袋から3個の玉を同時に取り出し，玉を調べてから元に戻すことを3回行うとき，

(ア) 取り出した玉の色について，3回のうち2回が3種類，1回が1種類になる確率は $\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{\boxed{21}\,\boxed{22}\,\boxed{23}}}$ である。

(イ) 各回で取り出した青玉の個数がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{\boxed{25}\,\boxed{26}}}$ である。

III a を実数の定数とする。2次関数 $f(x) = x^2 + ax + a + 3$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の軸が直線 $x = 2$ のとき，$a = \boxed{\boxed{27}\,\boxed{28}}$ であり，頂点の y 座標は $\boxed{\boxed{29}\,\boxed{30}}$ である。

(2) $f(x) < 0$ を満たす x が存在するとき，
a の値の範囲は $a < -\boxed{31}$，$\boxed{32} < a$ である。

(3) $f(x) < 0$ を満たす整数 x が1，2だけのとき，
a の値の範囲は $\boxed{\boxed{33}\,\boxed{34}} \leqq a < \dfrac{\boxed{\boxed{35}\,\boxed{36}}}{\boxed{37}}$ である。

(4) $4 < a < 10$ とする。このとき，放物線 $y = f(x)$ の頂点の x 座標 p のとりうる値の範囲は，$\boxed{\boxed{38}\,\boxed{39}} < p < \boxed{\boxed{40}\,\boxed{41}}$ である。したがって，$f(x)$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値が22のとき，$a = \boxed{42}$ であり，最小値は $\boxed{43}$ である。

数学II・数学B

I 次の$\boxed{}$の中に最も適する答えを下の選択肢の中から選びなさい。

(1) 2次方程式$2x^2+x+3=0$の2つの解をα，βとすると，$2\alpha-1$，$2\beta-1$を解とする2次方程式のうち，x^2の係数が1であるものは$x^2+\boxed{1}x+\boxed{2}=0$である。

$\boxed{1}$の選択肢 ① -4 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

$\boxed{2}$の選択肢 ① -6 ② -4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

(2) 等差数列の第6項が-14，初項から第10項までの和が-150であるとき，第$\boxed{3}$項は0であり，第11項から第20項までの和は$\boxed{4}$である。

$\boxed{3}$の選択肢 ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$\boxed{4}$の選択肢 ① 10 ② 30 ③ 50 ④ 70 ⑤ 90

(3) aを定数とする。関数$f(x)=x^3-3x+a$の$0 \leqq x \leqq 2$における最小値が3であるとき，$a=\boxed{5}$であり，最大値は$\boxed{6}$である。

$\boxed{5}$の選択肢 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\boxed{6}$の選択肢 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

(4) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{AB}=\sqrt{33}$である$\triangle\mathrm{OAB}$について，辺ABを$1:2$に内分する点をCとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{7}$であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\boxed{8}$である。

$\boxed{7}$の選択肢 ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

$\boxed{8}$の選択肢 ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

II $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $f(x) = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ を $\sin 2x$，$\cos 2x$ で表すと，

$$f(x) = \boxed{9}\sin 2x + \boxed{10}\cos 2x + \boxed{11}$$

である。

(2) (1) より，$f(x)$ は，

$$f(x) = \boxed{12}\sin(2x + \alpha) + \boxed{13}$$

と表すことができる。ただし，α は，

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{16}}{\boxed{17}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす。

(3) $f(x)$ は，

$x = \dfrac{\pi}{\boxed{18}} - \dfrac{\alpha}{\boxed{19}}$ のとき，最大値 $\boxed{20}$，

$x = \dfrac{\pi}{\boxed{21}}$ のとき，最小値 $-\boxed{22}$

をとる。

(4) $f(x)$ が最大になるとき，$\sin 2x = \dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$，$\cos 2x = \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}$ である。

III k を定数とする。円 $C : x^2 + y^2 - 4 + 2k(x - 3y + 2) = 0$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 円 C が原点を通るとき，円 C の中心は $\left(\boxed{\boxed{27}\,\boxed{28}},\ \boxed{29}\right)$，半径は $\sqrt{\boxed{\boxed{30}\,\boxed{31}}}$ である。

(2) 円 C は k の値に関係なく定点 A$\left(\boxed{\boxed{32}\,\boxed{33}},\ \boxed{34}\right)$，B$\left(\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}},\ \dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}}\right)$ を通る。

(3) 円 C の中心 P の座標は $(\boxed{39}k,\ \boxed{40}k)$ と表せるから，P は直線 $y = \boxed{\boxed{41}\,\boxed{42}}\,x$ 上にある。また，円 C の半径は，

$k = \dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{45}\sqrt{\boxed{\boxed{46}\,\boxed{47}}}}{\boxed{48}}$ をとる。

(4) 円 C と x 軸が接するとき，$k = \boxed{49}$ である。

解答例

数学 I・数学 A

I (1)

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$
$$=\frac{(5+2\sqrt{5}+1)+(5-2\sqrt{5}+1)}{5-1}=3$$
$$x-y=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$
$$=\frac{(5+2\sqrt{5}+1)-(5-2\sqrt{5}+1)}{5-1}=\sqrt{5}$$
$$xy=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=1$$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot 1=\mathbf{7}$$

さらに，上式から

$$x^3-y^3=(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}=\sqrt{5}(7+1)=\boldsymbol{8\sqrt{5}}$$

(2) 2 次不等式の判別式を D とすると

$$D/4=(-2)^2-a(a+3)=-(a+4)(a-1)$$

x^2 の係数および D の符号について，$a<0$ かつ $D<0$ であるから

$$-(a+4)(a-1)<0$$
$$(a+4)(a-1)>0$$

ゆえに　$a<-4,\ 1<a$

これと $a<0$ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a<-4}$

(3) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから，与えられた等式は

よって　$3\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=2\cos x$

$$3\sin x=2\cos^2 x$$
$$3\sin x=2(1-\sin^2 x)$$

ゆえに　$\boldsymbol{2\sin^2 x+3\sin x-2=0}$

$$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$$

$0^\circ \leqq x<90^\circ$ より $0\leqq \sin x<1$ であるから

$\sin x=\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=30^\circ}$

(4) 6人を3人ずつ2組に分ける方法は，Xに3人，Yに3人の2つの組に分けることを考え，X，Yの区別をなくすことで求めることができる。

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{1}{2} = \mathbf{10}$$

6人をA，Bの2組に分ける方法は　$2^6 = 64$ (通り)

これからAだけに入る場合とBだけに入る場合を除いて

$$64 - 2 = \mathbf{62} \text{ (通り)}$$

II (1)(ア) 取り出した玉の色が1種類であるのは，3個とも赤玉または3個とも白玉のときであり，これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \mathbf{\frac{5}{84}}$$

(イ) 取り出した玉の色が3種類であるのは，赤玉，白玉，青玉がそれぞれ1個のときであるから，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{24}{84} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

(ウ) (ア)と(イ)の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{5}{84} + \frac{24}{84}\right) = \mathbf{\frac{55}{84}}$$

(エ) 袋の中から個の玉を取り出すとき

青玉0個の確率は　$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{35}{84} = \dfrac{5}{12}$

青玉1個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{42}{84} = \dfrac{1}{2}$

青玉2個の確率は　$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{7}{84} = \dfrac{1}{12}$

したがって，青玉の個数の期待値は

$$0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2)(ア) ${}_3\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 \times \dfrac{5}{84} = \mathbf{\dfrac{5}{343}}$

(イ) $3! \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \mathbf{\dfrac{5}{48}}$

III (1) $y = x^2 + ax + a + 3$ の軸の方程式は $x = -\dfrac{a}{2\cdot 1} = -\dfrac{a}{2}$ であるから

$$-\frac{a}{2} = 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a = -4}$$

このとき　$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$

したがって，**頂点の y 座標は**　$\boldsymbol{-5}$

(2) x^2 の係数は正であるから，$f(x) < 0$ を満たす x が存在するための条件は $D > 0$

したがって　$a^2 - 4\cdot 1(a+3) > 0$

$a^2 - 4a - 12 > 0$

ゆえに　$(a+2)(a-6) > 0$

よって　$\boldsymbol{a < -2,\ 6 < a}$

(3) $f(x) < 0$ を満たす整数 x が 1，2 だけである条件は

$$f(0) \geqq 0, \quad f(1) < 0, \quad f(2) < 0, \quad f(3) \geqq 0$$

であるから

$f(0) \geqq 0$ より　$a + 3 \geqq 0$　すなわち　$a \geqq -3$

$f(1) < 0$ より　$2a + 4 < 0$　すなわち　$a < -2$

$f(2) < 0$ より　$3a + 7 < 0$　すなわち　$a < -\dfrac{7}{3}$

$f(3) \geqq 0$ より　$4a + 12 \geqq 0$　すなわち　$a \geqq -3$

したがって，共通する a の値の範囲を求めて　$\boldsymbol{-3 \leqq a < -\dfrac{7}{3}}$

(4) 頂点の x 座標は p は，$p = -\dfrac{a}{2}$ であるから

$4 < a < 10$ のとき　$-5 < -\dfrac{a}{2} < -2$　ゆえに　$\boldsymbol{-5 < p < -2}$

$-2 \leqq x \leqq 2$ において，$x = 2$ で最大，$x = -2$ で最小となる．

よって，$f(2) = 22$ より　$2^2 + a\cdot 2 + a + 3 = 22$　すなわち　$\boldsymbol{a = 5}$

$f(x) = x^2 + 5x + 8$ であるから，最小値は

$$f(-2) = (-2)^2 + 5\cdot(-2) + 8 = \mathbf{2}$$

	解　答　欄										
1	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
4	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
5	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
6	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
7	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
8	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
9	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
10	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
11	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
12	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
13	−	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
14	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
15	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
16	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
17	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
18	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
19	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
21	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
23	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
27	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
29	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
30	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0

	解　答　欄										
31	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
32	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
33	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
34	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
35	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
36	−	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	0
37	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
38	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
39	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
40	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
41	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
42	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
43	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0

解答例

数学 II・数学 B

I (1) 2 次方程式 $2x^2+x+3=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\quad \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

ここで
$$\begin{aligned}(2\alpha-1)+(2\beta-1)&=2(\alpha+\beta)-2\\&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-3\\(2\alpha-1)(2\beta-1)&=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\\&=4\times\frac{3}{2}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=8\end{aligned}$$

よって $2\alpha-1$，$2\beta-1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-(-3)x+8=0 \quad すなわち \quad \boldsymbol{x^2+3x+8=0}$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

第 6 項が -14 であるから $a+5d=-14$ $\cdots$①

初項から第 10 項までの和が -150 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=-150 \quad すなわち \quad 2a+9d=-30 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて $a=-24$，$d=2$

よって一般項は $a_n=-24+(n-1)\cdot2=2n-26$

また，0 になる項は $2n-26=0$ これを解いて **第 13 項**

$a_{11}=-4$，$a_{20}=14$ であるから，第 11 項から第 20 項までの和は

$$\frac{1}{2}\cdot10(-4+14)=\mathbf{50}$$

(3) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	極小 $a-2$	$\nearrow$	$a+2$

よって，この関数は　$x=1$ で最小値をとるので

$a-2=3$　ゆえに　$\boldsymbol{a=5}$

このとき，最大値は　$a+2=5+2=\mathbf{7}$

(4) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{33})^2}{2\cdot3\cdot4}=-\frac{1}{3}$$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{-4}$

点Cは AB を $1:2$ に内分する点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{3}|2\vec{a}+\vec{b}|$

ここで　$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2&=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})\\&=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=4\cdot3^2+4\cdot(-4)+4^2=36\end{aligned}$$

ゆえに　$|2\vec{a}+\vec{b}|=6$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{3}|2\vec{a}+\vec{b}|=\frac{1}{3}\times6=\mathbf{2}$

II (1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$，$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，$\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x \\ &= 5\times\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + 6\times\frac{1}{2}\sin 2x - 3\times\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ &= \boldsymbol{3\sin 2x + 4\cos 2x + 1} \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{4}{5}}$，$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{3}{5}}$ とおくと $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin 2x + 4\cos 2x + 1 \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right) + 1 \\ &= 5(\sin 2x\cos\alpha + \cos 2x\sin\alpha) + 1 \\ &= \boldsymbol{5\sin(2x+\alpha) + 1} \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 \leqq 2x \leqq \pi$

すなわち　$\alpha \leqq 2x+\alpha \leqq \pi+\alpha$

したがって，$f(x)$ は

$2x+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}}$ **のとき最大値**をとり，

$2x+\alpha = \pi+\alpha$　すなわち　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ **のとき最小値**をとる.

よって　最大値は　$5\sin\dfrac{\pi}{2} + 1 = \boldsymbol{6}$

最小値は　$5\sin(\pi+\alpha)+1 = -5\sin\alpha + 1$

$$= -5\times\frac{4}{5} + 1 = \boldsymbol{-3}$$

(4) $f(x)$ が最大となるのは，$2x+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のときであるから

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$
$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

III (1) 円 $C : x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0$ が原点を通るから

$x=0,\ y=0$ を代入して　$-4+4k=0$　すなわち　$k=1$

このとき　　$x^2+y^2+2x-6y=0$

ゆえに　　$(x+1)^2+(y-3)^2=10$

よって円 C の**中心は $(-1,\ 3)$**，**半径は $\sqrt{10}$**

(2)　　$x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0$　$\cdots$ ①

が k についての恒等式となるための条件は

$x^2+y^2-4=0,\ x-3y+2=0$

これを解いて　$(x,\ y)=(-2,\ 0),\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

このとき，① は k の値にかかわらず成り立つ.

したがって，円 C は，k の値にかかわらず定点 $\boldsymbol{(-2,\ 0),\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)}$ を通る.

(3)　　$x^2+y^2-4+2k(x-3y+2)=0$

ゆえに　$(x+k)^2+(y-3k)^2=10k^2-4k+4$　$\cdots$ ②

よって，中心 P の座標は $\boldsymbol{(-k,\ 3k)}$

$x=-k,\ y=3k$ とおく．これから P は直線 $\boldsymbol{y=-3x}$ 上にある.

また，$10k^2-4k+4=10\left(k-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{18}{5}$ であるから

半径は，$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{5}}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{18}{5}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$ をとる.

(4) 円 C と x 軸が接するとき，円 C の中心の y 座標と半径について

② より　　$|3k|=\sqrt{10k^2-4k+4}$

ゆえに　　$9k^2=10k^2-4k+4$

すなわち　　$k^2-4k+4=0$

よって　　$\boldsymbol{k=2}$

	解答欄										
1	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
2	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
3	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
4	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
5	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
6	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
7	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
8	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
9	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
10	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
11	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
12	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
13	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
14	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
15	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
16	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
17	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
18	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
19	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
20	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
21	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
22	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
23	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
24	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
25	−	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	0
26	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
27	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
28	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
29	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
30	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
31	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
32	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
33	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0
34	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
35	−	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	0
36	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
37	−	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	0
38	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
39	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
40	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
41	**−**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
42	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
43	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
44	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
45	−	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	0
46	−	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	0
47	−	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**0**
48	−	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	0
49	−	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	0

1.5　熊本学園大学

1.5.1　A日程1日目 70分

全　学　部 (全　学　科) (A日程)

平成19年2月8日実施

(70分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2(\sin 30^\circ)$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3})$

2. $\log_{10} 5 = a$，$\log_{10} 6 = b$ とするとき，次の式を a と b を使って表せ。

(1) $\log_{10} 2$　　(2) $\log_{10} 3$　　(3) $\log_2(4.5)\cdot\log_{10} 2$

3. ある地域の天気について，晴れの日の翌日に晴れとなる確率は 60% ，雨になる確率は 40% である。また，雨の日の翌日に晴れとなる確率は 30% ，雨になる確率は 70% である。今日が晴れのとき，翌々日が雨になる確率を求めよ。ただし，天気はその前日の天気のみによって決まるとする。

4. 直線 $y = x$ と曲線 $y = x^2 - 2x$ に囲まれた領域 (境界も含む) の格子点 (x および y の値が整数) の x 座標と y 座標の値をそれぞれ X，Y とする。$X + Y$ の値が 1 である点を点 A，4 である点を点 B とするとき，次の問に答えよ。

(1) AB 間の距離を求めよ。

(2) 点 A から点 B に移動するとき，最短経路は何通りあるか。ただし，領域内の格子点を x 軸に平行に，または y 軸に平行に結んだ線分上のみを移動できるものとする。

5. 1 から 200 までの整数のうち，次の条件をみたす数はいくつあるか。

(1) 2，3 のいずれによっても割り切れる。

(2) 2，3，5 のいずれによっても割り切れる。

(3) 2，3 のいずれによっても割り切れるが，5 では割り切れない。

6. 次の方程式を解け。

(1) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 365$　　(2) $x^2 + 2|\,x - 1\,| = 5$

7. 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 3$，BC $= 5$，CD $= 6$，DA $= 8$ のとき，$\cos A$，$\sin A$，およびこの四角形の面積 S を求めよ。

8. 関数 $y = |\,4x^2 - 4x - 3\,|$ について次の問に答えよ。

(1) この関数のグラフ上の点 (0, 3) における接線を ℓ とするとき，ℓ の傾きを求めよ。

(2) この関数のグラフ上の点 (2, 5) における接線と ℓ の交点の座標を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,4x^2 - 4x - 3\,|\,dx$ を求めよ。

解答例

1. (1) $\log_2(\sin 30°) = \log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = \mathbf{-1}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3}) = \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 3^{\frac{1}{2}}) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} = \mathbf{1}$

2. (1) $\log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{10}{5} = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = \boldsymbol{1 - a}$

(2) (1) の結果を利用する.

$\log_{10} 3 = \log_{10} \dfrac{6}{2} = \log_{10} 6 - \log_{10} 2 = b - (1 - a) = \boldsymbol{a + b - 1}$

(3) (1),(2) の結果を利用する.

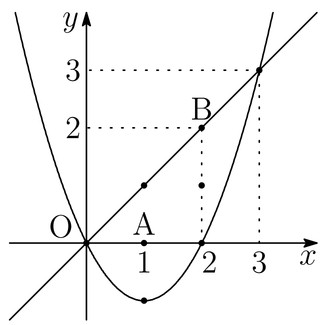
$$\begin{aligned}\log_2(4.5)\cdot\log_{10} 2 &= \frac{\log_{10}(4.5)}{\log_{10} 2}\cdot\log_{10} 2 = \log_{10}(4.5) = \log_{10} \frac{3^2}{2} \\ &= 2\log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 2(a + b - 1) - (1 - a) = \boldsymbol{3a + 2b - 3}\end{aligned}$$

3. ［1］晴・晴・雨の場合の確率は　$\dfrac{6}{10} \times \dfrac{4}{10} = \dfrac{24}{100}$

［2］晴・雨・雨の場合の確率は　$\dfrac{4}{10} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{28}{100}$

［1］,［2］より，求める確率は　$\dfrac{24}{100} + \dfrac{28}{100} = \dfrac{52}{100} = \boldsymbol{\dfrac{13}{25}}$

4.



(1) 右図の格子点 $(X,\ Y)$ のうち，
$X + Y = 1$ を満たす点 A の座標は $(1,\ 0)$，
$X + Y = 4$ を満たす点 B の座標は $(2,\ 2)$

したがって

$\mathrm{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2) $\mathrm{A} \to (2,\ 0) \to (2,\ 1) \to \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \to (1,\ 1) \to (2,\ 1) \to \mathrm{B}$

の **2 通り**である.

5. (1) 1 から 200 までの整数のうち，2，3 のいずれによっても割り切れる数は

$\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots, 6\cdot33\}$ の **33 個**

(2) 1 から 200 までの整数のうち，2，3，5 のいずれによっても割り切れる数は

$\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3,\ \cdots, 30\cdot6\}$ の **6 個**

(3) (1),(2) の結果から　$33 - 6 = \mathbf{27}$ (個)

6. (1)　$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=365$

左辺を展開すると　$3x^2+6x+5=365$

整理して　$x^2+2x-120=0$

左辺を因数分解して　$(x+12)(x-10)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-12,\ 10}$

(2) $x^2+2|x-1|=5$

［1］ $x \geqq 1$ のとき，$|x-1|=x-1$ であるから

$x^2+2(x-1)=5$

整理して　$x^2+2x-7=0$

ゆえに　$x=-1\pm 2\sqrt{2}$

$x \geqq 1$ に注意して　$x=-1+2\sqrt{2}$

［2］ $x<1$ のとき，$|x-1|=-x+1$ であるから

$x^2+2(-x+1)=5$

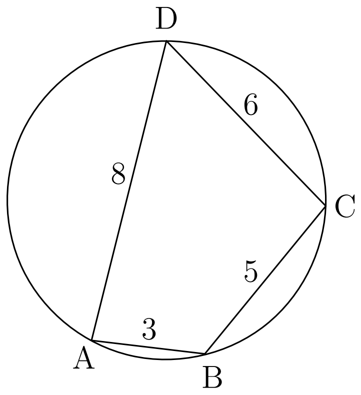
整理して　$x^2-2x-3=0$

ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$

$x<1$ に注意して　$x=-1$

［1］，［2］より　(答) $\boldsymbol{x=-1+2\sqrt{2},\ -1}$

7. △ABD において, 余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 8^2+3^2-2\cdot 8\cdot 3\cos A\\ &= 73-48\cos A\end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$C = 180^\circ - A$$

△BCD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cos(180^\circ - A)\\ &= 61-60(-\cos A)\\ &= 61+60\cos A\end{aligned}$$

よって　$73-48\cos A = 61+60\cos A$　これを解いて　$\boldsymbol{\cos A = \dfrac{1}{9}}$

$\sin A > 0$ であるから　$\sin A = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin A + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sin(180^\circ - A)\\ &= 12\sin A + 15\sin A\\ &= 27\sin A = 27\times\frac{4\sqrt{5}}{9} = \boldsymbol{12\sqrt{5}}\end{aligned}$$

8. (1) $x=0$ のとき $4x^2-4x-3=-3<0$ であるから

$$y=-4x^2+4x+3 \quad ゆえに \quad y'=-8x+4$$

$x=0$ のとき $y'=4$ であるから，求める**傾きは　4**

(2) $x=2$ のとき $4x^2-4x-3=5>0$ であるから

$$y=4x^2-4x-3 \quad ゆえに \quad y'=8x-4$$

$x=2$ のとき $y'=12$ であるから，点 $(2,5)$ における接線の方程式は

$$y-5=12(x-2) \quad すなわち \quad y=12x-19$$

ℓ の方程式は

$$y-3=4(x-0) \quad すなわち \quad y=4x+3$$

であるから，交点の座標は

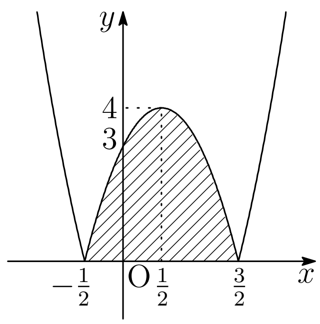
連立方程式 $\begin{cases} y=12x-19 \\ y=4x+3 \end{cases}$ を解いて $\left(\boldsymbol{\frac{11}{4}},\ \mathbf{14}\right)$

(3) $4x^2-4x-3=(2x+1)(2x-3)$ であるから，

$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ において　$4x^2-4x-3 \leqq 0$

このとき　$|\,4x^2-4x-3\,|=-4x^2+4x+3$

したがって



$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,4x^2-4x-3\,|\,dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-4x^2+4x+3)\,dx \\
&= -\frac{1}{6}\cdot(-4)\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}}
\end{aligned}$$

1.5.2 A日程2日目 70分

商学部第一部	(商学科)	(A日程)
経済学部	(国際経済学科)	
社会福祉学部第一部	(子ども家庭福祉学科)	

平成19年2月10日実施

(70分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で8題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x - 15 \times 2^x - 16 = 0$

(2) $9^x - \dfrac{28}{3} \times 3^x + 3 > 0$

2. $p = 3 + 4i$，$q = 3 - 4i$ のとき，$R = p^2 + q^2 + 7p + 5q + 8$ を $a + bi$ の形で表せ。ただし，a，b は実数とする。

3. 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(1) = -1$，$f(2) = 3$ を満たしている。このとき，以下の問に答えよ。

(1) b，c を a で表せ。

(2) $f(x)$ のグラフの頂点の x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ である場合の a，b，c の値を求めよ。

4. $\dfrac{q+r}{2p} = \dfrac{r-p}{2q} = \dfrac{3p+q}{2r}$ のとき，この式の値を求めよ。ただし，$p \neq 0$，$q \neq 0$，$r \neq 0$ で，しかも $p + q + r \neq 0$ である。

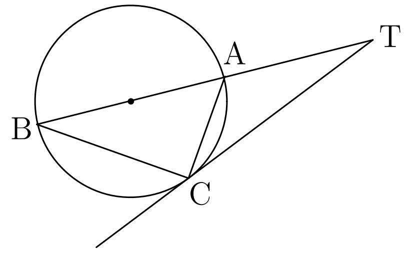
5. $f(x) = a\sin(bx + c)$ とする。$f(x)$ が次の 3 つの条件を満たすとき，a，b，c の値を求めよ。解は弧度法で表せ。ただし，$a > 0$，$0 < b < 4$，$0 \leqq c \leqq \pi$ とする。

条件 1. $f(x)$ は最大値 2π をとる。

条件 2. どんな x についても，$f(x + \pi) = f(x)$。

条件 3. x が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率は -8。

6. 右図では，△ABC は円に内接し，辺 AB は円の中心を通っている。また，T は頂点 C における円の接線と AB を延長した線の交点である。$\angle\mathrm{ATC} = 40°$，円の半径が $\dfrac{5}{2}$，$\mathrm{AT} = 4$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさと線分 TC の長さを求めよ。



7. 異なる n 個のものの中から r 個のものを選ぶことを考える。このとき，組合せの数は，n 個の中からあらかじめ 2 個のものを分けて考えると，1) その 2 個を使わずに選ぶ方法と，2) その 2 個のうちの 1 個だけを使って選ぶ方法と，3) その 2 個両方を使って選ぶ方法の数の和になると考えられる。このことから以下の式が常に成り立つ。自然数 a，b，c の値を求めよ。ただし，n と r はどの組合せの計算も行えるようなものとする。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{(n-2)}\mathrm{C}_r + a \times {}_{(n-b)}\mathrm{C}_{(r-c)} + {}_{(n-2)}\mathrm{C}_{(r-2)}$$

8. 3 次関数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ について，以下の問に答えよ。

(1) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフと $x = 0$ で接する直線の式を求めよ。

(3) (2) で求めた直線が，再び $y = f(x)$ のグラフと交わる点の x 座標を求めよ。

(4) (2) で求めた直線と $y = f'(x)$ のグラフとで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

1. (1) $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, $2^x = X$ とおくと $X > 0$

与式から　$X^2 - 15X - 16 = 0$

ゆえに　$(X+1)(X-16) = 0$

$X > 0$ であるから　$X = 16$

すなわち　$2^x = 2^4$　よって　$\boldsymbol{x = 4}$

(2) $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$, $3^x = X$ とおくと $X > 0$

与式から　$X^2 - \frac{28}{3}X + 3 > 0$

$3X^2 - 28X + 9 > 0$

ゆえに　$(3X-1)(X-9) > 0$

$X > 0$ に注意して　$0 < X < \dfrac{1}{3}$, $9 < X$

すなわち　$0 < 3^x < 3^{-1}$, $3^2 < 3^x$　よって　$\boldsymbol{x < -1,\ 2 < x}$

2. $p + q = (3+4i) + (3-4i) = 6$, $pq = (3+4i)(3-4i) = 9 + 16 = 25$ より

$$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 6^2 - 2\cdot 25 = -14$$

したがって
$$\begin{aligned} R &= (p^2 + q^2) + 7p + 5q + 8 \\ &= -14 + 7(3+4i) + 5(3-4i) + 8 = \boldsymbol{30 + 8i} \end{aligned}$$

3. (1) $f(1) = -1$ から　$a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -1$

$f(2) = 3$ から　$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 3$

整理して　$a + b + c = -1$　$\cdots$①

$4a + 2b + c = 3$　$\cdots$②

① − ② より　$-3a - b = -4$　ゆえに　$\boldsymbol{b = -3a + 4}$

これを ① に代入して　$a + (-3a + 4) + c = -1$　ゆえに　$\boldsymbol{c = 2a - 5}$

(2) 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の x 座標は $x = -\dfrac{b}{2a}$ であるから

条件より　$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$b = a$

(1) の結果より　$a = -3a + 4$　これを解いて　$\boldsymbol{a = 1}$

さらに　$\boldsymbol{b = 1,\ c = -3}$

4. $\dfrac{q+r}{2p} = \dfrac{r-p}{2q} = \dfrac{3p+q}{2r} = k$ とおくと

$$\begin{aligned} q + r &= 2pk \\ r - p &= 2qk \\ 3p + q &= 2rk \end{aligned}$$

これらの 3 式の辺々を加えて

$$2p + 2q + 2r = 2pk + 2qk + 2rk$$

整理して　$(p+q+r) - (p+q+r)k = 0$

すなわち　$(p+q+r)(1-k) = 0$

$p + q + r \neq 0$ であるから　$1 - k = 0$　すなわち　$k = \mathbf{1}$

5. 条件 1 より $a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 2\pi}$

条件 2 より　$2\pi\sin\{b(x+\pi)+c\} = 2\pi\sin(bx+c)$

$$\sin\{(bx+c)+b\pi\} = \sin(bx+c)$$

このとき，整数 n を用いて $b\pi = 2n\pi$ とかける．

よって，$b = 2n$ および $0 < b < 4$ より　$\boldsymbol{b = 2}$

関数 $f(x) = 2\pi\sin(2x+c)$ において，$x = 0$ から $x = \dfrac{\pi}{2}$ までの平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}+c) - 2\pi\sin(2\cdot0+c)}{\frac{\pi}{2}-0} &= 4\sin(\pi+c) - 4\sin c \\ &= -8\sin c \end{aligned}$$

条件 3 より $-8\sin c = -8$ であるから　$\sin c = 1$

$0 \leqq c \leqq \pi$ であるから　$\boldsymbol{c = \dfrac{\pi}{2}}$

6. 接弦定理により　$\angle\mathrm{ACT} = \angle\mathrm{CBA} = \theta$ とおくと

AB は円の直径であるから　$\angle\mathrm{BCT} = \theta + 90°$

$\triangle\mathrm{BCT}$ について　$\theta + (\theta + 90°) + 40° = 180°$

これを解いて　　$\theta = 25°$

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{ACT} + \angle\mathrm{ATC}$ であるから

$$\angle\mathrm{BAC} = 25° + 40° = \mathbf{65°}$$

次に，$\triangle\mathrm{TAC} \backsim \triangle\mathrm{TCB}$ であるから　$\mathrm{TA} : \mathrm{TC} = \mathrm{TC} : \mathrm{TB}$

ゆえに　　$\mathrm{TC}^2 = \mathrm{TA} \cdot \mathrm{TB}$

よって　　$\mathrm{TC}^2 = 4 \times 9$　これを解いて　$\mathbf{TC = 6}$

別解　円の中心を O とすると，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{TC}$ であるから

$$\mathrm{TC} = \sqrt{\mathrm{OT}^2 - \mathrm{OC}^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$$

設問の誤り

円の中心を O とする．

AT $= 4$ であれば　　$\sin\angle\mathrm{OTC} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2} + 4} = \dfrac{5}{13} < \dfrac{1}{2}$

このとき，$\angle\mathrm{ATC} < 30°$ であるから，$\angle\mathrm{ATC} = 40°$ はありえない．
この点に関して拙者が同大学入試課に問い合わせたところ，試験ではこのことに気付かず，訂正されることはなかったそうである．確かに数学 A では，角度と長さを独立して扱うため，正解した受験生の中にもこの点に気付かなかったかもしれない．しかし作問者は，これらの整合性に配慮すべきであり，設問の内容を本来であれば，次のようにすべきであったと申し入れておいた．

訂正文

右図では，$\triangle\mathrm{ABC}$ は半径 $\dfrac{5}{2}$ の円に内接し，辺 AB は円の中心を通っている。また，T は頂点 C における円の接線と AB を延長した線の交点である。$\angle\mathrm{ATC} = 40°$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。また $\mathrm{AT} = 4$ のとき，線分 TC の長さを求めよ。

7. 異なる n 個から r 個を取り出すとき，特定の 2 個 a，b について，これらを含むか含まないかで次のような組ができる．

a と b を含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-2)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}$ に等しい．

a だけを含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-1)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}$ に等しい．

b だけを含む組の総数は，$(n-2)$ 個から $(r-1)$ 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}$ に等しい．

a も b も含まない組の総数は，$(n-2)$ 個から r 個を取る組合せの総数 ${}_{n-2}\mathrm{C}_{r}$ に等しい．

よって，和の法則により　${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n-2}\mathrm{C}_{r} + 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}$

したがって　　$\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=1}$

8. (1) $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$ であるから

$-3x^2 + 4x - 1 = 0$ を解いて　　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3},\ 1}$

(2) $f(0) = 1$，$f'(0) = -1$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - 1 = -1(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -x + 1}$$

(3) $y = -x + 1$ と $y = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ の交点の x 座標は，y を消去して

$$-x + 1 = -x^3 + 2x^2 - x + 1$$

すなわち　$x^2(x - 2) = 0$

ゆえに　$x = 0,\ 2$

したがって，求める x 座標は　$\boldsymbol{x = 2}$

(4) 直線 $y=-x+1$ と放物線 $y=-3x^2+4x-1$ で囲まれる部分の面積を求めればよい．直線 $y=-x+x$ と放物線 $y=-3x^2+4x-1$ の共有点の x 座標は

$$-x+1=-3x^2+4x-1$$

整理して　$3x^2-5x+2=0$

すなわち　$(x-1)(3x-2)=0$

ゆえに　$x=\dfrac{2}{3},\ 1$

このとき，放物線は直線の上側にあるので，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\{(-3x^2+4x-1)-(-x+1)\}\,dx\\&=-\int_{\frac{2}{3}}^{1}(x-1)(3x-2)\,dx\\&=-3\int_{\frac{2}{3}}^{1}(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)dx\\&=-3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{54}}\end{aligned}$$

1.5.3 A 日程 3 日目 70 分

商 学 部 第 一 部
(ホスタピリティ・マネジメント学科)
経 済 学 部 (経 済 学 科)
社会福祉学部第一部 (福 祉 環 境 学 科)

(A 日程)

平成 19 年 2 月 11 日実施

(70 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 8 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 以下の方程式を解け。

(1) $(4^x)^2 + 2{\cdot}4^x - 8 = 0$

(2) $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3(27x^2)$

2. $p = 2 + i$，$q = 1 - i$ のとき，$p^3 - q^3 + p^2 - q^2$ を $a + bi$ の形で表せ。ただし，a，b は実数とする。

3. x が正で，$0 < a < b$ であるとする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $f(x) = x + \dfrac{b^2}{x + a}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) $g(x) = \dfrac{x + a}{x^2 + ax + b^2}$ の最大値を求めよ。

4. 2次関数 $y = f(x)$ のグラフが点 $(1,\ 2k)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 8)$ を通り，かつ $k \neq -1$ であるとき，以下の問に答えよ。

(1) k を用いて $f(x)$ を表せ。

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか。

5. ある $\triangle\mathrm{ABC}$ の三辺の長さは $\mathrm{BC} = 6$，$\mathrm{AC} = b$，$\mathrm{AB} = 8$ であり，その三つの頂角について $\angle\mathrm{A} = A$，$\angle\mathrm{B} = B$，$\angle\mathrm{C} = C$ としたときに，$C = 2A$ という関係が成立する。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形のとき，以下の値を求めよ。

(1) $\cos A$

(2) $\sin A$

(3) b

6. 集合 $A = \{n \,|\, n$ は自然数$\}$ を全体集合として，その部分集合 B，C，D をそれぞれ $B = \{2n | n \in A\}$，$C = \{2n - 1 \,|\, n \in A\}$，$D = \{3n \,|\, n \in A\}$ とするとき，次の命題が真か偽かを答えよ。

(1) $\overline{B}$ の要素は $\overline{B} \cap B$ の要素である。

(2) $\overline{B}$ の要素は C の要素である。

(3) $C \cap D$ の要素は B の要素である。

(4) $\overline{C} \cap D$ の要素は B の要素である。

(5) $\overline{C} \cup D$ の要素は B の要素である。

7. (1) 5 都市 A，B，C，D，E がある。これらの都市を重複なく訪問する順序は何通りあるか。

(2) A の直後に E を，および E の直後に A を訪れることができない場合，5 都市を重複なく訪問する順序は何通りあるか。

8. (1) 放物線 $y=-x^2+10x-21$ と x 軸で囲まれる図形の面積 S_1 を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+2x-1$ と直線 $y=x+a$ で囲まれる図形の面積 S_2 が $\dfrac{9}{2}$ のとき，a の値を求めよ。

解答例

1. (1) $4^x=t$ とおくと　$t>0$

方程式は　$t^2+2t-8=0$

ゆえに　$(t+4)(t-2)=0$

$t>0$ より　$t=2$

したがって　$4^x=2$　すなわち　$2^{2x}=2^1$

よって，$2x=1$ を解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$

(2) 真数は正であるから $x>0$，方程式を変形すると

$$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 27+\log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2=3+2\log_3 x$$

整理すると　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

ゆえに　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=-1,\ 3$　これを解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3},\ 27}$

2. $p+q=(2+i)+(1-i)=3$，$p-q=(2+i)-(1-i)=1+2i$，
$pq=(2+i)(1-i)=3-i$ であるから

$$\begin{aligned}p^3-q^3+p^2-q^2 &=(p-q)(p^2+pq+q^2)+(p+q)(p-q)\\ &=(p-q)\{(p+q)^2-pq\}+(p+q)(p-q)\\ &=(p-q)\{(p+q)^2-pq+(p+q)\}\\ &=(1+2i)\{3^2-(3-i)+3\}\\ &=(1+2i)(9+i)=\boldsymbol{7+19i}\end{aligned}$$

3. (1) $f(x)=(x+a)+\dfrac{b^2}{x+a}-a$, $x+a>0$, $b>0$ であるから

相加平均，相乗平均の大小関係により

$$f(x)=(x+a)+\frac{b^2}{x+a}-a \geqq 2\sqrt{(x+a)\times\frac{b^2}{x+a}}-a=2b-a$$

等号が成り立つのは　$(x+a)=\dfrac{b^2}{x+a}$

ゆえに　$(x+a)^2=b^2$

$x+a=\pm b$

$x=-a\pm b$

$x>0$, $0<a<b$ であるから　$x=-a+b$

よって，$f(x)$ は $x=-a+b$ のとき**最小値 $\boldsymbol{2b-a}$** をとる．

(2) $x+a>0$ であるから　$g(x)=\dfrac{x+a}{x(x+a)+b^2}=\dfrac{1}{x+\dfrac{b^2}{x+a}}=\dfrac{1}{f(x)}$

(1) の結果から，$f(x)$ が最小となるとき，$g(x)$ は最大となる．

よって，$g(x)$ は $x=-a+b$ のとき**最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2b-a}}$** をとる．

4. (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが3点 $(1,\ 2k)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 8)$ を通るから

$2k=a+b+c$　$\cdots$①

$3=4a+2b+c$　$\cdots$②

$8=9a+3b+c$　$\cdots$③

② − ① から　$3a+b=3-2k$　$\cdots$④

③ − ② から　$5a+b=5$　$\cdots$⑤

④，⑤ を解くと　$a=k+1$, $b=-5k$

これらを ① に代入して　$c=6k-1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=(k+1)x^2-5kx+6k-1}$

(2) 関数 $f(x)$ の判別式 D は

$$D=(-5k)^2-4(k+1)(6k-1)=k^2-20k+4$$

したがって，関数の x 軸との共有点の個数は $k\neq-1$ に注意して

$\boldsymbol{k<-1}$, $\boldsymbol{-1<k<10-4\sqrt{6}}$, $\boldsymbol{10+4\sqrt{6}<k}$ のとき　$D>0$ より **2個**

$\boldsymbol{k=10\pm4\sqrt{6}}$ のとき　$D=0$ より **1個**

$\boldsymbol{10-4\sqrt{6}<k<10+4\sqrt{6}}$ のとき　$D<0$ より **0個**

5. (1) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

これに $C = 2A$，$a = \mathrm{BC} = 6$，$c = \mathrm{AB} = 8$ を代入すると

ゆえに　$\dfrac{6}{\sin A} = \dfrac{8}{\sin 2A}$

$$\frac{6}{\sin A} = \frac{8}{2\sin A\cos A}$$

よって　$\boldsymbol{\cos A = \dfrac{2}{3}}$

(2) (1) の結果から　$\sin A = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

(3) (第 1) 余弦定理により　$b = c\cos A + a\cos C$

このとき，$\cos C = \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$b = 8 \times \dfrac{2}{3} + 6 \times \left(-\dfrac{1}{9}\right) = \boldsymbol{\dfrac{14}{3}}$

設問の誤り

問題文に △ABC は鋭角三角形とあるが，$\cos C < 0$ であるため，C は鈍角となる．したがって，本問題は深刻かつ重大な出題ミスである．本来，△ABC が鋭角三角形であるという条件無しに，解答は得られる設問である．

6. (1) **偽**　(2) **真**　(3) **偽**　(4) **真**　(5) **偽**

7. (1) A, B, C, D, E の 5 つの並べ方であるから

$$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

(2) A と E をひとまとめにする．

A と E 以外の 3 つとひとまとめの並び方は，4! 通りある．

また，ひとまとめにした A と E の並び方は，2! 通りある．

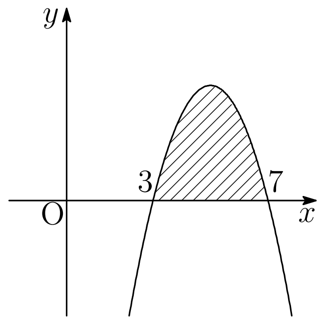
A と E が続く方法は，$4! \times 2! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 \times 2\cdot1 = 48$ 通りある．

よって，A の直後に E を，および E の直後に A を訪れない場合の総数は

$$120 - 48 = \mathbf{72}\ (\text{通り})$$

8. (1) この放物線と x 軸との共有点の x 座標は，$-x^2+10x-21=0$ を解いて

$$x=3,\ 7$$



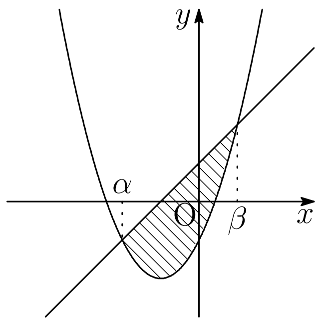
$3 \leqq x \leqq 7$ では $y \geqq 0$ であるから，求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_3^7(-x^2+10x-21)\,dx$$
$$=-\int_3^7(x-3)(x-7)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(7-3)^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

(2) 放物線 $y=x^2+2x-1$ と直線 $y=x+a$ の共有点の x 座標は，方程式

$$x^2+2x-1=x+a$$

すなわち　$x^2+x-a-1=0$



の解であり，この解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-a-1 \quad \cdots ①$$

放物線と直線で囲まれた部分の面積が S_2 は，右の図および ① から

$$S_2=\int_\alpha^\beta\{(x+a)-(x^2+2x+a)\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x^2+x-a-1)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$S_2=\dfrac{9}{2}$ であるから　$\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{9}{2}$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^3=27$

よって　$\beta-\alpha=3 \quad \cdots ②$

①，② を解いて，$\alpha=-2$，$\beta=1$，$a=1$　　(答) $\boldsymbol{a=1}$

1.5.4　A 日程 4 日目 70 分

経　済　学　部 (リーガルエコノミクス学科)		
外　国　語　学　部 (東アジア学科)		(A 日程)
社会福祉学部第一部 (社会福祉学科)		

平成 19 年 2 月 12 日実施

(70 分)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 7 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 以下の問に答えよ。

(1) x^2+4x+5 を複素数の範囲で因数分解せよ。

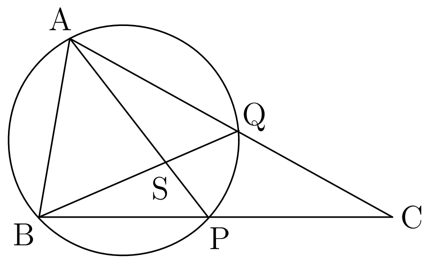
(2) $\log_3 \dfrac{5}{18} - \log_2 9 - \log_3 \dfrac{15}{2} + 2\log_2 6$ を簡単にせよ。

2. 以下の方程式を解け。

(1) $|1+5\cos x| = 1-\cos x$　(ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$)

(2) $|x^2-3x-4| = \dfrac{1}{2}x-2$

3. 右図のように，$\triangle$ABC の 2 つの頂点 A と B を通る円が辺 BC と交わる点を P，辺 AC と交わる点を Q とし，また A と P，B と Q を結ぶ 2 本の線分の交点を S とする。BS $=4$，QS $=3$，AS $=6$，$\angle$QAS $=20^\circ$，$\angle$ASB $=70^\circ$ であるとき，$\angle$PCQ の大きさと線分 PS の長さを求めよ。



4. A(3, 1)，B(9, 4) を結ぶ線分について，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P と，2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 P を通り線分 AB と垂直に交わる直線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(3) 直線 ℓ_2 は傾きが $-\dfrac{1}{3}$ であり，点 Q を通っている。このとき，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を中心として点 A を通る円の方程式を求めよ。

5. 2 次方程式 $x^2-2(k-1)x-k^2+5k-4=0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つとき，k の値の範囲を求めよ。

6. 自然数 m，n，L_1，L_2 について $L_1=m+n+2$，$L_2=mn+m+n+1$ という関係が成立するとき，「L_1 が奇数であるならば，L_2 は偶数である」という命題の逆と対偶は，いずれも「$\boxed{①}$が$\boxed{②}$であるならば，$\boxed{③}$は$\boxed{④}$である」という形式で述べることができる。逆と対偶のそれぞれについて，①〜④ に入れるのに最も適当なものを以下の (a)〜(h) から選んで記号で答えよ。また，逆と対偶のそれぞれについて，それが真であるか偽であるかを答えよ。

(a) m　(b) n　(c) L_1　(d) L_2
(e) 自然数　(f) 整　数　(g) 奇　数　(h) 偶　数

7. 放物線 $y=-x^2+2x+8$ と直線 $y=a$ $(a>0)$ が異なる 2 点で交わっている。この 2 点のうち，x 座標がより小さい方を P，より大きい方を Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の取り得る値の範囲を求めよ。また，P，Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 放物線と x 軸の 2 つの共有点の中点を M とし，P と Q と M を結んで三角形を作るとき，その三角形の面積 S_t を a の関数として表したうえで，S_t の最大値を与える a の値を求めよ。

(3) a が S_t の最大値を与える値をとるとき，放物線と $y=a$ で囲まれる領域の面積 S_u の値を求めよ。

解答例

1. (1) 2 次方程式 $x^2+4x+5=0$ の解が $x=-2\pm i$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+4x+5 &= \{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\} \\ &= \boldsymbol{(x+2-i)(x+2+i)} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} &\log_3\frac{5}{18}-\log_2 9-\log_3\frac{15}{2}+2\log_2 6 \\ =&\log_2(6^2\div 9)+\log_3\left(\frac{5}{18}\div\frac{15}{2}\right) \\ =&\log_2 4+\log_3\frac{1}{27} \\ =&\log_2 2^2+\log_3 3^{-3}=2+(-3)=\boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

2. (1) 左辺 $\geqq 0$ であるから，$1-\cos x\geqq 0$ に注意して　$1+5\cos x=\pm(1-\cos x)$

ゆえに　$1+5\cos x=1-\cos x$　から　$\cos x=0$

$1+5\cos x=-(1-\cos x)$　から　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{x=90^\circ，120^\circ}$

(2) 左辺 $\geqq 0$ であるから，$\dfrac{1}{2}x-2\geqq 0$ より　$x\geqq 4$　$\cdots$①

ゆえに　$x^2-3x-4=\dfrac{1}{2}x-2$　から　$(x-4)(2x+1)=0$

$x^2-3x-4=-\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$　から　$(x-4)(2x+3)=0$

① より　$\boldsymbol{x=4}$

3. $\angle \mathrm{QAS} = 20^\circ$，$\angle \mathrm{ASB} = 70^\circ$ より　$\angle \mathrm{AQS} = \angle \mathrm{ASB} - \angle \mathrm{QAS} = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$

$\angle \mathrm{SQC} = 180^\circ - \angle \mathrm{AQS} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\triangle \mathrm{SAQ} \backsim \triangle \mathrm{SBP}$ であるから，$\angle \mathrm{SQA} = \angle \mathrm{SPB}$ より　$\angle \mathrm{SQC} = \angle \mathrm{SPC} = 130^\circ$

$\angle \mathrm{QSP} = \angle \mathrm{ASB}$ (対頂角) であるから　$\angle \mathrm{QSP} = 70^\circ$

四角形QSPCの内角の和は 360° であるから

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{PCQ} &= 360^\circ - \angle \mathrm{CQS} - \angle \mathrm{QSP} - \angle \mathrm{SPC}\\ &= 360^\circ - 130^\circ - 70^\circ - 130^\circ\\ &= \mathbf{30^\circ}\end{aligned}$$

方べきの定理により　$\mathrm{PS} \cdot \mathrm{SA} = \mathrm{BS} \cdot \mathrm{SQ}$ であるから

$\mathrm{PS} \times 6 = 4 \times 3$　ゆえに　$\mathbf{PS = 2}$

設問の誤り

本問題も，平成19年2月10日に実施された一般入学試験問題 (A日程) の6と同様に，角の大きさと辺の長さの整合性を欠いた問題である．たとえば，$\triangle \mathrm{QAS}$ に正弦定理を適用すると $\mathrm{QS} : \mathrm{AS} = \sin\angle \mathrm{QAS} : \sin\angle \mathrm{SQA}$ である．$\angle \mathrm{QAS} = 20^\circ$，$\angle \mathrm{SQA} = 50^\circ$ であれば，$\sin 20^\circ = 0.3420$，$\sin 50^\circ = 0.7660$ であるから，辺の長さの比 $\mathrm{QS} : \mathrm{AS} = 3 : 6$ と不整合である．

4. (1) 線分ABを $2:1$ に内分する点Pの座標は

$$\left(\frac{1\cdot 3 + 2\cdot 9}{2+1},\ \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 4}{2+1}\right) \quad \text{より} \quad \mathbf{(7,\ 3)}$$

線分ABを $2:1$ に外分する点Qの座標は

$$\left(\frac{-1\cdot 3 + 2\cdot 9}{2-1},\ \frac{-1\cdot 1 + 2\cdot 4}{2-1}\right) \quad \text{より} \quad \mathbf{(15,\ 7)}$$

(2) 線分ABの傾きは

$$\frac{4-1}{9-3} = \frac{1}{2}$$

線分ABに垂直な直線の傾き m は

$$\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = -2$$

直線 ℓ_1 の方程式は

$$y - 3 = -2(x - 7) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -2x + 17}$$

(3) 直線 ℓ_2 の方程式は

$$y-7=-\frac{1}{3}(x-15) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{3}x+12$$

ℓ_1，ℓ_2 の交点を C とすると，C の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=-2x+17 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+12 \end{cases} \qquad \text{これを解いて} \quad (3,\ 11)$$

A$(3,\ 1)$，C$(3,\ 11)$ 間の距離 AC は　AC $=10$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-11)^2=100}$

5. この 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする．方程式が異なる正の実数解をもつのは，次が成り立つときである．

$$D>0 \quad \text{かつ} \quad \alpha+\beta>0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta>0$$

ここで

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-(k-1)\}^2-1\cdot(-k^2+5k-4) \\ &= 2k^2-7k+5 \\ &= (k-1)(2k-5) \end{aligned}$$

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=2(k-1),\ \alpha\beta=-k^2+5k-4=-(k-1)(k-4)$$

したがって，$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ を満たせばよいので

$$\begin{cases} (k-1)(2k-5)>0 \\ 2(k-1)>0 \\ -(k-1)(k-4)>0 \end{cases}$$

第 1 式から　　$k<1,\ \dfrac{5}{2}<k \quad \cdots ①$

第 2 式から　　$k>1 \quad \cdots ②$

第 3 式から　　$1<k<4 \quad \cdots ③$

①，②，③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{5}{2}<k<4}$

6.

	①	②	③	④	真偽
逆	**d**	**h**	**c**	**g**	**偽**
対偶	**d**	**g**	**c**	**h**	**真**

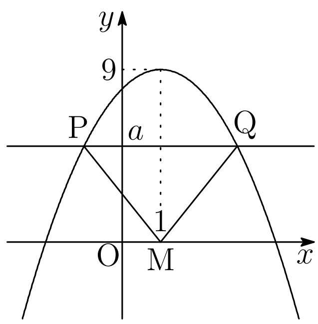
$L_1=(m+1)+(n+1)$，$L_2=(m+1)(n+1)$

L_2 が奇数であれば，$m+1$ および $n+1$ は奇数であるから，L_1 は偶数

7. (1) $y=-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$ であるから，$y=a$ $(a>0)$ とこの放物線が 2 点で交わるとき a の値の範囲は　$0<a<9$
P，Q の x 座標は，方程式

$$-x^2+2x+8=a$$

を解いて　$x=1\pm\sqrt{9-a}$
よって　$\mathbf{P(1-\sqrt{9-a},\ a)}$，
　　　　$\mathbf{Q(1+\sqrt{9-a},\ a)}$



(2) 右の図から

$$S_t=\frac{1}{2}\times \mathrm{PQ}\times a=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{9-a}\times a=a\sqrt{9-a}$$

$f(a)={S_t}^2$ とおくと　$f(a)=a^2(9-a)=-a^3+9a^2$　$(0<a<9)$

微分すると　$f'(a)=-3a^2+18a$
　　　　　　　　$=-3a(a-6)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=0,\ 6$
増減表は，右のようになる．

a	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$f(a)$ が最大のとき，S_t は最大となる．
ゆえに S_t の最大値を与える a の値は　　$\boldsymbol{a=6}$

(3) $a=6$ であるから，(1) の結果より P，Q の x 座標はそれぞれ

$$x=1-\sqrt{3},\ x=1+\sqrt{3}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
S_u&=\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{(-x^2+2x+8)-6\}\,dx\\
&=-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(x^2-2x-2)\,dx\\
&=-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}\,dx\\
&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3=\boldsymbol{4\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

1.5.5 A 日程 5 日目 70 分

商 学 部 第 一 部 (経 営 学 科)
外 国 語 学 部 (英 米 学 科) } (A 日程)

平成 19 年 2 月 13 日実施

(70 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題用紙を開かないこと。
2. 受験者はすべて試験監督者の指示に従うこと。
3. 問題は全部で 7 題ある。
4. 受験番号を必ず記入すること。
5, 試験時間内の退場はできない。
6. 計算過程は書かなくてよい。
7. 解答用紙のみを提出すること。

1. 次の方程式を解け。

(1) $2^{2x+2} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_2(3-x) = \log_2(x-1)$

2. 次の関数の周期と値域を求めよ。

(1) $y = 3\cos\theta + 1$

(2) $y = \cos 2\theta + 2\cos^2\theta$

3. $y = (x+a)(x-2a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $81a$ であるという。定数 a の値を求めよ。ただし，$a > 0$ とする。

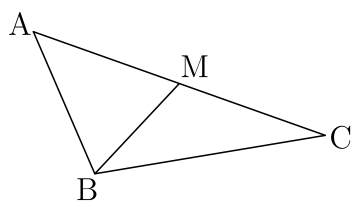
4. 直線 $l : y = kx$ が x 軸の正の向きとなす角は，直線 $m : y = \dfrac{1}{2}x + 2$ と直線 $n : y = 2x - 1$ とがなす鋭角に等しいという。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 直線 m と直線 n の交点の座標を求めよ。

(2) 直線 m が x 軸の正の向きとなす角を θ とするとき，$\tan\theta$ を求めよ。

(3) k の値を求めよ。

5. 図のように，△ABC において辺 AC に中点 M をとるとき，以下の問に答えよ。ただし，各辺の長さは，辺 AB $= 2$，辺 BC $= 3$，辺 AC $= 4$ とする。



(1) 辺 BM の長さを求めよ。

(2) $\angle$BMC $= \alpha$ とおくとき，$\sin\alpha$ を求めよ。

(3) △BMC の面積を求めよ。

6. 役員3名を含む7名の生徒を2つに分ける方法は何通りあるか。ただし，どちらにも必ず1名は役員が含まれるものとする。

7. 5 個のコインがある。それぞれ片面に 2，3，5，7，11 が記されており，もう片面はすべて 1 が記されている。5 つのコインを同時に投げ，表に出た 5 つの数字を掛け合わせる。以下の確率を計算せよ。なお，すべてのコインはどちらの面も出る確率が等しいものとする。

(1) 掛け合わせた数が，1 になる確率。

(2) 掛け合わせた数が，素数になる確率。

(3) 掛け合わせた数が，10 の倍数になる確率。

(4) 掛け合わせた数が，10 の倍数になるが，6 の倍数にならない確率。

解答例

1. (1) $2^{2x+2} = 2^{2x}\cdot 2^2 = 4\cdot(2^x)^2$，$2^x = X$ とおくと $X > 0$

$$4X^2 - 17X + 4 = 0$$

ゆえに　$(X-4)(4X-1) = 0$

$X > 0$ に注意して　$X = 4,\ \dfrac{1}{4}$

すなわち　$2^x = 2^2$ または $2^x = 2^{-2}$　よって　$\boldsymbol{x = \pm 2}$

(2) 真数は正であるから　$3 - x > 0$ かつ $x - 1 > 0$

すなわち　$1 < x < 3$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2(3-x) = \log_2(x-1)^2$

よって　$3 - x = (x-1)^2$

したがって　$(x+1)(x-2) = 0$

① に注意して　$\boldsymbol{x = 2}$

2. (1) **周期は　$\boldsymbol{2\pi}$**

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より　$-3 \leqq 3\cos\theta \leqq 3$

したがって　$-2 \leqq 3\cos\theta + 1 \leqq 4$

よって，**値域は　$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 4}$**

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$ であるから

$$y = \cos 2\theta + (\cos 2\theta + 1) = 2\cos 2\theta + 1$$

よって，**周期は**　$2\pi \div 2 = \boldsymbol{\pi}$

$-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ より　$-2 \leqq 2\cos\theta \leqq 2$

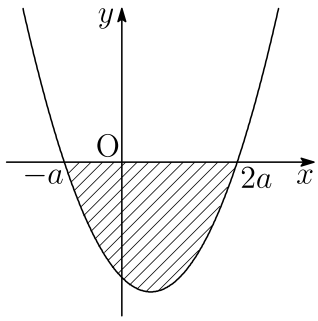
したがって　$-1 \leqq 2\cos 2\theta + 1 \leqq 3$

よって，**値域は　$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 3}$**

3. この放物線と x 軸の共有点の x 座標は　$x=-a,\ 2a$

$-a \leqq x \leqq 2a$ では　　$y \leqq 0$

ゆえに，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は



$$S=\int_{-a}^{2a}\{-(x+a)(x-2a)\}\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2a-(-a)\}^3=\frac{9a^3}{2}$$

条件より　$\dfrac{9a^3}{2}=81a$　ゆえに　$a(a^2-18)=0$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=3\sqrt{2}}$

4. (1) 連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+2 \\ y=2x-1 \end{cases}$ を解いて　$x=2,\ y=3$

ゆえに，**交点の座標は (2, 3)**

(2) $\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{1}{2}}$

(3) 直線 n が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\tan\alpha=2$

直線 m と直線 n のなす鋭角は $\alpha-\theta$ であるから

$$\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{2-\dfrac{1}{2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{k=\pm\dfrac{3}{4}}$

5. (1) BM $= x$，$\angle$BMC $= \alpha$ とする．

△BMC に余弦定理を適用すると

$$3^2 = x^2 + 2^2 - 2x \cdot 2\cos\alpha$$
$$5 = x^2 - 4x\cos\alpha \quad \cdots ①$$

△BMA に余弦定理を適用すると

$$2^2 = x^2 + 2^2 - 2x \cdot 2\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$0 = x^2 + 4x\cos\alpha \quad \cdots ②$$

① と ② の辺々を加えて　$2x^2 = 5$

$x > 0$ であるから　　$\mathbf{BM} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

(2) $x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ を ② に代入して　$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{8}$

$\sin\alpha > 0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(-\tfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{64}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\triangle \mathrm{BMC} = \frac{1}{2}\mathrm{BM} \cdot \mathrm{MC}\sin\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times 2 \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{8}}$$

6. 役員 3 名を 2 名と 1 名に分る方法は　　${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

残りの 4 名を役員 2 名の組と役員 1 名の組に分ける方法は　　2^4 通り

よって，分け方の総数は　　${}_3\mathrm{C}_2 \times 2^4 = 3 \times 16 = \mathbf{48}$ (通り)

7. (1) 5 つのコインがすべて 1 になる確率であるから　　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2) 4 つのコインが 1 で，1 つだけ 1 以外になる確率であるから

$$ {}_5\mathrm{C}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-4} = \boldsymbol{\frac{5}{32}}$$

(3) 2 と 5 が出る確率であるから　　$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(4) 2 と 5 が出て，3 が出ない確率であるから　　$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

1.6　熊本保健科学大学

1.6.1　一般推薦

3 次の各問いの空欄に当てはまるものを下の ①〜④ の中から一つ選び，ア，イ，ウ，$\cdots$ で示された解答欄に記入しなさい。

問 1　$x=1+\sqrt{6}$，$y=1-\sqrt{6}$ のとき，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

① -6　　② $2-2\sqrt{6}$

③ $2+2\sqrt{6}$　　④ 14

問 2　$|\,x-5\,|>3$ を解くと $\boxed{\text{イ}}$ である。

① $x<2,\ x>8$　　② $2<x<8$

③ $x<-2,\ x>2$　　④ $-2<x<2$

問 3　2 次方程式 $2x^2-3x-2=0$ を解くと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

① $x=-\dfrac{1}{2}, -2$　　② $x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

③ $x=\dfrac{1}{2}, -2$　　④ $x=\dfrac{1}{2},\ 2$

問 4　放物線 $y=-x^2-4x-6$ の頂点は，点 $\boxed{\text{エ}}$ である。

① $(-2,-2)$　　② $(-2,\ 2)$

③ $(2,-2)$　　④ $(2,\ 2)$

問 5　2 次関数 $y=2x^2+2\sqrt{2}x+1$ のグラフと x 軸との共有点の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

① 0　　② 1

③ 2　　④ 3

問 6　2 次不等式 $4x^2 + 12x - 27 \geqq 0$ の解は $\boxed{\text{カ}}$ である。

① $-\dfrac{9}{2} \leqq x \leqq -\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq \dfrac{9}{2}$

③ $x \leqq -\dfrac{9}{2},\ x \geqq \dfrac{3}{2}$　④ $x \leqq -\dfrac{3}{2},\ x \geqq \dfrac{9}{2}$

問 7　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，$\sin\theta = \boxed{\text{キ}}$ である。

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

③ $\dfrac{13}{16}$　④ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

問 8　三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 3$，$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ のとき，$\mathrm{BC} = \boxed{\text{ク}}$ である。

① 2　② $\sqrt{13}$

③ 5　④ $3\sqrt{3}$

問 9　3，4，5，6，7 の 5 つの数字を使って 3 桁の整数を作るとき，できる整数は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする。

① 25　② 27

③ 125　④ 243

問 10　1，2，3，4，5，6，7，8 の数が 1 つずつ書かれた 8 枚のカードが袋の中に入っている。袋の中から同時に 2 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた数の積が奇数になる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{3}{14}$

③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{11}{14}$

4 次の各問いの空欄に当てはまるものを答えなさい。なお，問題文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，数字 (0〜9)，または符号 (−) が入り，ア，イ，ウ，… の一つ一つには，これらのいずれか一つが対応する。それらを，ア，イ，ウ，… で示された解答欄に記入しなさい。

また，分数形で解答が求められる場合には，既約分数で答えなさい。

例：$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ に $\dfrac{23}{7}$ と答えたいときは，アに「2」，イに「3」，ウに「7」を記入する。

例：$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として，エに「−」，オに「4」，カに「5」を記入する。符号は分子につけ,分母につけてはならない。

問1　AB = 4，BC = 6，CA = 5 である三角形 ABC がある。

(1) $\sin\angle A = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) 三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) 三角形 ABC に内接する円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

問2　数直線上を動く動点 P がある。最初，P は原点にあり，1個のさいころを1回投げて，1の目が出たら正の方向へ1だけ進み，2，3の目が出たら正の方向へ2だけ進み，4，5，6が出たら負の方向へ1だけ進む。

(1) さいころを2回続けて投げたとき，原点に戻る確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(2) さいころを3回続けて投げたとき，P の座標が −1 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(3) さいころを3回続けて投げたとき，P の座標の期待値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

解答例

$\boxed{\mathbf{3}}$ 問 1 $x+y=(1+\sqrt{6})+(1-\sqrt{6})=2$

$$\begin{aligned} xy &= (1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6}) \\ &= 1^2-(\sqrt{6})^2=-5 \end{aligned}$$

したがって $\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$$=2^2-2\cdot(-5)=\mathbf{14}$$

(答) ④

問 2 $|x-5|>3$ より $\quad x-5<-3,\ 3<x-5$

したがって $\quad \boldsymbol{x<2,\ 8<x}$

(答) ①

問 3 左辺を因数分解すると $\quad (x-2)(2x+1)=0$

よって $\quad x-2=0$ または $2x+1=0$

したがって，解は $\quad \boldsymbol{x=2,-\frac{1}{2}}$

(答) ②

【別解】解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2} \\ &= \frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4} \\ &= \frac{8}{4},\ \frac{-2}{4}=\mathbf{2,-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

問 4 $y=-x^2-4x-6$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} -x^2-4x-6 &= -(x^2+4x)-6 \\ &= -\{(x+2)^2-2^2\}-6 \\ &= -(x+2)^2-2 \end{aligned}$$

したがって，放物線 $y=-x^2-4x-6$ の頂点の座標は $\quad \mathbf{(-2,-2)}$

(答) ①

問5 2次関数 $y = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$ の係数について

$$D/4 = (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 1 = 0$$

よって，x 軸との共有点の個数は **1個**

(答) ②

問6 左辺を因数分解すると　$(2x+9)(2x-3) \geqq 0$

したがって　$\boldsymbol{x \leqq -\frac{9}{2},\ \frac{3}{2} \leqq x}$

(答) ③

問7 $0° < \theta < 90°$ のとき　$\sin\theta > 0$

ゆえに　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{4}}$

(答) ④

問8 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A \\ &= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60° \\ &= 16 + 9 - 2\cdot 4\cdot 3 \times \frac{1}{2} = 13\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{BC} = \sqrt{13}}$

(答) ②

問9 $5^3 = \boldsymbol{125}$ (通り)

(答) ③

問10 4枚の奇数のカードから2枚取り出す確率であるから

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{6}{28} = \boldsymbol{\frac{3}{14}}$$

(答) ②

4 問1 (1) 余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{A} = \frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4} = \frac{1}{8}$$

したがって　$\sin\angle\mathrm{A} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot5\cdot4\times\frac{3\sqrt{7}}{8} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) $2s = \mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}$ とおくと　$s = \frac{15}{2}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{ABC} = rs$ であるから

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = r\times\frac{15}{2} \quad \text{ゆえに} \quad r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

(答) ア．3　イ．7　ウ．8　エ．1　オ．5　カ．7　キ．4　ク．7　ケ．2

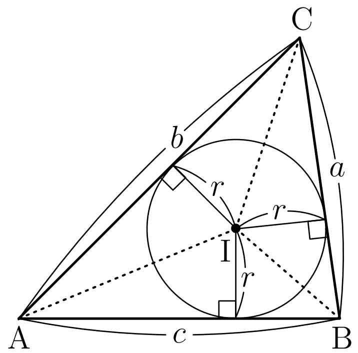
内接円の半径

三角形 ABC の内接円の中心を I，内接円の半径を r，$2s = a+b+c$ とする．このとき，$\triangle\mathrm{IBC}$, $\triangle\mathrm{ICA}$, $\triangle\mathrm{IAB}$ の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar,\quad \frac{1}{2}br,\quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形 ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs$$



問 2　(1)　正の方向へ 1 だけ 1 回と負の方向へ 1 だけ 1 回進む場合であるから

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{6}} $$

(2)　正の方向へ 1 だけ 1 回と負の方向へ 1 だけ 2 回進む場合であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{8}} $$

(3)　3 回投げたときの P の座標を X とすると，それぞれの確率は

$X=-3$ のとき　$\{-1, -1, -1\}$ の場合で　$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{27}{216}$

$X=-1$ のとき　$\{-1, -1,\ 1\}$ の場合で　$\frac{3!}{2!1!}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{27}{216}$

$X=0$ のとき　$\{-1, -1,\ 2\}$ の場合で　$\frac{3!}{2!1!}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6} = \frac{54}{216}$

$X=1$ のとき　$\{-1,\ 1,\ 1\}$ の場合で　$\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{216}$

$X=2$ のとき　$\{-1,\ 1,\ 2\}$ の場合で　$\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{36}{216}$

$X=3$ のとき　$\{-1,\ 2,\ 2\}$ の場合で　$\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{36}{216}$

$\{1,\ 1,\ 1\}$ の場合で　$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$X=4$ のとき　$\{1,\ 1,\ 2\}$ の場合で　$\frac{3!}{2!1!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{216}$

$X=5$ のとき　$\{1,\ 2,\ 2\}$ の場合で　$\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{12}{216}$

$X=6$ のとき　$\{2,\ 2,\ 2\}$ の場合で　$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{8}{216}$

X	-3	-1	0	1	2	3	4	5	6	合計
確率	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{54}{216}$	$\frac{9}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{8}{216}$	1

したがって，期待値 E は

$$ E = (-3)\cdot\frac{27}{216} + (-1)\cdot\frac{27}{216} + 0\cdot\frac{54}{216} + 1\cdot\frac{9}{216} + 2\cdot\frac{36}{216} $$
$$ + 3\cdot\frac{37}{216} + 4\cdot\frac{6}{216} + 5\cdot\frac{12}{216} + 6\cdot\frac{8}{216} = \mathbf{1} $$

(答) コ．1　サ．6　シ．1　ス．8　セ．1

1.6.2　一般前期 (衛生技術学科・理学療法学専攻)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 2 次関数のグラフが，3 点 $(4, -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2, -1)$ を通るとき，この 2 次関数を求めなさい。

問 2 2 次方程式 $x^2 + 4kx + k - 2 = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問 3 不等式 $|\,x - 1\,| + |\,x - 3\,| \leqq 4$ を解きなさい。

問 4 $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = \mathrm{b}$，$\mathrm{AB} = c$ である三角形 ABC がある。関係式 $a\cos B - b\cos A = c$ を満たすとき，三角形 ABC はどのような三角形であるか答えなさい。

問 5 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2\theta - \cos\theta = 2$ を満たす θ の値を求めなさい。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 方程式 $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ を解きなさい。

問 2 $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とするとき，$\log_{25} 3$ を a，b を用いて表しなさい。

問 3 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めなさい。

問 4 3 次関数 $f(x) = x^3 + kx^2 + (k+2)x$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問 5 放物線 $y = x^2$ がある。この放物線上の点 $(2,\ 4)$ における接線と放物線，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めなさい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ である三角形ABCがある。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線上に，$\mathrm{BD}=7$ となる点Dを辺BCに関して点Aと反対側にとる。線分ADと辺BCの交点をEとする。このとき，次の各問い（**問1〜4**）に答えなさい。

問1 BCの長さを求めなさい。

問2 ADの長さを求めなさい。

問3 AEの長さを求めなさい。

問4 三角形ABEの面積は四角形ABDCの面積の何倍であるかを求めなさい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $0 \leqq x < 2\pi$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{4}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x$ がある。このとき，次の各問い（**問1〜3**）に答えなさい。

問1 $\sin x=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めなさい。

問2 $\sin x=t$ とおいて，$f(x)$ を t を用いて表した関数を $g(t)$ とする。関数 $g(t)$ の極大値と極小値，およびそのときの x の値をそれぞれ求めなさい。

問3 方程式 $\dfrac{4}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}\sin x=a$ が異なる4つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

解答例

1 **問 1** 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．
グラフが 3 点 $(4, -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2, -1)$ を通るから

$$-1 = 16a + 4b + c \quad \cdots ①$$
$$1 = 4a + 2b + c \quad \cdots ②$$
$$-1 = 4a - 2b + c \quad \cdots ③$$

① − ② から　$12a + 2b = -2$
すなわち　$6a + b = -1$　$\cdots$ ④
② − ③ から　$4b = 2$　$\cdots$ ⑤
④，⑤ を解くと　$a = -\dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{1}{2}$
これらを ② に代入して　$c = 1$
よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1}$

問 2 $f(x) = x^2 + 4kx + k - 2$ とおく．
2 次方程式 $f(x) = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつ条件は，
$x < -2$ と $0 < x$ の範囲で放物線 $y = f(x)$ が x 軸と交わることであるから

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 + 4k\cdot(-2) + k - 2 < 0 \\ f(0) = k - 2 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から　$k > \dfrac{2}{7}$，　第 2 式から　$k < 2$
求める k の値の範囲は，上の 2 式の共通範囲で　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7} < k < 2}$

問 3 [1]　$x < 1$ のとき，$|x - 1| = -x + 1$，$|x - 3| = -x + 3$ であるから
不等式は　$(-x + 1) + (-x + 3) \leqq 4$
これを解いて　$x \geqq 0$
このときの解は　$0 \leqq x < 1$

[2]　$1 \leqq x < 3$ のとき，$|x - 1| = x - 1$，$|x - 3| = -x + 3$ であるから
不等式は　$(x - 1) + (-x + 3) \leqq 4$
左辺は 2 であるから，この不等式を満たす．
このときの解は　$1 \leqq x < 3$

[3]　$3 \leqq x$ のとき，$|x - 1| = x - 1$，$|x - 3| = x - 3$ であるから
不等式は　$(x - 1) + (x - 3) \leqq 4$
これを解いて　$x \leqq 4$
このときの解は　$3 \leqq x \leqq 4$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 4}$

問4 余弦定理により，等式は　$a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

この両辺に $2c$ をかけて

$$(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

すなわち　$a^2=b^2+c^2$

よって　$\boldsymbol{A=90^\circ}$ **の直角三角形**

問5 左辺を変形すると　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=2$

整理すると　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

$0^\circ \leqq 180^\circ$ のとき

$\cos\theta=0$ から　$\theta=90^\circ$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ から　$\theta=120^\circ$

したがって　$\boldsymbol{\theta=90^\circ,\ 120^\circ}$

$\boxed{2}$ **問1** 方程式は

$$x^2(x-3)+4(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2+4)=0$$

よって　$x-3=0$　または　$x^2+4=0$

したがって　$\boldsymbol{x=3,\ \pm 2i}$

問2 $\log_{25}3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}25}=\dfrac{\log_{10}3}{2\log_{10}5}=\dfrac{\log_{10}3}{2\log_{10}\frac{10}{2}}$

$$=\frac{\log_{10}3}{2(\log_{10}10-\log_{10}2)}=\boldsymbol{\frac{b}{2(1-a)}}$$

問3 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\qquad\cdots①$$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$$

であるから

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{6}\pi}$ **のとき　最大値2**

$x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ **のとき　最小値** $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

問 4　$f'(x) = 3x^2 + 2kx + (k+2)$

$f'(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$f(x)$ が極値をもたないための条件は，すべての x に対して，$f'(x) \geqq 0$ が成り立つことである．

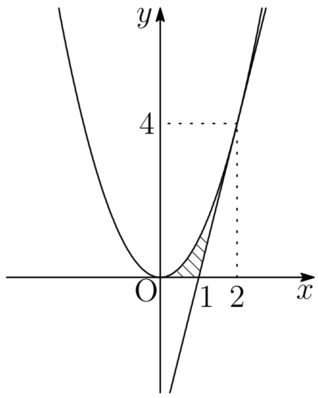
よって，$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　　$D \leqq 0$

$$D/4 = k^2 - 3(k+2) = k^2 - 3k - 6$$

であるから　　$k^2 - 3k - 6 \leqq 0$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{33}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}}$

問 5　$y' = 2x$ より，$x = 2$ のとき $y' = 4$



ゆえに，求める接線の方程式は

$$y - 4 = 4(x-2)$$

ゆえに　　$y = 4x - 8$

放物線 $y = x^2$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

直線 $y = 4x - 4$ の x 軸との共有点の座標は $(1,\ 0)$．

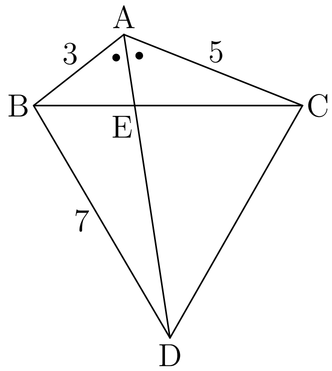
3 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 4)$ を結ぶ三角形の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 4 = 2$$

よって，求める面積 S は

$$S = S_1 - S_2 = \frac{8}{3} - 2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{3}$ **問1** △ABC に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$

$BC > 0$ であるから　$\mathbf{BC = 7}$

問2 $AD = x$ とおく．△ABD に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cos 60^\circ$$

ゆえに　$49 = 9 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}$

整理して　$x^2 - 3x - 40 = 0$

$$(x+5)(x-8) = 0$$

$x > 0$ であるから　$x = \mathbf{8}$

問3 $AE = y$ とおく．△ABE + △AEC = △ABC であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot3y\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot5y\sin 60^\circ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin 120^\circ \\ 3y + 5y &= 15 \\ y &= \mathbf{\frac{15}{8}} \end{aligned}$$

問4 $\triangle ABE = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{15}{8}\sin 60^\circ = \dfrac{45}{16}\sin 60^\circ$

$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin 60^\circ = 12\sin 60^\circ$

$\triangle ADC = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin 60^\circ = 20\sin 60^\circ$

したがって，求める面積比は

$$\frac{\dfrac{45}{16}\sin 60^\circ}{12\sin 60^\circ + 20\sin 60^\circ} = \mathbf{\frac{45}{512}}$$

$\boxed{4}$ **問 1**　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$

問 2　$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるから

$$\begin{aligned}&\frac{4}{3}\sin^3 x - \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x - \sqrt{2}\sin x\\ =&\frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}(1-2t^2) + \sqrt{2}(1-t^2) - \sqrt{2}t\\ =&\frac{4}{3}t^3 + (1-\sqrt{2})t^2 - \sqrt{2}t - \frac{1}{2} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　$g(t) = \dfrac{4}{3}t^3 + (1-\sqrt{2})t^2 - \sqrt{2}t - \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$

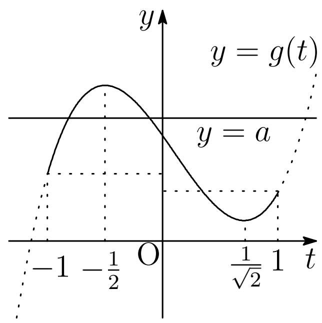
$$\begin{aligned}g'(t) &= 4t^2 + 2(1-\sqrt{2})t - \sqrt{2}\\ &= (2t+1)(2t-\sqrt{2})\end{aligned}$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$t = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$ **のとき　極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{4} - \dfrac{5}{12}}$

$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi}$ **のとき　極小値** $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{6} - 1}$

問 3　方程式 $f(x) = a$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ が異なる 4 つの実数解をもつには，関数 $y = g(t)$ $(-1 < t < 1)$ のグラフと直線 $y = a$ が異なる 2 つの共有点をもてばよい．



$$\begin{aligned}g(1) &= \frac{11}{6} - \sqrt{2}\\ g(-1) &= \sqrt{2} - \frac{5}{6}\end{aligned}$$

$g(1) < g(-1)$ であるから，求める a の値の範囲は

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < a < g(1),\ g(-1) < a < g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{6} - 1 < a < \dfrac{11}{6} - \sqrt{2},\ \sqrt{2} - \dfrac{5}{6} < a < \dfrac{5\sqrt{2}}{4} - \dfrac{5}{12}}$

1.6.3 一般前期 (看護学科・作業療法学専攻)

1 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 2 次関数のグラフが，3 点 $(4, -1)$，$(2,\ 1)$，$(-2, -1)$ を通るとき，この 2 次関数を求めなさい。

問 2 2 次方程式 $x^2 + 4kx + k - 2 = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問 3 不等式 $|\,x - 1\,| + |\,x - 3\,| \leqq 4$ を解きなさい。

問 4 $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = \mathrm{b}$，$\mathrm{AB} = c$ である三角形 ABC がある。関係式 $a \cos B - b \cos A = c$ を満たすとき，三角形 ABC はどのような三角形であるか答えなさい。

問 5 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2 \sin^2 \theta - \cos \theta = 2$ を満たす θ の値を求めなさい。

2 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

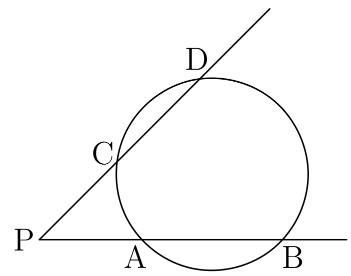
問 1 1 から 100 までの番号が 1 つずつ書かれたカードが 100 枚ある。この中から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれている番号が 4 または 6 で割り切れるような数である確率を求めなさい。

問 2 不等式 $2x + 3 \leqq \sqrt{3}(x + 4)$ を解きなさい。

問 3 実数 x において，$x^2 - x - 12 \leqq 0$ を満たすことが $|\,x\,| \leqq a$ を満たすための十分条件となるような正の定数 a の値の範囲を求めなさい。

問 4 $(x^2 - 2x)^{10}$ を展開したとき，x^{17} の係数を求めなさい。

問 5 右の図のように，円と 2 本の直線がある。
$\mathrm{AB} = 6$，$\mathrm{PC} = 5$，$\mathrm{CD} = 4$ であるとき，
線分 PA の長さを求めなさい。



$\boxed{3}$ AB $=3$，AC $=5$，$\angle$BAC $=120^\circ$ である三角形 ABC がある。$\angle$BAC の二等分線上に，BD $=7$ となる点 D を辺 BC に関して点 A と反対側にとる。線分 AD と辺 BC の交点を E とする。このとき，次の各問い (**問 1〜4**) に答えなさい。

問 1 BC の長さを求めなさい。

問 2 AD の長さを求めなさい。

問 3 AE の長さを求めなさい。

問 4 三角形 ABE の面積は四角形 ABDC の面積の何倍であるかを求めなさい。

$\boxed{4}$ 2 次関数 $f(x)=x^2-6x+2$ がある。このとき，次の各問い (**問 1〜3**) に答えなさい。

問 1 $0 \leqq x \leqq 5$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。

問 2 a を正の定数とする。$-a \leqq x \leqq a$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めなさい。

問 3 a を正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが 3 点 $(4,-1)$，$(2,\ 1)$，$(-2,-1)$ を通るから

$$-1=16a+4b+c \quad \cdots ①$$

$$1=4a+2b+c \quad \cdots ②$$

$$-1=4a-2b+c \quad \cdots ③$$

① − ② から　$12a+2b=-2$

すなわち　$6a+b=-1 \quad \cdots ④$

② − ③ から　$4b=2 \quad \cdots ⑤$

④，⑤ を解くと　$a=-\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$

これらを ② に代入して　$c=1$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+1}$

問2 $f(x) = x^2 + 4kx + k - 2$ とおく．

2次方程式 $f(x) = 0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつ条件は，$x < -2$ と $0 < x$ の範囲で放物線 $y = f(x)$ が x 軸と交わることであるから

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 + 4k\cdot(-2) + k - 2 < 0 \\ f(0) = k - 2 < 0 \end{cases}$$

第1式から　$k > \dfrac{2}{7}$，　第2式から　$k < 2$

求める k の値の範囲は，上の2式の共通範囲で　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7} < k < 2}$

問3 ［1］ $x < 1$ のとき，$|x-1| = -x+1$，$|x-3| = -x+3$ であるから

不等式は　$(-x+1) + (-x+3) \leqq 4$

これを解いて　$x \geqq 0$

このときの解は　$0 \leqq x < 1$

［2］ $1 \leqq x < 3$ のとき，$|x-1| = x-1$，$|x-3| = -x+3$ であるから

不等式は　$(x-1) + (-x+3) \leqq 4$

左辺は2であるから，この不等式を満たす．

このときの解は　$1 \leqq x < 3$

［3］ $3 \leqq x$ のとき，$|x-1| = x-1$，$|x-3| = x-3$ であるから

不等式は　$(x-1) + (x-3) \leqq 4$

これを解いて　$x \leqq 4$

このときの解は　$3 \leqq x \leqq 4$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 4}$

問4 余弦定理により，等式は　$a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = c$

この両辺に $2c$ をかけて

$$(c^2+a^2-b^2) - (b^2+c^2-a^2) = 2c^2$$

すなわち　$a^2 = b^2 + c^2$

よって　$\boldsymbol{A = 90^\circ}$ **の直角三角形**

問5 左辺を変形すると　$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta = 2$

整理すると　$\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

$0^\circ \leqq 180^\circ$ のとき

$\cos\theta = 0$ から　$\theta = 90^\circ$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ から　$\theta = 120^\circ$

したがって　$\boldsymbol{\theta = 90^\circ,\ 120^\circ}$

$\boxed{2}$ **問 1** 1 から 100 までの番号で，4 で割り切れる数の集合を A，6 で割り切れる数の集合を B とすると

$$A = \{4{\cdot}1,\ 4{\cdot}2,\ 4{\cdot}3,\ \cdots,\ 4{\cdot}25\}$$
$$B = \{6{\cdot}1,\ 6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ \cdots,\ 6{\cdot}16\}$$
$$A \cap B = \{12{\cdot}1,\ 12{\cdot}2,\ 12{\cdot}3,\ \cdots,\ 12{\cdot}8\}$$

よって，番号が 4 または 6 で割り切れる数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{25}{100} + \frac{16}{100} - \frac{8}{100} = \boldsymbol{\frac{33}{100}} \end{aligned}$$

問 2 不等式は　$2x + 3 \leqq \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

移項すると　$(2 - \sqrt{3})x \leqq 4\sqrt{3} - 3$

両辺を $(2 - \sqrt{3})$ で割ると　$x \leqq \dfrac{4\sqrt{3} - 3}{2 - \sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{x \leqq 6 + 5\sqrt{3}}$

問 3 $x^2 - x - 12 \leqq 0$ を解いて　$-3 \leqq x \leqq 4$　$\cdots$①

$|\,x\,| \leqq a$ を解いて　$-a \leqq x \leqq a$　$\cdots$②

① は ② であるための十分条件であるから

$$-3 \leqq x \leqq 4 \quad \Longrightarrow \quad -a \leqq x \leqq a$$

ゆえに　$-a \leqq -3$　かつ　$4 \leqq a$

よって　$\boldsymbol{a \geqq 4}$

問 4 $(x^2 - 2x)^{10}$ の展開式の一般項は

$${}_{10}\mathrm{C}_r(x^2)^{10-r}(-2x)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r(-2)^r x^{20-r}$$

$20 - r = 17$ とすると　$r = 3$

よって，求める係数は　${}_{10}\mathrm{C}_3(-2)^3 = 120{\cdot}(-8) = \boldsymbol{-960}$

問 5 $\mathrm{PA} = x$ とおく．方べきの定理により　$\mathrm{PA}{\cdot}\mathrm{PB} = \mathrm{PC}{\cdot}\mathrm{PD}$

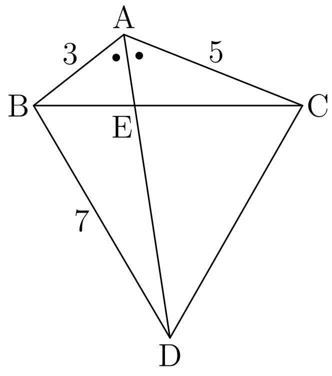
ゆえに　$x(x + 6) = 5{\cdot}9$

整理して　$x^2 + 6x - 45 = 0$

よって　$x = -3 \pm 3\sqrt{6}$

$x > 0$ であるから　$x = \boldsymbol{-3 + 3\sqrt{6}}$

$\boxed{3}$ **問1**　$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos120^\circ\\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 49\end{aligned}$$

BC > 0 であるから　**BC = 7**

問2　AD $= x$ とおく．$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cos60^\circ$$

ゆえに　$49 = 9 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$

整理して　$x^2 - 3x - 40 = 0$

$$(x+5)(x-8) = 0$$

$x > 0$ であるから　　$x = \mathbf{8}$

問3　AE $= y$ とおく．$\triangle$ABE $+$ $\triangle$AEC $=$ $\triangle$ABC であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot3y\sin60^\circ + \frac{1}{2}\cdot5y\sin60^\circ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120^\circ\\ 3y + 5y &= 15\\ y &= \mathbf{\frac{15}{8}}\end{aligned}$$

問4　$\triangle\mathrm{ABE} = \frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{15}{8}\sin60^\circ = \frac{45}{16}\sin60^\circ$

$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin60^\circ = 12\sin60^\circ$

$\triangle\mathrm{ADC} = \frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ = 20\sin60^\circ$

したがって，求める面積比は

$$\frac{\frac{45}{16}\sin60^\circ}{12\sin60^\circ + 20\sin60^\circ} = \mathbf{\frac{45}{512}}$$

$\boxed{4}$ **問 1** $x^2-6x+2=(x-3)^2-7$ であるから

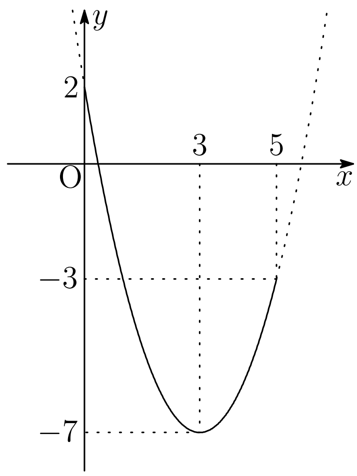
$$f(x)=(x-3)^2-7$$

$0 \leqq x \leqq 5$ での $y=f(x)$ のグラフは，右の図の実線部分である．

よって，$f(x)$ は

$x=0$ で**最大値 2** をとり，

$x=3$ で**最小値 -7** をとる．



問 2 a は正の定数であるから　$f(-a)>f(a)$

グラフは下に凸の放物線であるから

$x=-a$ で**最大値 a^2+6a+2** をとる．

問 3 ［1］ $0<a \leqq 3$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ の範囲で y の値は減少する．

よって，$x=a$ で最小値 a^2-6a+2 をとる．

［2］ $3<a$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ の範囲に放物線の頂点を含むので，

$x=3$ で最小値 -7 をとる．

よって，**$0<a \leqq 3$ のとき最小値 a^2-6a+2，$3<a$ のとき最小値 -7**

1.7　九州看護福祉大学

1.7.1　一般試験 (地方試験1)

入学試験問題

数学 I・A

(地方試験)

福岡・長崎・宮崎・那覇

看護学科・リハビリテーション学科・社会福祉学科

平成19年2月1日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて 3ページ あり、これとは別に 解答用紙が、1枚 ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問 1. a を $|a| \leqq 2$ を満たす実数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ に対し，$f(a+1)$ は $a =$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$a =$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

問 2. 原点 O から出発して数直線上を動く点 P は，硬貨を投げて，表が出るとき $+1$ 移動し，裏が出るとき -1 移動する。硬貨を 4 回投げたとき，次の確率を求めよ。

(1) 点 P の座標が原点 O になる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 点 P の座標が 2 になる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

問 3. $\sqrt{5}$ の小数部分を a とするとき，$\dfrac{\sqrt{45}}{a}$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

問 4. 連続する 3 つの整数がある。もっとも小さい数の平方ともっとも大きい数の平方の和は，もっとも大きい数の 5 倍に等しい。これら連続する 3 つの整数の和は $\boxed{\text{ク}}$ である。

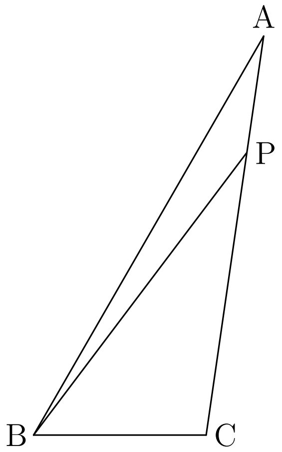
$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 図のような $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$，$\mathrm{BC} = 3$，$\mathrm{AC} = 7$ とする。辺 AC 上に点 P を $\mathrm{AP} = 2$ となるようにとる。

(1) AB の長さを求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PBC}$ の面積を求めよ。



問 B. $3x - 2 < x^2 \leqq 4x - 3$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問 1. $|\,a\,| \leqq 2$ から　$-2 \leqq a \leqq 2$

$$\begin{aligned} f(a+1) &= (a+1)^2 - 4(a+1) + 1 \\ &= a^2 - 2a - 2 \\ &= (a-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

ゆえに，$|\,a\,| \leqq 2$ において，$f(a+1)$ は，

$a = -2$ のとき最大値 6 をとり，
$a = 1$ のとき最小値 -3 をとる．

(答) ア. -2　イ. 6　ウ. 1　エ. -3

問 2. (1) 表が出る回数を x 回，裏が出る回数を y 回とすると

$$x + y = 4,\ \ 1 \cdot x + (-1) \cdot y = 0$$

であるから，これを解いて　$x = 2$，$y = 2$

よって　$${}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(2) 表が出る回数を x 回，裏が出る回数を y 回とすると

$$x + y = 4,\ \ 1 \cdot x + (-1) \cdot y = 2$$

であるから，これを解いて　$x = 3$，$y = 1$

よって　$${}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(答) オ. $\dfrac{3}{8}$　カ. $\dfrac{1}{4}$

問 3. $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ より，$2 < \sqrt{5} < 3$ であるから $\sqrt{5}$ の整数部分は 2 である．
ゆえに　$\sqrt{5} = 2 + a$　これから　$a = \sqrt{5} - 2$

よって　$$\frac{\sqrt{45}}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} = \frac{3\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \mathbf{15 + 6\sqrt{5}}$$

(答) キ. $15 + 6\sqrt{5}$

問4. 連続する3つの整数を n，$n+1$，$n+2$ とおくと

$$n^2+(n+2)^2=5(n+2)$$

整理して　　$2n^2-n-6=0$

ゆえに　　$(n-2)(2n+3)=0$

n は整数であるから　$n=2$

したがって，連続する3つの数は　　2，3，4

よって，これら連続する3つの整数の和は　$2+3+4=\mathbf{9}$

(答) ク. 9

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問A. (1) 余弦定理により　$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$\mathrm{AB}=x$ とおくと

ゆえに　　$7^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cos 60^\circ$

$$49=x^2+9-2\cdot x\cdot 3\cdot\frac{1}{2}$$

整理すると　　$x^2-3x-40=0$

$$(x+5)(x-8)=0$$

$x>0$ であるから　　$x=\mathbf{8}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{PC}:\mathrm{AC}$ であるから，

$\mathrm{PC}=\mathrm{AC}-\mathrm{AP}=7-2=5$ より

$$\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{AC}}=6\sqrt{3}\times\frac{5}{7}=\boldsymbol{\frac{30\sqrt{3}}{7}}$$

問B. $3x-2<x^2$ から

$x^2-3x+2>0$　ゆえに　$x<1,\ 2<x$　$\cdots$①

$x^2\leqq 4x-3$ から

$x^2-4x+3\leqq 0$　ゆえに　$1\leqq x\leqq 3$　　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{2<x\leqq 3}$

1.7.2 一般試験 (地方試験 2)

入学試験問題

数学 I・A

(地 方 試 験)
大阪・佐賀・熊本・大分・鹿児島
看護学科・リハビリテーション学科・社会福祉学科
平成 19 年 2 月 2 日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて 3 ページ あり、これとは別に 解答用紙が、1 枚 ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

1 次の各問いに答えよ。

問 1. $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta = \boxed{\text{ア}}$，$\tan\theta = \boxed{\text{イ}}$ である。

問 2. $|\,a-1\,| < 2$ のとき，$\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-6a+9}$ を簡単にすると，$\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-6a+9} > 0$ を満たす a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

問 3. 2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの頂点が点 $(1,\ 2)$ であるとき，定数 a の値は $\boxed{\text{オ}}$ で，定数 b の値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

問 4. 赤玉 3 個，黒玉 2 個，白玉 4 個が入っている袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 3 個とも赤玉である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 黒玉 1 個と白玉 2 個が出る確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3) 3 個とも同じ色である確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

2 次の各問いに答えよ。

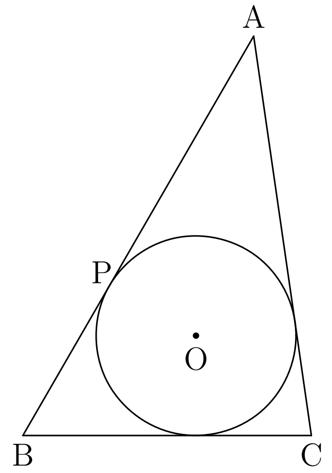
なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 三角形 ABC の内接円の中心を O，辺 AB の接点を P とし，$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$，$\mathrm{AB} = 8$，$\mathrm{BC} = 5$ とする。

(1) AC の長さを求めよ。

(2) BP の長さを求めよ。

(3) 内接円の半径を求めよ。



問 B. $a > 0$ とする。2 次関数 $y = ax^2 - 6ax + b$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 14 で，最小値が 2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問 1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{3}\div\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ア. $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　イ. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

問 2. $|\,a-1\,|<2$ を解いて　$-1<a<3$

$$\sqrt{a^2+4a+4}=\sqrt{(a+2)^2}=|\,a+2\,|$$
$$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|\,a-3\,|$$

$-1<a<3$ のとき　$a+2>0$，$a-3<0$ であるから

$$|\,a+2\,|=a+2,\ |\,a-3\,|=-(a-3)=-a+3$$

このとき　$\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-6a+9}=(a+2)-(-a+3)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =2a-1$

また，$\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-6a+9}>0$ を満たす a の値の範囲は,

$$2a-1>0\quad これを解いて\quad a>\frac{1}{2}$$

$-1<a<3$ に注意して　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a<3}$

(答) ウ. $2a-1$　エ. $\dfrac{1}{2}<a<3$

問 3. 放物線 $y = x^2 + ax + b$ の頂点が $(1,\ 2)$ であるから，x^2 の係数に注意して

$$y = (x-1)^2 + 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 2x + 3$$

よって $\boldsymbol{a = -2,\ b = 3}$

(答) オ. -2 カ. 3

問 4. (1) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{84}}$

(2) $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{2 \times 6}{84} = \boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

(3) 3 個とも同じ色であるのは，3 個とも赤玉の場合と 3 個とも白玉の場合である.
3 個とも白玉の確率は $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{84}$
したがって，(1) と上の結果から，求める確率は

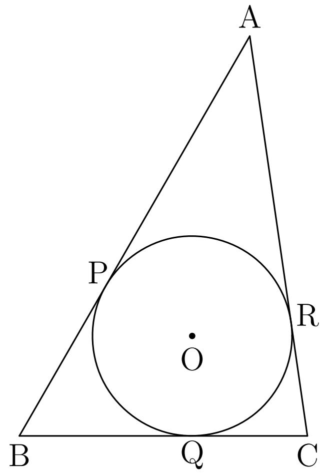
$$\frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \boldsymbol{\frac{5}{84}}$$

(答) キ. $\dfrac{1}{84}$ ク. $\dfrac{1}{7}$ ケ. $\dfrac{5}{84}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問 A. (1) 余弦定理により　$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ \\ &= 64 + 25 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 49\end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathbf{AC = 7}$



(2) この内接円と辺 BC，AC との接点を，それぞれ Q，R とする．
$\mathrm{BP} = x$ とおくと，$\mathrm{AP} = 8 - x$
$\mathrm{AP} = \mathrm{AR}$ であるから　$\mathrm{AR} = 8 - x$
$\mathrm{BP} = \mathrm{BQ}$，$\mathrm{BC} = 5$ より　$\mathrm{CQ} = 5 - x$
また，$\mathrm{CQ} = \mathrm{CR}$ より　$\mathrm{CR} = 5 - x$
$\mathrm{AC} = 7$ より　$(8 - x) + (5 - x) = 7$
これを解いて　$x = \mathbf{3}$

(3) $\triangle\mathrm{OBQ}$ は，$\angle\mathrm{OBQ} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{BQO} = 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{BQ}\tan 30^\circ = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

問 B.

$$\begin{aligned}y &= ax^2 - 6ax + b \\ &= a(x^2 - 6x) + b \\ &= a\{(x-3)^2 - 3^2\} + b \\ &= a(x-3)^2 - 9a + b\end{aligned}$$

$a > 0$ より，$1 \leqq x \leqq 4$ において，$x = 1$ で最大値 14 をとり，$x = 3$ で最小値 2 をとるので

$$-5a + b = 14,\ -9a + b = 2$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 3,\ b = 29}$

1.7.3 一般試験 (看護学科・リハビリテーション学科)

入学試験問題

数学I・A

(看護学科・リハビリテーション学科共通)

本学会場

平成19年2月3日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて3ページあり、これとは別に解答用紙が、1枚ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問 1. a は定数とする． $a^2(x^2+x-1)-a(3x^2-x-2)+2(x^2-x+3)$ が x についての 1 次式であるとき，a の値は $\boxed{\text{ア}}$ で，そのとき，x についての 1 次式は $\boxed{\text{イ}}$ である。

問 2. $a^2(b-c)-b^2(a+c)-c^2(a-b)+2abc$ を因数分解すると $\boxed{\text{ウ}}$ である。

問 3. 半径 4 の円の周上に 3 点 A，B，C がある。△ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ とする。

(1) 辺 BC の長さは $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) △ABC が二等辺三角形のとき，△ABC の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。

問 4. $a>0$ とする。2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，2 次関数 $y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に $a-2$ だけ平行移動した放物線とする。

(1) $f(x)=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 a の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3) 2 次関数 $y=f(x)$ の最小値が 4 であるとき，定数 a の値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 不等式 $|\,x-3\,|+|\,2x-8\,|<3$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

問 B. 2 個のさいころを同時に投げて，出た目の和が 4 以下のときは，180 円，5 以上 8 以下のときは，360 円，9 以上のときは，540 円の賞金が得られるとする。この試行において，2 個のさいころを同時に投げて得られる賞金額の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ 問 1. $a^2(x^2+x-1)-a(3x^2-x-2)+2(x^2-x+3)$ を x について整理すると

$$\begin{aligned}&(a^2-3a+2)x^2+(a^2+a-2)x+(-a^2+2a+6)\\=&(a-1)(a-2)x^2+(a+2)(a-1)x+(-a^2+2a+6) \qquad \cdots①\end{aligned}$$

これが x についての 1 次式であるから

$$(a-1)(a-2)=0,\ (a+2)(a-1)\neq 0$$

であるから　$\boldsymbol{a=2}$

$a=2$ を ① に代入して　$\boldsymbol{4x+6}$

(答) ア. 2　イ. $4x+6$

問 2.
$$\begin{aligned}&a^2(b-c)-b^2(a+c)-c^2(a-b)+2abc\\=&(b-c)a^2-(b^2-2bc+c^2)a-(b^2c-bc^2)\\=&(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)\\=&(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\=&(b-c)\{a^2+(-b+c)a+(-b)\cdot c\}\\=&\boldsymbol{(b-c)(a-b)(a+c)}\end{aligned}$$

(答) ウ. $(b-c)(a-b)(a+c)$

問 3. (1) 正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 120^\circ}=2\cdot 4$

よって　$\mathrm{BC}=2\cdot 4\sin 120^\circ=2\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(2) △ABC が二等辺三角形であるとき，$A=120^\circ$ から　$B=C=30^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin 30^\circ}=2\cdot 4$

よって　$\mathrm{CA}=2\cdot 4\sin 30^\circ=2\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}=4$

このとき　CA = AB であるから　AB = 4

よって
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(答) エ. $4\sqrt{3}$　オ. $4\sqrt{3}$

問 4. (1) $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に $a-2$ だけ平行移動したものは

$$y-(a-2)=a(x-1)^2 \quad \text{すなわち} \quad y=ax^2-2ax+2a-2$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=ax^2-2ax+2a-2}$

(2) $f(x)=a(x-1)^2+a-2$ であるから，x 軸に接するとき

$a-2=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=2}$

(3) $f(x)=a(x-1)^2+a-2$ の最小値が 4 であるから

$a-2=4$　ゆえに　$\boldsymbol{a=6}$

(答) カ. $ax^2-2ax+2a-2$　キ. 2　ク. 6

$\boxed{\textbf{2}}$ 問 A. [1] $x<3$ のとき，$|x-3|=-x+3$，$|2x-8|=-2x+8$ であるから

不等式は　$(-x+3)+(-2x+8)<3$

これを解いて　$x>\dfrac{8}{3}$

このとき，不等式の解は　$\dfrac{8}{3}<x<3$

[2] $3 \leqq x<4$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|2x-8|=-2x+8$ であるから

不等式は　$(x-3)+(-2x+8)<3$

これを解いて　$x>2$

このとき，不等式の解は　$3 \leqq x<4$

[3] $4 \leqq x$ のとき，$|x-3|=x-3$，$|2x-8|=2x-8$ であるから

不等式は　$(x-3)+(2x-8)<3$

これを解いて　$x<\dfrac{14}{3}$

このとき，不等式の解は　$4 \leqq x<\dfrac{14}{3}$

よって，求める解は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}<x<\dfrac{14}{3}}$

問 B. 2 個のさいころの目の出方は，$6 \times 6 = 36$ 通り．

［1］ 目の和が 4 以下であるのは，以下の 6 通り．

(1,1),
(1,2), (2,1),
(1,3), (2,2), (3,1)

［2］ 目の和が 5 以上 8 以下であるのは，以下の 20 通り．

(1,4), (2,3), (3,2), (4,1),
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1),
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1),
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2),

［3］ 目の和が 9 以上であるのは，以下の 10 通り

(3,6), (4,5), (5,4), (6,3),
(4,6), (5,5), (6,4),
(5,6), (6,5),
(6,6)

よって，賞金額の期待値は

$$180 \times \frac{6}{36} + 360 \times \frac{20}{36} + 540 \times \frac{10}{36} = \mathbf{380} \quad (\text{円})$$

1.7.4 一般試験 (社会福祉学科)

入学試験問題

数 学 I・A

(社会福祉学科)

本 学 会 場

平成 19 年 2 月 3 日実施

注意事項

1. 「始め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 受験票、筆記用具 (鉛筆・消しゴム)、時計 (時間表示機能のみ) 以外の物は机の下に置くこと。
3. 問題用紙は、表紙を含めて 3 ページ あり、これとは別に 解答用紙が、1 枚 ある。
4. 受験番号と氏名は、監督者の指示に従って記入すること。
   (解答用紙の受験番号と氏名欄はすべて記入すること。)
5. 質問事項等がある場合や特別な事情 (病気・トイレ等) のある場合には、その場で手を挙げて待機し、監督者の指示に従うこと。
6. 原則として、試験終了まで退出できない。
7. 試験終了後は、監督者の指示があるまで、各自の席で待機すること。
8. 解答用紙を回収した後、問題用紙は持ち帰ること。
9. 試験会場では、携帯電話・PHS・ポケベル・時計のアラーム等の電源を切っておくこと。

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

問1. k は定数とする。2次関数 $f(x) = x^2 + (2k+4)x - k + 10$ に対し，$y = f(x)$ のグラフを C とする。

(1) C の頂点は点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。

(2) C の頂点の y 座標が 12 となるような定数 k の値は $k = \boxed{\text{ウ}}$ または $k = \boxed{\text{エ}}$ である。

問2. AD//BC の台形 ABCD において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を E とする。点 E を通り辺 AD に平行な直線を引き，辺 DC との交点を F とし，線分 EF と線分 AC の交点を G とする。AD = 8 とするとき，GF の長さは $\boxed{\text{オ}}$ である。

問3. k は定数とする。2次不等式 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k - 2 \leqq 0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。

問4. 1枚の硬貨を5回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) ちょうど3回表が出る確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 表と裏が交互に出る確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3) 少なくとも2回表が出る確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

2 次の各問いに答えよ。

なお，解答は答えだけでなく，答えを導くまでの手順がわかるように書くこと。

問 A. 関数 $f(\theta) = -\sin^2\theta - \cos\theta + \dfrac{1}{4}$ がある。

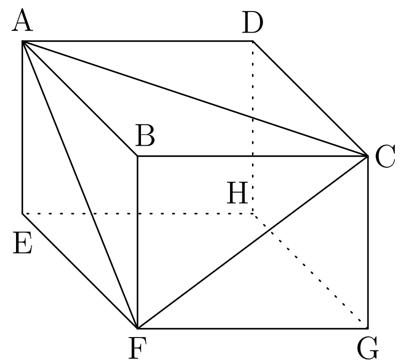
(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，方程式 $f(\theta) = 0$ を解け。

(2) $30^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

問 B. 図のような $\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{BC} = 4$，$\mathrm{BF} = 3$ である直方体 ABCD-EFGH がある。$\triangle\mathrm{AFC}$ において，$\angle\mathrm{AFC} = \theta$ とする。

(1) $\cos\theta$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{AFC}$ の面積を求めよ。



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 問1. (1) $f(x)=x^2+(2k+4)x-k+10$

$$=x^2+2(k+2)x-k+10$$
$$=\{x+(k+2)\}^2-(k+2)^2-k+10$$
$$=(x+k+2)^2-k^2-5k+6$$

頂点の座標は $\boldsymbol{(-k-2,\ -k^2-5k+6)}$

(2) 頂点の y 座標が12であるから，(1)の結果より

$$-k^2-5k+6=12 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-2,\ -3}$$

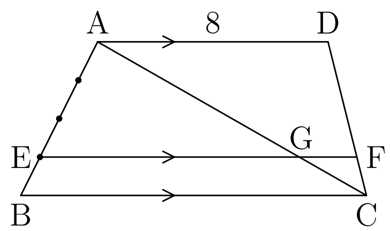
(答) ア. $-k-2$　イ. $-k^2-5k+6$　ウ. エ. $-2, -3$

問2. AD//BC//EF，AE : EB $=3:1$ であるから

AG : GC $=3:1$，DF : FC $=3:1$

ゆえに　△ACD : △GCF $=4:1$

よって　GF $=$ AD $\times \dfrac{1}{4}=8\times\dfrac{1}{4}=\mathbf{2}$



(答) オ. 2

問3.

$$x^2-(2k+1)x+k^2+k-2\leqq 0$$
$$x^2-\{(k-1)+(k+2)\}x+(k-1)(k+2)\leqq 0$$
$$\{x-(k-1)\}\{x-(k+2)\}\leqq 0$$

よって　$\boldsymbol{k-1\leqq x\leqq k+2}$

(答) カ. $k-1\leqq x\leqq k+2$

問 4. (1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$

(2) 表裏表裏表，裏表裏表裏と交互に出る確率はともに

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

よって，求める確率は $\frac{1}{32}+\frac{1}{32} = \boldsymbol{\frac{1}{16}}$

(3) 表が出るのが 1 回以下である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32}+\frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1-\frac{3}{16} = \boldsymbol{\frac{13}{16}}$

(答) キ. $\frac{5}{16}$ ク. $\frac{1}{16}$ ケ. $\frac{13}{16}$

2 問 A. (1) $f(\theta)=0$ から

$$-\sin^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{4}=0$$

$$-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta+\frac{1}{4}=0$$

整理して

$$4\cos^2\theta-4\cos\theta-3=0$$

$$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-3)=0$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ これを解いて $\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

(2) $f(\theta) = -\sin^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{4} = \cos^2\theta-\cos\theta-\frac{3}{4}$ であるから
$\cos\theta = t$ とおくと，$30^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$f(\theta) = t^2-t-\frac{3}{4} = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2-1 \qquad \left(-1 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であるから

$t=-1$ すなわち $\theta=180^\circ$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$ をとり，
$t=\frac{1}{2}$ すなわち $\theta=60^\circ$ のとき **最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

問 B. (1) $\mathrm{AF}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\mathrm{FC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\mathrm{CA}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

ゆえに，余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{FC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FC}}\\ &= \frac{5^2+5^2-(4\sqrt{2})}{2\cdot5\cdot5}\\ &= \frac{18}{50}=\mathbf{\frac{9}{25}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{9}{25}\right)^2}=\frac{4\sqrt{34}}{25}$

よって　$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AFC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FC}\cos\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\frac{4\sqrt{34}}{25}=\mathbf{2\sqrt{34}}\end{aligned}$$

1.8　九州ルーテル学院大学

1.8.1　一般I期試験 70分

1 次の各問に答えよ．

(1) $(-2x^2)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}x\right)^2$ を簡単にせよ．

(2) $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，$y = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ とするとき，$x^3 + y^3$ および $x^4 + y^4$ の値を求めよ．

(3) $y = \sin x$ とする．$30^\circ \leqq x \leqq 135^\circ$ のとき y のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) $p > 0$ とする．$x^2 - (1+p)x + \dfrac{4}{5} = 0$ の 1 つの解が他の解の 5 倍であるとき，p の値を求めよ．

(5) 2 次不等式 $6x^2 + 17x + 7 < 0$ および $6x^2 + 13x < 0$ を両方満たす整数解の個数を求めよ．

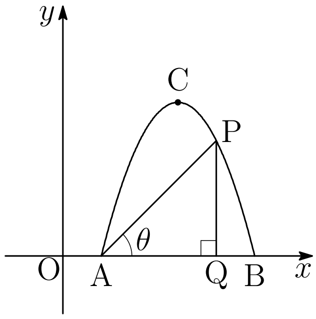
2 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax - a + 1$ について以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ．

(2) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つとき，a 値の範囲を求めよ．

(3) $f(x) = 0$ が異符号の実数解を持つとき，a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ 2 次関数 $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ (ただし $f(x) > 0$) を考える．$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点を A および B とし，頂点を C とする．また，$y = f(x)$ 上の点を P とし，P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする．



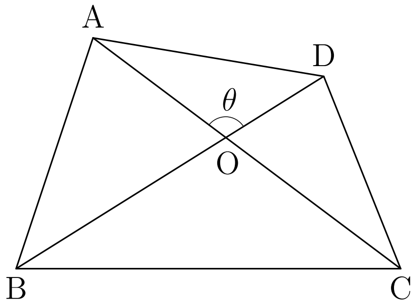
(1) A，B および C の座標を求めよ．

(2) Q の座標を $(t,\ 0)$ とする．$t = \dfrac{7}{2}$ のとき $\triangle$APQ の面積を求めよ．

(3) $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QA}}$ となるとき，t の値を求めよ．

(4) $\angle\mathrm{PAQ} = \theta$ とする．$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ となるとき，t の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 四角形 ABCD の対角線の交点を O とし，対角線のなす角 θ とする．
また，$\overline{\mathrm{AC}} = a$，$\overline{\mathrm{BD}} = b$ とする．



(1) 四角形 ABCD の面積を S とするとき，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であることを示せ．

(2) $b = 10 - a$ の関係があるとき，S の最大値が $\dfrac{25}{2}$ となることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(-2x^2)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}x\right)^2 = -8x^6 \times \dfrac{1}{9}x^2 = \boldsymbol{-\dfrac{8}{9}x^8}$

(2) $x+y = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$，$xy = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$ より

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{3})^2 - 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{2}$

したがって
$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)\{(x^2+y^2)-xy\} \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{9}{4}\sqrt{3}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{49}{8}} \end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1}$

(4) 2つの解を α，5α とおくと，2次方程式 $x^2-(1+p)x+\dfrac{4}{5}=0$ の左辺は
$$(x-\alpha)(x-5\alpha) = x^2 - 6\alpha x + 5\alpha^2$$
よって，x の係数を比較して
$$-(1+p) = -6\alpha,\quad \frac{4}{5} = 5\alpha^2$$
ゆえに
$$\begin{cases} p = 6\alpha - 1 & \cdots ① \\ \alpha^2 = \dfrac{4}{25} & \cdots ② \end{cases}$$
② から　$\alpha = \pm\dfrac{2}{5}$

これを ① に代入して　$\alpha = \dfrac{2}{5}$ のとき　$p = \dfrac{7}{5}$

$\alpha = -\dfrac{2}{5}$ のとき　$p = -\dfrac{17}{5}$

$p>0$ であるから　$\boldsymbol{p = \dfrac{7}{5}}$

別解 (数学 II)

2次方程式 $x^2-(1+p)x+\dfrac{4}{5}$ の2つの解を α，5α とすると
$$\alpha + 5\alpha = 1 + p,\quad \alpha\cdot 5\alpha = \frac{4}{5}$$
である．これから ①，② が与えられる．

(5)　$6x^2+17x+7<0$

左辺を因数分解して　$(2x+1)(3x+7)<0$

ゆえに　$-\frac{7}{3}<x<-\frac{1}{2}$　$\cdots$①

$6x^2+13x<0$

左辺を因数分解して　$x(6x+13)<0$

ゆえに　$-\frac{13}{6}<x<0$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$-\frac{13}{6}<x<-\frac{1}{2}$

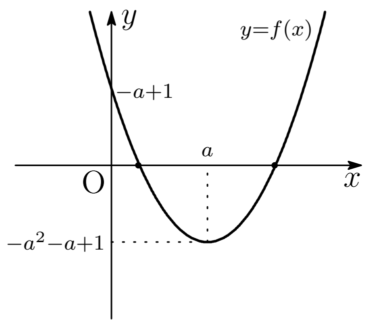
よって，整数解の個数は -2 と -1 の **2 個**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^2-2ax-a+1$

$=(x-a)^2-a^2-a+1$

したがって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(a, -a^2-a+1)}$

(2) $f(x)=0$ が異なる2つの正の実数解を持つための条件は



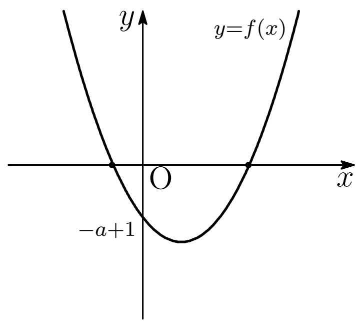
$$\begin{cases} f(0)=-a+1>0 \\ a>0 \\ -a^2-a+1<0 \end{cases}$$

第1式から　$a<1$

第3式から　$a<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<1}$

(3) $f(x)=0$ が異符号の実数解をもつための条件は



$$f(0)=-a+1<0$$

すなわち　$\boldsymbol{a>1}$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) A，B の x 座標は $y=0$ となる x の値であるから

$$-x^2+6x-5=0 \qquad これを解いて \qquad x=1,\ 5$$

グラフから　**A(1, 0)，B(5, 0)**

頂点 C の座標は

$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-5 \\ &= -(x-3)^2+4 \end{aligned}$$

であるから　**C(3, 4)**

(2) P の x 座標は $\dfrac{7}{2}$ であるから，y 座標は

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6\cdot\frac{7}{2} - 5 = \frac{15}{4}$$

また，$\mathrm{AQ} = \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2}\times\mathrm{AQ}\times f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{15}{4} = \boldsymbol{\frac{75}{16}}$$

(3) $\overline{\mathrm{PQ}} = -t^2+6t-5$，$\overline{\mathrm{QA}} = t-1$ であるから，これらを $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QA}}$ に代入して

$$-t^2+6t-5 = t-1$$

整理して　$t^2-5t+4=0$

ゆえに　$(t-1)(t-4)=0$

$1<t<5$ であるから　$\boldsymbol{t=4}$

(4) $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{-t^2+6t-5}{t-1} = \dfrac{-(t-1)(t-5)}{t-1} = 5-t \quad \cdots ①$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ を $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+\tan^2\theta = 1\div\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

すなわち　$\tan^2\theta = \dfrac{16}{9}$

図から θ は鋭角であるから　$\tan\theta > 0$

ゆえに　$\tan\theta = \dfrac{4}{3} \quad \cdots ②$

①，② より　$5-t = \dfrac{4}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{t = \frac{11}{3}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) A から BD に下ろした垂線の長さを h_1 とすると　$h_1 = \mathrm{OA}\sin\theta$

C から BD に下ろした垂線の長さを h_2 とすると　$h_2 = \mathrm{OC}\sin\theta$

したがって　$S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot h_1 + \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot h_2$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{OA}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{OC}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{BD}(\mathrm{OA} + \mathrm{OC})\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

(2) $b = 10 - a$ より　$a > 0$ かつ $b > 0$ より　$0 < a < 10$

(1) の結果に $b = 10 - a$ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(10 - a)\sin\theta \\ &= -\frac{1}{2}(a^2 - 10a)\sin\theta \\ &= -\frac{1}{2}\{(a-5)^2 - 5^2\}\sin\theta \\ &= -\frac{\sin\theta}{2}(a-5)^2 + \frac{25}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから　$0 < \sin\theta \leqq 1$

ゆえに　$a = 5$，$\sin\theta = 1$ のとき，S は最大となる．

よって　$a = 5$，$b = 5$，$\theta = 90^\circ$ のとき，S は最大値 $\dfrac{25}{2}$ をとる．

1.8.2 一般 II 期試験 70 分

1 次の各問に答えよ．

(1) $\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}x\right)^3$ を簡単にせよ．

(2) $x = \sqrt{5}+\sqrt{2}$，$y = \sqrt{5}-\sqrt{2}$ とするとき，x^2+y^2 および x^3+y^3 の値を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 120^\circ}$ を簡単にせよ．

(4) $|\,2x-1\,| < x+2$ を解け．

(5) 2 次不等式 $x^2-3x \leqq 0$ および $x^2-5x+4<0$ を両方満たす整数解の個数を求めよ．

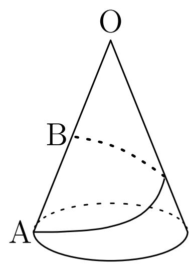
2 2 次関数 $f(x) = x^2+2mx+m+1$ を考える．どのような x に対しても $f(x)>0$ となる m の値の範囲を求めよ．

3 $f(\theta) = \sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 1$ とする．

(1) $\theta = 60^\circ$ のとき $f(\theta)$ の値を求めよ．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ のとき，$f(\theta)$ の最大値・最小値とそのときの θ の値を求めよ．

4 底円の直径が 10，母線 OA の長さが 30 の直円錐がある．OA の中点を B としたとき，A から出発し円錐を一回りして B に至る最短距離を考える．



(1) 直円錐の展開図を描き，最短経路を示せ．

(2) 最短経路の長さを求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}x\right)^3 = \dfrac{9}{4}x^2 \times \left(-\dfrac{1}{27}x^3\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{12}x^5}$

(2) $x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=2\sqrt{5}$,
$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$

したがって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(2\sqrt{5})^2-2\times 3=\mathbf{14}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{5})^3-3\times 3\times 2\sqrt{5}=\boldsymbol{22\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{1}{\sin 150^\circ - \cos 120^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1} = \mathbf{1}$

(4) $|\,2x-1\,|<x+2$ から $-(x+2)<2x-1<x+2$
ゆえに，次の連立不等式を解けばよい．

$$\begin{cases} -(x+2)<2x-1 \\ 2x-1<x+2 \end{cases}$$

第1式を解いて　$x>-\dfrac{1}{3}$　$\cdots$①
第2式を解いて　$x<3$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<x<3}$

(5) $x^2-3x\leqq 0$ を解いて　$0\leqq x\leqq 3$　$\cdots$①
$x^2-5x+4<0$ を解いて　$1<x<4$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$1<x\leqq 3$
よって，整数解の個数は 2 と 3 の **2 個**

$\boxed{2}$ $f(x)$ の係数について

$$D/4=m^2-1\cdot(m+1)=m^2-m-1$$

とする．
$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ が成り立てばよい．

ゆえに　$m^2-m-1<0$
よって　$\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f\,(60^\circ) = \sin^2 60^\circ + \sqrt{2}\cos 60^\circ + 1$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \boldsymbol{\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) $\sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 1$

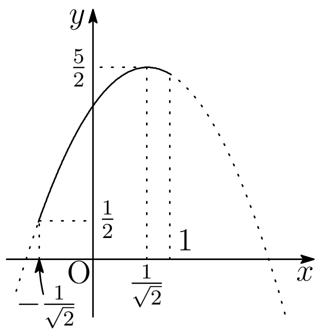
$= (1 - \cos^2\theta) + \sqrt{2}\cos\theta + 1$

$= -\cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 2$

$\cos\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ のとき

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ であり

$$f(\theta) = -x^2 + \sqrt{2}x + 2$$



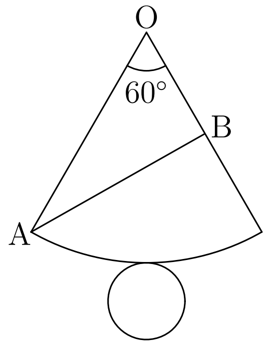
すなわち

$$f(\theta) = -\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

ゆえに　$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとり，

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 135^\circ}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2\pi\cdot 5}{2\pi\cdot 30} \times 360^\circ = 60^\circ$ (答は右の図)



(2) △AOB に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos 60^\circ \\ &= 30^2 + 15^2 - 2\cdot 30\cdot 15\cdot\frac{1}{2} \\ &= 15^2\cdot 3\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathbf{AB = 15\sqrt{3}}$

1.9　熊本県立保育大学校

1.9.1　一般試験 60分

設問 1 次の式を展開しなさい。　式 : $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$

設問 2 2桁の自然数 x と y の積は 360，最小公倍数は 120 である．このとき，x と y の和の最小値を求めなさい。

設問 3 4%の食塩水と 5%の食塩水が，200g ずつある。これから適当な量をとり，さらに 7%の食塩水をいくらか加えて，6%の食塩水を 800g 作りたい。このとき，7%の食塩水を出来るだけ多く使うとすれば，各食塩水を何 g ずつ使えばよいか求めなさい。

設問 4 三角形 ABC において，$c=2a\cos B$ が成り立つとき，この三角形はどのような形状か求めなさい。

設問 5 次の 2 次方程式 A と B が，ともに実数解をもつような a の値をすべて求めなさい。ただし，a は整数とする．

$$方程式 A : x^2+2ax+a+2=0$$

$$方程式 B : x^2-2(a+3)x+2(a^2+7)=0$$

解答例

設問 1

$$\begin{aligned}(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3 &= \{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^3\\ &= \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^3\\ &= (a^4-b^4)^3\\ &= (a^4)^3-3(a^4)^2b^4+3a^4(b^4)^2-(b^4)^3\\ &= \boldsymbol{a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}}\end{aligned}$$

設問 2 最大公約数を G，$x=Ga$，$y=Gb$ (a,b は互いに素) とおくと，

最小公倍数は Gab となる．このとき

$$xy=Ga\times Gb=G\times Gab$$

題意より $xy=360$，$Gab=120$ であるから　$G=3$，$ab=40$

ゆえに，条件を満たす a と b の組は　1 と 40，5 と 8

したがって，x と y の組は　$3{\cdot}1$ と $3{\cdot}40$，$3{\cdot}5$ と $3{\cdot}8$

よって，求める $x+y$ の最小値は　$3{\cdot}5+3{\cdot}8=\mathbf{39}$

設問 3 4%，5%，7%の食塩水を x g，y g，z g ずつ混ぜるとする．

食塩水の質量から　$x+y+z=800$　$\cdots$①

食塩の質量から　$0.04x+0.05y+0.07z=800\times 0.06$

両辺に 100 をかけて　$4x+5y+7z=4800$　$\cdots$②

①，② より　$y=400-\dfrac{3}{2}x$　$\cdots$③

$z=400+\dfrac{1}{2}x$　$\cdots$④

$0\leqq x\leqq 200$，$0\leqq y\leqq 200$ であるから，③ から　$\dfrac{400}{3}\leqq x\leqq 200$　$\cdots$⑤

題意より z を最大にするときの x，y，z を求めればよい．

④，⑤ から　$x=200$ のとき z は最大となる．

これを ③，④ に代入して　$y=100$，$z=500$

(答) **4% : 200g，5% : 100g，7% : 500g**

設問 4 余弦定理により，与えられた等式は

$$c=2a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

よって　$c=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{c}$

すなわち　$c^2=c^2+a^2-b^2$

ゆえに　$b^2=a^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

よって，三角形 ABC は　**BC = CA の二等辺三角形**

設問 5 方程式 A，B の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_1/4 &= a^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2 \\ &= (a+1)(a-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2/4 &= \{-(a+3)\}^2-1\cdot 2(a^2+7)=-a^2+6a-5 \\ &= -(a-1)(a-5) \end{aligned}$$

A，B がともに実数解をもつための条件は　$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$

$D_1 \geqq 0$ から　$(a+1)(a-2)\geqq 0$

よって　$a\leqq -1$，$2\leqq a$　$\cdots$①

$D_2 \geqq 0$ から　$-(a-1)(a-5)\geqq 0$

よって　$1\leqq a\leqq 5$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$2\leqq a\leqq 5$

a は整数であるから　$\boldsymbol{a=2,\ 3,\ 4,\ 5}$

1.10 熊本県立技術短期大学校

1.10.1 推薦試験 90 分

数学I(90 分)

平成 18 年 11 月 26 日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始 30 分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の 5 分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆又はシャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能及び翻訳機能を持つ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

[1] (1) 1個240円の菓子Aと1個150円の菓子Bがある。A，Bあわせて15個を3,000円以内で買うとき，Aは最大$\boxed{\text{ア}}$個買える。

(2) x^3+5x^2+8x+4 を因数分解すると，$(\boxed{\text{イ}})\times(\boxed{\text{ウ}})^2$ である。

(3) $z=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，分母を有理化すると，$z=\boxed{\text{エ}}$ で $z+\dfrac{1}{z}=\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 点 $(1,-2)$ を通る放物線 $y=-x^2+ax+b$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に1だけ平行移動したとき，移動後の放物線は，点 $(-1,-2)$ を通る。このとき $a=\boxed{\text{カ}}$，$b=\boxed{\text{キ}}$ である。

(5) $0°\leqq\theta\leqq 45°$ であるとき，$y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値は$\boxed{\text{ク}}$，最小値は$\boxed{\text{ケ}}$である。

[2] (1) $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}$ (ただし, $1<a<2$) の根号をはずし，簡単にすると$\boxed{\text{コ}}a+\boxed{\text{サ}}$となる。

(2) 2次関数 $y=2x^2+4x-1$ の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は$\boxed{\text{シ}}$であり，この2次関数の表すグラフを x 軸方向に2だけ平行移動したグラフの表す2次関数の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は$\boxed{\text{ス}}$である。

(3) 2次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ の値が正となる範囲が $-1<x<3$ であるならば，$a=\boxed{\text{セ}}$，$b=\boxed{\text{ソ}}$である。ただし，$a>0$ とする。

(4) $\triangle$ABCにおいて，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$ のとき，$\angle\mathrm{A}=\boxed{\text{タ}}°$，$\angle\mathrm{B}=\boxed{\text{チ}}°$ である。

(5) $4\sin^2\theta+6\tan^2\theta=3$ を満たし，$0°<\theta<180°$ の範囲にある θ は，$\theta=\boxed{\text{ツ}}°$，$\boxed{\text{テ}}°$ である。

[3] $P=2x^2+12xy+21y^2+12y+14$ は，$(x,\ y)=\boxed{\text{ト}}$ で，最小値$\boxed{\text{ナ}}$をとる。また，x，y を整数とするとき，$P=5$ を満たす x，y は，$(x,\ y)=\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ である。

[4] 直径が3の円周上に4点A，B，C，Dが，時計の回る方向にこの順番に並んでいる。$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{DAB}=90°$ であるとき，$\sin\angle\mathrm{ADB}=\boxed{\text{ネ}}$ で，$\triangle$ABDの面積は$\boxed{\text{ノ}}$である。さらに，$\mathrm{CB}=\dfrac{3}{2}$ とすると，$\mathrm{CA}=\boxed{\text{ハ}}$ で $\triangle$ABCの面積は$\boxed{\text{ヒ}}$となる。

解答例

[1] (1) 菓子Aを x 個買うとすると，菓子Bは $(15-x)$ 個買うことになるから

$$240x + 150(15-x) \leqq 3000$$

整理すると　$90x \leqq 750$

よって　$x \leqq \dfrac{25}{3}$

$\dfrac{25}{3} = 8.3\cdots$ で，x は整数であるから　$x \leqq 8$

したがって，**A は最大 8 個買える**。

(答) ア．8

(2) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ とすると

$$P(-1) = (-1)^3 + 5\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1) + 4 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$\begin{array}{r|llll} & x^2 & +4x & +4 & \\ \hline x+1 & x^3 & +5x^2 & +8x & +4 \\ & x^3 & +x^2 & & \\ \hline & & 4x^2 & +8x & \\ & & 4x^2 & +4x & \\ \hline & & & 4x & +4 \\ & & & 4x & +4 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x^2+4x+4)$$

したがって

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = \boldsymbol{(x+1)(x+2)^2}$$

(答) イ．$x+1$　ウ．$x+2$

問題点

同校入試課に本問題は因数定理を用いるため，数学 II の問題ではないかと問い合わせたところ，$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+a)(x+b)^2$ のように x の恒等式と考えて解く問題であるという回答があった．しかし，この解法も数学 II の「式と証明」で扱う内容であると説明したところ，今後問題作成には細心の注意を払うという回答を得た．

(3) $z = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2} = \boldsymbol{5+2\sqrt{6}}$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(5+2\sqrt{6}) + (5-2\sqrt{6})}{3-2} = \boldsymbol{10}$$

(答) エ．$5+2\sqrt{6}$　オ．10

(4) 放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点 $(p,\ q)$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した点を $(-1,-2)$ とすると

$$p-3=-1,\ q+1=-2 \quad \text{ゆえに} \quad p=2,\ q=-3$$

2 点 $(1,-2)$，$(2,-3)$ は放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点であるから

$$-2=-1^2+a\cdot 1+b$$
$$-3=-2^2+a\cdot 2+b$$

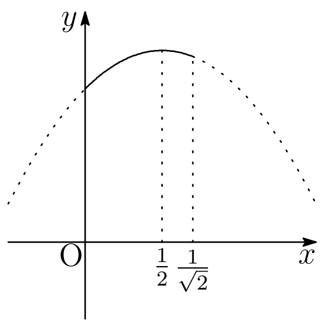
式を整理すると

$$a+b=-1,\ 2a+b=1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

(答) カ. 2　キ. -3

(5) $\cos^2\theta+\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta$
$\qquad\qquad\qquad =-\sin^2\theta+\sin\theta+1$



$\sin\theta=x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ のとき
$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$y=-x^2+x+1$$

すなわち　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta=30^\circ$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$
　　　　$x=0$　すなわち　$\theta=0^\circ$ のとき　**最小値 1**

(答) ク. $\dfrac{5}{4}$　ケ. 1

[2] (1) $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+1)^2}$
$=|\,a-2\,|-|\,a+1\,|$

$1<a<2$ のとき，$a-2<0$，$a+1>0$ であるから

$$|\,a-2\,|=-(a-2)=-a+2$$
$$|\,a+1\,|=a+1$$

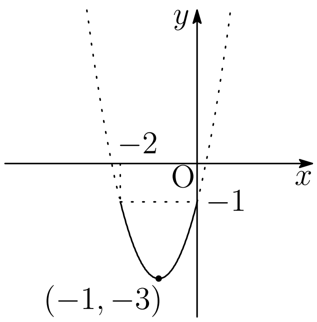
したがって　$|\,a-2\,|-|\,a+1\,|=-a+2-(a+1)=-2a+1$

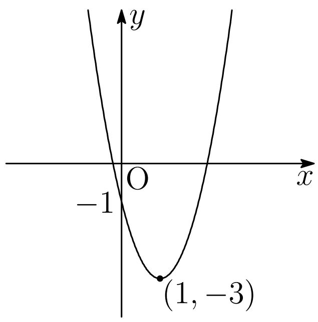
よって　　$\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}=\boldsymbol{-2a+1}$

(答) コ．-2　サ．1

(2)
$$\begin{aligned} y&=2x^2+4x-1 \\ &=2(x+1)^2-3 \end{aligned}$$

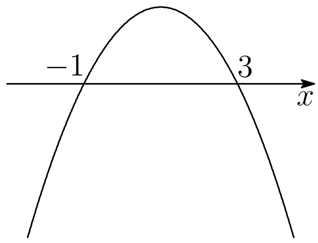
であるから，2 次関数 $y=2x^2+4x-1$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ は，
$x=-1$ で**最小値 -3** をとる (左図).
この 2 次関数のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフ (右図) の表す 2 次関数の $-2 \leqq x \leqq 0$ における最小値は，$x=0$ で**最小値 -1** をとる.





(答) シ．-3　ス．-1

(3) 条件から，2次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ のグラフは，$-1<x<3$ のときだけ x 軸の上側にある．



すなわち，上に凸の放物線で2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$$a-2<0$$
$$(a-2)\cdot(-1)^2+2a^2\cdot(-1)+b=0$$
$$(a-2)\cdot3^2+2a^2\cdot3+b=0$$

$a>0$ であるから，第1式より　$0<a<2$　$\cdots$①

第2式より　$b=2a^2-a+2$　$\cdots$②

第3式より　$b=-6a^2-9a+18$　$\cdots$③

②，③から　$2a^2-a+2=-6a^2-9a+18$

整理して　$a^2+a-2=0$

すなわち　$(a-1)(a+2)=0$

① より　$\boldsymbol{a=1}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{b=3}$

(答) セ．1　ソ．3

(4) $a=2$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}-1$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

したがって　$\angle\mathbf{A}=\mathbf{45^\circ}$，$\angle\mathbf{B}=\mathbf{120^\circ}$

(答) タ．45°　チ．120°

(5) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，与えられた式は

$$4\sin^2\theta + \frac{6\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 3$$

すなわち　$4\sin^2\theta\cos^2\theta + 6\sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

$$4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) + 6\sin^2\theta = 3(1-\sin^2\theta)$$

整理して　$4\sin^4\theta - 13\sin^2\theta + 3 = 0$

よって　$(\sin^2\theta - 3)(4\sin^2\theta - 1) = 0$

$\sin^2\theta - 3 \neq 0$ であるから

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

さらに，$0° < \theta < 180°$ より $0 < \sin\theta \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\theta = 30°,\ 150°}$$

(答) ツ．テ．30°，150°

[3]

$$\begin{aligned}P &= 2x^2 + 12xy + 21y^2 + 12y + 14\\ &= 2(x^2 + 6xy) + 21y^2 + 12y + 14\\ &= 2\{(x+3y)^2 - (3y)^2\} + 21y^2 + 12y + 14\\ &= 2(x+3y)^2 + 3y^2 + 12y + 14\\ &= 2(x+3y)^2 + 3(y^2 + 4y) + 14\\ &= 2(x+3y)^2 + 3\{(y+2)^2 - 2^2\} + 14\\ &= 2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 + 2\end{aligned}$$

P は

$$x + 3y = 0 \text{ かつ } y + 2 = 0$$

すなわち　$\boldsymbol{(x,\ y) = (6, -2)}$ **のとき，最小値 2** をとる.

$P = 5$ のとき　$2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 = 3$　$\cdots$①

整数 x，y について，$2(x+3y)^2$ および $3(y+2)^2$ のとる値は，それぞれ

$$2(x+3y)^2 = 0,\ 2\cdot1,\ 2\cdot4,\ 2\cdot9, \cdots$$
$$3(y+2)^2 = 0,\ 3\cdot1,\ 3\cdot4,\ 3\cdot9, \cdots$$

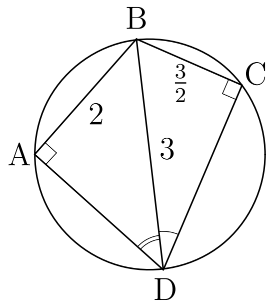
このとき，① を満たすものは　$2(x+3y)^2 = 0$ かつ $3(y+2)^2 = 3\cdot1$

すなわち　$x + 3y = 0$，$y + 2 = \pm1$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (3, -1),\ (9, -3)}$

(答) ト．$(6, -2)$　ナ．2　ニ．ヌ．$(3, -1)$，$(9, -3)$

[4] $\angle\mathrm{DAB} = 90^\circ$ であるから　$\mathrm{BD} = 3$ (直径)



したがって　$\sin\angle\mathrm{ADB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

また　$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AB}^2}$

$$= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

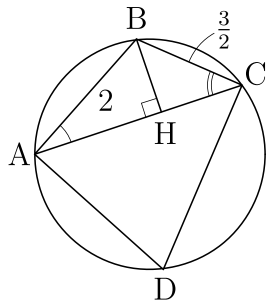
さらに　$\cos\angle\mathrm{BDA} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

BD は直径であるから，直角三角形 BCD において

$$\sin\angle\mathrm{BDC} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2}$$

すなわち　$\angle\mathrm{BDC} = 30^\circ$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，B から CA に垂線 BH を引く.



$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角により

$$\angle\mathrm{BAH} = \angle\mathrm{BDC}$$

ゆえに　$\angle\mathrm{BAH} = 30^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角により

$$\angle\mathrm{BCH} = \angle\mathrm{BDA}$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{BCH} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAH} = 2\cos 30^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$\mathrm{CH} = \mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{BCH} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

したがって　$\mathrm{CA} = \mathrm{AH} + \mathrm{CH} = \boldsymbol{\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

また　$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAH} = 2\sin 30^\circ = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{BH} = \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 1 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}}$

(答) ネ. $\dfrac{2}{3}$　ノ. $\sqrt{5}$　ハ. $\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　ヒ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}$

1.10.2 一般試験 90分

数学I・II(90分)

平成19年2月11日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話の電源は切っておくこと。

[1] (1) 整式 x^3+4x^2+3x+3 を，整式 $x+2$ で割ると，商が x^2+2x+a，余りが b であった。このとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 2次関数 $y=2x^2+4x+3$ のグラフ C の頂点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，C を x 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ だけ平行移動すれば $y=2x^2-2x+1$ のグラフと一致する。

(3) 3次方程式 $x^3+x^2-ax-4=0$ の1つの解が $x=-2$ であるならば，$a=$ $\boxed{\text{カ}}$ で，残りの解は $x=$ $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

(4) $3\cos 2\theta+5\sin\theta+1=0$ が成り立つとき，$\sin\theta=$ $\boxed{\text{ケ}}$ となるから，$-90^\circ<\theta<90^\circ$ とすると $\theta=$ $\boxed{\text{コ}}^\circ$ である。

(5) 関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が，$f'(1)=0$，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=-3$ を満たすとき，$a=$ $\boxed{\text{サ}}$，$b=$ $\boxed{\text{シ}}$ である。

[2] (1) A(0, 4)，B(4, 2) とする。このとき，A，B 間の距離は $\boxed{\text{ス}}$ で，線分 AB の垂直二等分線は，$y=$ $\boxed{\text{セ}}$ である。

(2) $b>0$ のとき，関数 $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の個数が2個ならば，$b=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である。このとき，この関数は $\boxed{\text{タ}}<x<\boxed{\text{チ}}$ の範囲で減少する。

(3) $0<x<\pi$，$\tan x=-2\sqrt{2}$ のとき，$\cos x=$ $\boxed{\text{ツ}}$，$\cos\dfrac{x}{2}=$ $\boxed{\text{テ}}$ である。

(4) $3^{3x}-3^{2x+2}-3^x+9=0$ を満たす x は，$x=$ $\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ である。

(5) 2曲線 $C_1: y=-2x^2+x+2$ と $C_2: y=x^2-2x-4$ の交点の x 座標は $x=$ $\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ であり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[3] 3点 A(−1, 0)，B(2, 3)，C(1, 5) について，点 A と直線 BC の距離は $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である。直線 BC に平行な直線 ℓ が，△ABC の面積を2等分するとき，点 A と直線 ℓ の距離は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また，直線 ℓ と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{フ}}$ である。

[4] 2次曲線 $C: y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ における C の接線と x 軸のなす角を θ とすると $\tan\theta=$ $\boxed{\text{ヘ}}$ である。P を通り，x 軸とのなす角が $\theta+\dfrac{\pi}{6}$ である直線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ホ}}$ であるから，ℓ の方程式は $y=$ $\boxed{\text{マ}}$ である。また，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{ミ}}$ である。

解答例

[1] (1) 右の割り算から

$\boldsymbol{a = -1,\ b = 5}$

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +2x & -1 & \\
\hline
x+2 & x^3 & +4x^2 & +3x & +3 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 2x^2 & +3x & \\
 & & 2x^2 & +4x & \\
\cline{3-5}
 & & & -x & +3 \\
 & & & -x & -2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 5
\end{array}
$$

(別解) 与えられた条件から，等式

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = (x+2)(x^2 + 2x + a) + b$$

が成り立つ．右辺を整理すると

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = x^3 + 4x^2 + (a+4)x + (2a+b)$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$3 = a + 4,\ \ 3 = 2a + b$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 5}$

(答) ア．-1　イ．5

(2) $y = 2x^2 + 4x + 3 \cdots$ ① を変形すると　　$y = 2(x+1)^2 + 1$
ゆえに，① の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1, -1)}$
$y = 2x^2 - 2x + 1 \cdots$ ② を変形すると　　$y = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$
よって，頂点は点 $(-1,\ 1)$ から点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に移動する．ゆえに ① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して ② のグラフに一致するとすれば，①，② の頂点の座標から

$$-1 + p = \frac{1}{2},\ \ 1 + q = \frac{1}{2}$$

これを解いて　$p = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \ q = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(答) ウ．$(-1,\ 1)$　エ．$\dfrac{3}{2}$　オ．$-\dfrac{1}{2}$

(3) $x=-2$ が，この方程式の解であるから

$$(-2)^3+(-2)^2-a\cdot(-2)-4=0$$

整理して　$2a-8=0$

ゆえに　$\boldsymbol{a=4}$

よって，方程式は

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4&=0 \\ x^2(x+1)-4(x+1)&=0 \\ (x+1)(x^2-4)&=0 \\ (x+1)(x+2)(x-2)&=0 \end{aligned}$$

したがって，残りの解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

(答) カ．4　キ．ク．$-1,\ 2$

(4) 左辺を変形すると　$3(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta+1=0$

整理すると　$6\sin^2\theta-5\sin\theta-4=0$

ゆえに　$(2\sin\theta+1)(3\sin\theta-4)=0$

$-90^\circ<\theta<90^\circ$ より $-1<\sin\theta<1$ であるから　$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{1}{2}}$

この範囲で解いて　$\boldsymbol{\theta=-30^\circ}$

(答) ケ．$-\dfrac{1}{2}$　コ．-30

(5) $f(x)$ を微分して　$f'(x)=2x+a$

$f'(1)=0$ より　$2\cdot1+a=0$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$

$f(x)=x^2-2x+b$ であるから

条件より　$\displaystyle\int_0^3(x^2-2x+b)\,dx=-3$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+bx\right]_0^3=-3$$

$$\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2+b\cdot3=-3$$

整理して　$3b=-3$

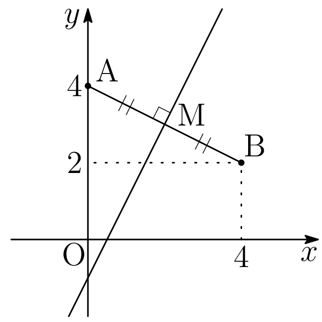
よって　$\boldsymbol{b=-1}$

(答) サ．-2　シ．-1

[2] (1) A，B 間の距離は $\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

線分 AB の中点 M の座標は

$\left(\dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)$ より $(2,\ 3)$



線分 AB の傾きは $\dfrac{2-4}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$-\dfrac{1}{2}m=-1$ ゆえに $m=2$

よって，求める直線の方程式は

$y-3=2(x-2)$ すなわち $\boldsymbol{y=2x-1}$

(答) ス．$2\sqrt{5}$ セ．$2x-1$

(2) $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=\dfrac{1}{2}$ および 2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ の解である．このグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個であるのは，次の［1］,［2］の場合である。

［1］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2}$ 以外の解をもつ場合

$x=\dfrac{1}{2}$ がこの 2 次方程式の解であるから

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b\cdot\dfrac{1}{2}+9=0$ これを解いて $b=-\dfrac{37}{2}$

これは, $b>0$ に反するので不適.

［2］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ 以外の重解をもつ場合

$D=b^2-4\cdot1\cdot9=0$ $b>0$ より $\boldsymbol{b=6}$

このとき，2 次方程式 $x^2+6x+9=0$ は，重解 $x=-3$ $\left(\neq\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ.

よって $y=(2x-1)(x^2+6x+9)$

$=2x^3+11x^2+12x-9$

微分して $y'=6x^2+22x+12$

$=2(x+3)(3x+2)$

$y'=0$ とすると $x=-3,\ -\dfrac{2}{3}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

増減表は，右のとおりである．よって，$\boldsymbol{-3<x<-\dfrac{2}{3}}$ の範囲で減少する.

(答) ソ．6 タ．-3 チ．$-\dfrac{2}{3}$

(3) $0 < x < \pi$，$\tan x = -2\sqrt{2} < 0$ より　$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$　$\cdots$①

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+(-2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9}$$

① より $\cos x < 0$ であるから　$\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{1}{3}}$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

① より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{x}{2} > 0$

ゆえに　　$\boldsymbol{\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(答) ツ．$-\dfrac{1}{3}$　テ．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $3^{3x} = (3^x)^3$，$3^{2x+2} = 3^{2x}\cdot 3^2 = 9\cdot(3^x)^2$ であるから，$3^x = t\cdots$① とおくと，方程式は

$$t^3 - 9t^2 - t + 9 = 0$$
$$t^2(t-9) - (t-9) = 0$$
$$(t-9)(t^2-1) = 0$$
$$(t-9)(t+1)(t-1) = 0$$

① より $t > 0$ であるから　$t = 9,\ 1$

ゆえに　$3^x = 9$ を解いて　$x = 2$

　　　　$3^x = 1$ を解いて　$x = 0$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x = 2,\ 0}$

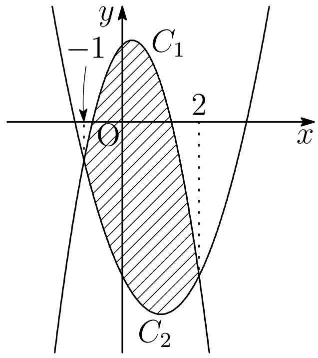
(答) ト．ナ．2，0

(5) 2つの放物線の共有点の x 座標は，方程式

$$-2x^2+x+2=x^2-2x-4$$

を解いて　　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

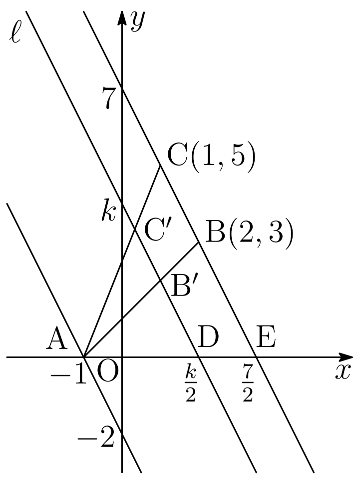
右の図から，求める図形の面積 S は



$$S=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+x+2)-(x^2-2x-4)\}\,dx$$
$$=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=-3\times\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

(答) ニ．ヌ．$-1,\ 2$　ネ．$\dfrac{27}{2}$

[3] 2点 B(2, 3)，C(1, 5) を通る直線の方程式は



$$y-3=\frac{5-3}{1-2}(x-2)$$

ゆえに　$2x+y-7=0$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d=\frac{|\,2\cdot(-1)+0-7\,|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{9}{\sqrt{5}}}$$

また　$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

ℓ と AB，AC の交点をそれぞれ B′，C′ とする．

$\triangle\mathrm{AB'C'}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積比が $1:2$ であるから，相似比は $1:\sqrt{2}$

ゆえに，点 A と直線 ℓ の距離は　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{9}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{9}{\sqrt{10}}}$

直線 ℓ の y 切片を k とすると，その方程式は　$y=-2x+k$

ℓ，直線 BC の x 軸との交点をそれぞれ，D，E とすると，D，E の x 座標は，それぞれ $\dfrac{k}{2}$，$\dfrac{7}{2}$ である．このとき，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AE}$ であるから

$$\frac{k}{2}-(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{7}{2}-(-1)\right\}\qquad \text{ゆえに}\quad k=\boldsymbol{\frac{9}{2}\sqrt{2}-2}$$

(答) ノ．$\dfrac{9}{\sqrt{5}}$　ハ．$\dfrac{9}{2}$　ヒ．$\dfrac{9}{\sqrt{10}}$　フ．$\dfrac{9}{2}\sqrt{2}-2$

[4] $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ を微分して　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(2x+1)$

P における接線の傾き $\tan\theta$ は

$x=-1$ のとき　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\{2\cdot(-1)+1\}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

ℓ の傾きは　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}$

したがって，ℓ の方程式は

$$y-\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\{x-(-1)\}\quad ゆえに\quad \boldsymbol{y=\frac{3\sqrt{3}}{5}x+\frac{8\sqrt{3}}{5}}\quad\cdots①$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は，① に $y=0$ を代入して　$\boldsymbol{x=-\dfrac{8}{3}}$

(答) へ．$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　ホ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$　マ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}x+\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$　ミ．$-\dfrac{8}{3}$

第 2 章　医療系

平成 18 年度から平成 19 年度入試にかけて，県内の医療系専門学校等の入試科目は，変更されることはなかった．医療系希望者にとっては，数学 I と数学 A を中心に学習する必要がある．また，問題および出題形式について，学校ごとに特徴があり，過去問題を複数年に亘り研究しておくことが，最も効率的な試験対策であると考えられる．

新教育課程移行後の県内の入学試験問題は，次のサイトからもダウンロード (PDF) することができる[1]．

http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/

本書に掲載した平成 19 年度 (2007) 入学試験問題は次のとおりである．

本書に掲載した 2007 年度入学試験問題		
学校名	**試験科目**	**試験日**
メディカルカレッジ青照館 (推薦)	I・A	10/22，11/23
メディカルカレッジ青照館 (一般)	I・A	12/23，2/11，3/21
熊本リハビリテーション学院 (一般)	I・A	12/16，2/17
九州中央リハビリテーション学院 (一般)	I	11/4，12/2
西日本リハビリテーション学院 (一般)	I・A	10/21，11/11
熊本労災看護専門学校 (一般)	I・A	1/25

[1] 県内の看護師養成課程 (高看) をもつ専門学校に入学試験問題の送付を依頼したところ，熊本労災看護専門学校以外のすべての学校は，入学試験問題を非公開としているため，入手することができなかった．

2.1　メディカルカレッジ青照館

2.1.1　推薦前期

I. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$ を簡単にせよ。【1】

① $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$　② $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$
③ $10+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$　④ $10-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$

II. 次の式の2重根号を外し，簡単にせよ。【2】

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

① $\sqrt{5}+2$　② $\sqrt{5}-2$　③ $2-\sqrt{5}$　④ $-\sqrt{5}-2$

III. $xyz=1$ のとき $\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}+\dfrac{1}{1+x+xy}$ を求めよ。【3】

① 0　② 1　③ 2　④ 3

IV. $a,b,c,d>0$ のとき $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) \geqq \boxed{}$【4】

① 1　② 2　③ 3　④ 4

V. $2<x<3$ のとき $\sqrt{(2-x)^2}-|x-3|=\boxed{}$【5】

① $2x+5$　② $2x-5$　③ $-2x+5$　④ $-2x-5$

VI. $x<1$ は $x^2-3x+2>0$ であるための $\boxed{}$。【6】

① 必要十分条件　② 必要条件
③ 十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

VII. $y=x^2+(k+3)x+4k$ のグラフが，x 軸と接するときの k の値を求めよ。【7】

① $k=-1,-9$　② $k=-1,\ 9$　③ $k=1,-9$　④ $k=1,\ 9$

VIII. 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。【8】

① $y=2x^2+8x+11$　② $y=2x^2+8x-11$
③ $y=2x^2-8x+11$　④ $y=2x^2-8x-11$

IX. A R I A K E の 6 文字を並べ替えるとき全部で何通りの並べ方があるか。【**9**】

① 90　② 180　③ 360　④ 540　⑤ 720

X. くじが 10 本あり，このうち 4 本が当たりくじである．このくじから同時に 3 本引くとき，少なくとも 1 本が当たる確率を求めよ。【**10**】

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{2}{6}$　③ $\frac{3}{6}$　④ $\frac{4}{6}$　⑤ $\frac{5}{6}$

XI. 1 から 8 の目のある正八面体のサイコロを投げるとき出る目の期待値はいくらか。【**11**】

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{8}{2}$　③ $\frac{9}{2}$　④ $\frac{10}{2}$　⑤ $\frac{11}{2}$

XII. 1 から 100 までの自然数の中で，3 または 5 で割り切れる数は何個あるか。

① 41　② 47　③ 53　④ 59　【**12**】

XIII. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\tan\theta = -\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めよ。【**13**】

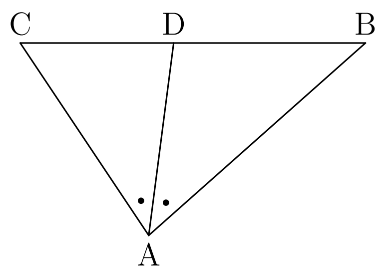
① $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

XIV. △ABC において，$A = 45^\circ$，$C = 105^\circ$，$b = 3$ のとき，a の値を求めよ。【**14**】

① $3\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$

XV. 下図で AD が ∠A の二等分線であるとき BD の値を求めよ。AB = 15，BC = 18，CA = 12 とする。【**15**】



① 10
② 11
③ 12
④ 13

解答例

I. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}^2$

$$\begin{aligned}&=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2\\&=(5+2\sqrt{6})-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5\\&=\mathbf{10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}\end{aligned}$$

II. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\mathbf{\sqrt{5}-2}$

III.
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}+\frac{1}{1+x+xy}\\&=\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y(1+z+zx)}+\frac{yz}{yz(1+x+xy)}\\&=\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y+yz+xyz}+\frac{yz}{yz+xyz+xyz\cdot y}\\&=\frac{1}{1+y+z}+\frac{y}{y+yz+1}+\frac{yz}{yz+1+y}=\frac{1+y+yz}{1+y+yz}=\mathbf{1}\end{aligned}$$

IV.
$$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}+2$$

$\dfrac{bc}{ad}>0$，$\dfrac{ad}{bc}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}\geqq 2\sqrt{\frac{bc}{ad}\cdot\frac{ad}{bc}}=2$$

したがって　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc}+2\geqq 2+2=\mathbf{4}$

V.
$$\sqrt{(2-x)^2}-|x-3|=|2-x|-|x-3|$$

$2<x<3$ のとき　$2-x<0$，$x-3<0$ であるから

$$|2-x|=-(2-x)=x-2,\ |x-3|=-(x-3)=-x+3$$

よって　$\sqrt{(2-x)^2}-|x-3|=|2-x|-|x-3|$

$$=x-2-(-x+3)=\mathbf{2x-5}$$

VI. $x<1\Rightarrow x^2-3x+2>0$，$x<1 \not\Leftarrow x^2-3x+2>0$ より　**十分条件**

VII. 2 次関数 $y=x^2+(k+3)x+4k$ の係数について

$$D=(k+3)^2-4\cdot 1\cdot 4k=k^2-10k+9=(k-1)(k-9)$$

とする．グラフが x 軸と接するための条件は $D=0$ が成り立つことであるから

$(k-1)(k-9)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{k=1,\ 9}$

VIII. 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y-3=2(x+2)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x^2+8x+11}$$

IX. A を 2 個，R，I，K，E をそれぞれ 1 個の 6 文字を 1 列に並べるから

$$\frac{6!}{2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=\mathbf{360} \ \ (\text{通り})$$

X. 3 本ともはずれる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{6}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1-\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

XI. どの目が出る確率も $\dfrac{1}{8}$ である．

目	1	2	3	4	5	6	7	8	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，出る目の期待値は

$$1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{8}=\frac{36}{8}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

XII. 3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると

$$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,3\cdot33\}$$
$$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,5\cdot20\}$$
$$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}$$

これらの集合の要素の個数は，$n(A)=33$，$n(B)=20$，$n(A\cap B)=6$

求める個数は，$n(A\cup B)$ であるから

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ &=33+20-6=\mathbf{47} \qquad (\text{個}) \end{aligned}$$

XIII. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-\sqrt{2})^2}=\frac{1}{3}$$

$\tan\theta<0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta<0$ である．

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

XIV. $B = 180° - (A + C) = 180° - (45° + 105°) = 30°$

正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

ゆえに $a \sin 30° = 3 \sin 45°$

$$a \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \mathbf{3\sqrt{2}}$$

XV. AD は ∠A の二等分線であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{CA} \\ &= 15 : 12 = 5 : 4 \end{aligned}$$

よって，線分 BD の長さは

$$\mathrm{BD} = \frac{5}{5+4}\mathrm{BC} = \frac{5}{9} \times 18 = \mathbf{10}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	②	④	②
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	④	①	③	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	②	②	③	①

【1】～【10】は各 3 点,【11】～【15】は各 4 点，計 50 点

2.1.2 推薦後期

I. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ を簡単にせよ。 **【1】**

① $6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$　② $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$
③ $6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$　④ $6-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

II. 次の式の 2 重根号を外し，簡単にせよ。 **【2】**

$$\sqrt{14-4\sqrt{6}}$$

① $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$　③ $-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$　④ $-2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

III. $a+b+c=0$，$abc\neq 0$ のとき $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ を求めよ.

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3 **【3】**

IV. $a, b>0$ のとき $(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq \boxed{}$ **【4】**

① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

V. $-1<a<1$ のとき $|\,a-1\,|+|\,a+1\,|=\boxed{}$ **【5】**

① 2　② $2a$　③ -2　④ $-2a$

VI. $x>2$ は $x^2-2x>0$ であるための$\boxed{}$。 **【6】**

① 必要十分条件　② 必要条件
③ 十分条件　④ 必要条件でも十分条件でもない

VII. $y=2x^2-4kx+k+1$ のグラフが，x 軸と接するときの k の値を求めよ。 **【7】**

① $k=-\dfrac{1}{2}, -1$　② $k=-\dfrac{1}{2},\ 1$　③ $k=\dfrac{1}{2}, -1$　④ $k=\dfrac{1}{2},\ 1$

VIII. 放物線 $y=-x^2$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 5 だけ平行移動したときの放物線の方程式を求めよ。 **【8】**

① $y=-x^2-4x-1$　② $y=-x^2+4x+1$
③ $y=-x^2-4x+1$　④ $y=-x^2+4x-1$

IX. C O L L E G E の 7 文字を並べ替えるとき全部で何通りの並べ方があるか。**【9】**

① 630　② 1260　③ 1680　④ 2520　⑤ 5040

X. 3 本の当たりくじを含む 15 本のくじがある。同時に 3 本引くとき，少なくとも 1 本が当たる確率を求めよ。**【10】**

① $\dfrac{45}{91}$　② $\dfrac{46}{91}$　③ $\dfrac{47}{91}$　④ $\dfrac{48}{91}$　⑤ $\dfrac{49}{91}$

XI. 硬貨 3 枚を投げるとき，裏の出る枚数の期待値はいくらか。**【11】**

① $\dfrac{8}{8}$　② $\dfrac{9}{8}$　③ $\dfrac{10}{8}$　④ $\dfrac{11}{8}$　⑤ $\dfrac{12}{8}$

XII. 1 から 100 までの自然数の中で，4 または 7 で割り切れる数は何個あるか。

① 33　② 36　③ 39　④ 42　**【12】**

XIII. $90° < \theta < 180°$ で $\tan\theta = -\dfrac{12}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めよ。**【13】**

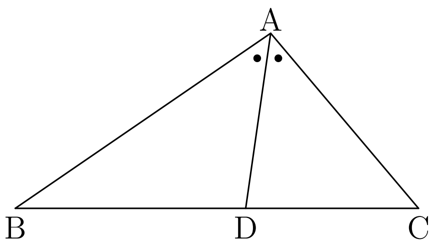
① $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$　② $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$

③ $\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$　④ $\sin\theta = -\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$

XIV. $\triangle$ABC において，AC $= 5$，$B = 30°$，$C = 45°$ のとき，AB の長さを求めよ。

① $3\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $5\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{2}$　**【14】**

XV. 下図で AD が $\angle$A の二等分線であるとき BD の値を求めよ。AB $= 16$，BC $= 21$，CA $= 12$ とする。**【15】**



① 11
② 12
③ 13
④ 14

解答例

I. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = \{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}^2$

$$\begin{aligned}&= 1+2(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\\ &= 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+(5-2\sqrt{6})\\ &= \mathbf{6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

II. $\sqrt{14-4\sqrt{6}} = \sqrt{14-2\cdot 2\sqrt{6}} = \sqrt{14-2\sqrt{24}} = \sqrt{12}-\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

III. $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\\ &= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\ &= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} = \mathbf{-3}\end{aligned}$$

IV. $$(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4$$

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{4b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}} = 4$$

したがって　$(a+2b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}+4 \geqq 4+4 = \mathbf{8}$

V. $-1<a<1$ のとき　$a-1<0$，$a+1>0$ であるから

$$|\,a-1\,| = -(a-1) = -a+1,\quad |\,a+1\,| = a+1$$

よって　$|\,a-1\,|+|\,a+1\,| = (-a+1)+(a+1) = \mathbf{2}$

VI. $x>2 \Rightarrow x^2-2x>0$，$x>2 \not\Leftarrow x^2-2x>0$ より　**十分条件**

VII. 2 次関数 $y=2x^2-4kx+k+1$ の係数について

$$D/4 = (-2k)^2-2(k+1) = 2(2k^2-k-1) = 2(2k+1)(k-1)$$

とする．グラフが x 軸と接するための条件は $D=0$ が成り立つことであるから

$$(2k+1)(k-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-\frac{1}{2},\ 1}$$

VIII. 放物線 $y=-x^2$ を x 軸方向に2，y 軸方向に5だけ平行移動したものは

$$y-5=-(x-2)^2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2+4x+1}$$

IX. Lを2個，Eを2個，C，O，Gをそれぞれ1個の7文字を1列に並べるから

$$\frac{7!}{2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}=\mathbf{1260} \ (\text{通り})$$

X. 3本ともはずれる確率は $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}=\dfrac{44}{91}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1-\dfrac{44}{91}=\boldsymbol{\dfrac{47}{91}}$

XI. 裏の出る枚数を X 枚とすると，
次のような表ができる．

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(表，表，表)
(表，表，裏)
(表，裏，表)
(裏，表，表)
(表，裏，裏)
(裏，表，裏)
(裏，裏，表)
(裏，裏，裏)

したがって，求める期待値は

$$0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{12}{8}}$$

XII. 4の倍数の集合を A，7の倍数の集合を B とすると

$$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots,4\cdot25\}$$
$$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots,7\cdot14\}$$
$$A\cap B=\{28\cdot1,\ 28\cdot2,\ 28\cdot3\}$$

これらの集合の要素の個数は，$n(A)=25$，$n(B)=14$，$n(A\cap B)=3$

求める個数は，$n(A\cup B)$ であるから

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ &=25+14-3=\mathbf{36} \qquad (\text{個}) \end{aligned}$$

XIII. $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=1\div\left\{1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2\right\}=\frac{25}{169}$$

$\tan\theta<0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta<0$ である．

よって $\quad \cos\theta=-\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\boldsymbol{-\dfrac{5}{13}}$

また $\quad \sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-\dfrac{12}{5}\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\boldsymbol{\dfrac{12}{13}}$

XIV. 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

ゆえに
$$5\sin 45^\circ = \mathrm{AB}\sin 30^\circ$$
$$5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{AB} \times \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{AB} = \mathbf{5\sqrt{2}}$$

XV. AD は ∠A の二等分線であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{CA} \\ &= 16 : 12 = 4 : 3 \end{aligned}$$

よって，線分 BD の長さは

$$\mathrm{BD} = \frac{4}{4+3}\mathrm{BC} = \frac{4}{7} \times 21 = \mathbf{12}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
①	②	①	⑤	①
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
③	②	②	②	③
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
⑤	②	②	③	②

【1】～【10】は各 3 点,【11】～【15】は各 4 点，計 50 点

2.1.3 一般試験A日程 60分

I. 次の数列の$\boxed{}$に適する数を選べ。 【1】

$$5,\ 7,\ 11,\ \boxed{},\ 25,\ 35,\ \cdots$$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

II. 次の各問いに答えよ。

1) $x<3$ のとき $\sqrt{x^2-6x+9}$ を簡単にせよ. 【2】

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$ ④ $-x-3$

2) $a+b+c=0$ のとき $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$ を求めよ。 【3】

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

3) 二重根号 $\sqrt{29-3\sqrt{80}}$ を簡単にせよ。 【4】

① $2\sqrt{5}-3$ ② $-2\sqrt{5}-3$ ③ $3-2\sqrt{5}$ ④ $3+2\sqrt{5}$

4) $a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき 【5】

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqq\boxed{}$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8

5) $|\,x\,|+|\,x-1\,|=2$ を満たす x の値を求めよ。 【6】

① $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ ② $x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$ ③ $x=\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}$ ④ $x=-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}$

6) 不等式 $x^2-(m+1)x+4>0$ が常に成り立つように，m の値の範囲を求めよ。 【7】

① $-5<m<3$ ② $-3<m<5$ ③ $3<m<5$ ④ $-5<m<-3$

7) $xy>0$ は $x>0,\ y>0$ であるための$\boxed{}$。 【8】

① 十分条件である ② 必要条件である
③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

8) 次の等式が x についての恒等式になるように定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。【9】

$$a(x-2)^2+b(x+3)+c=x^2-x-2$$

① $a=1,\ b=-3,\ c=-15$ ② $a=-1,\ b=3,\ c=-15$
③ $a=1,\ b=3,\ c=-15$ ④ $a=-1,\ b=-3,\ c=-15$

9) 正の整数 n を 7 で割ったときの余りが 4 ならば，n^2 を 7 で割ったときの余りを求めよ。　**【10】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

III. 次の 2 次関数について答えよ。

1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，2 点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ を通り x 軸に接するという。a，b，c の値を求めよ。　**【11】**

① $a = 4,\ b = 4,\ c = 1$　② $a = -4,\ b = 4,\ c = 1$
③ $a = 4,\ b = -4,\ c = 1$　④ $a = -4,\ b = -4,\ c = 1$

2) $y = x^2 - 2x - 3$ の放物線を x 軸に関して対称にしたものを求めよ。　**【12】**

① $y = -x^2 + 2x + 3$　② $y = -x^2 - 2x - 3$
③ $y = -x^2 + 2x - 3$　④ $y = -x^2 - 2x + 3$

3) $x + y = 4$ のとき，$x^2 + y^2$ の Min(最小値) を求めよ。　**【13】**

① 4　② 6　③ 8　④ 10

IV. 次の三角方程式を解け。　**【14】**

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

① $\theta = 45^\circ$　② $\theta = 135^\circ$　③ $\theta = 45^\circ,\ 135^\circ$
④ $\theta = 60^\circ$　⑤ $\theta = 120^\circ$　⑥ $\theta = 60^\circ,\ 120^\circ$

V. △ABC について次の値を求めよ。

1) $b = \sqrt{37}$，$c = 4$，$\angle\mathrm{B} = 120^\circ$ のとき a の長さ　**【15】**

① 7　② 3　③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{7}$

2) $a = \sqrt{5}$，$b = 3$，$c = \sqrt{14}$ のとき $\angle\mathrm{C}$ の大きさ　**【16】**

① 30°　② 60°　③ 90°　④ 120°

3) $b = 5$，$c = 8$，△ABC の面積が $10\sqrt{3}$ のとき $\angle\mathrm{A}$ の大きさ　**【17】**

① $30^\circ,\ 60^\circ$　② $60^\circ,\ 90^\circ$　③ $30^\circ,\ 120^\circ$　④ $60^\circ,\ 120^\circ$

VI. 異なる 3 個のサイコロを同時に投げるとき，3 個とも異なる目が出るのは何通りあるか。　**【18】**

① 60　② 90　③ 120　④ 150

VII. 赤，白，青，黄，緑の 5 種類の旗がある。同じ色を何度使ってもよいとき，旗 3 枚を使って何通りの手旗信号ができるか。 **【19】**

① 60　② 125　③ 205　④ 250　⑤ 405

VIII. 色が相異なる 8 個のビー玉で腕輪を作るとき何通りできるか。 **【20】**

① 1260　② 2520　③ 5040　④ 20160

IX. A，B が全体集合 U の部分集合でその要素の数が，$n(U) = 90$，$n(A) = 51$，$n(B) = 34$，$n(A \cup B) = 70$ のとき，次の各集合の要素の個数を求めよ。

1) $\overline{A} \cap B$ **【21】**

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

2) $\overline{A} \cup B$ **【22】**

① 54　② 55　③ 56　④ 57　⑤ 58

X. 3 個の赤球と 2 個の白球が箱に入っている。この箱の中から同時に 2 個の球を取り出す。

1) 2 球とも赤球である確率を求めよ。 **【23】**

① $\dfrac{1}{10}$　② $\dfrac{2}{10}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{4}{10}$

2) 2 球とも白球である確率を求めよ。 **【24】**

① $\dfrac{1}{10}$　② $\dfrac{2}{10}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{4}{10}$

3) 1 球が赤で，1 球が白である確率を求めよ。 **【25】**

① $\dfrac{4}{10}$　② $\dfrac{5}{10}$　③ $\dfrac{6}{10}$　④ $\dfrac{7}{10}$

解答例

I. $5\underline{+2}=7$，$7\underline{+4}=11$，$11\underline{+6}=17$，$17\underline{+8}=25$，$25\underline{+10}=35$

したがって $\boxed{}=\mathbf{17}$

II. 1) $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|\,x-3\,|$

$x<3$ のとき $x-3<0$ であるから　$|\,x-3\,|=-(x-3)=-x+3$

したがって　$\sqrt{x^2-6x+9}=\boldsymbol{-x+3}$

2) $a+b+c=0$ のとき，$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ であるから

$$\begin{aligned}(b+c)(c+a)(a+b)+abc&=(-a)(-b)(-c)+abc\\&=-abc+abc=\mathbf{0}\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\sqrt{29-3\sqrt{80}}&=\sqrt{29-3\cdot2\sqrt{20}}=\sqrt{29-2\cdot3\sqrt{20}}\\&=\sqrt{29-2\sqrt{180}}=\sqrt{(20+9)-2\sqrt{20\cdot9}}\\&=\sqrt{20}-\sqrt{9}=\mathbf{2\sqrt{5}-3}\end{aligned}$$

4) $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\right)+2$$

$\dfrac{a^2}{bc}>0$，$\dfrac{bc}{a^2}>0$，$\dfrac{b^2}{ca}>0$，$\dfrac{ca}{b^2}>0$，$\dfrac{c^2}{ab}>0$，$\dfrac{ab}{c^2}>0$ であるから，

相加平均，相乗平均の関係により

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{bc}{a^2}}=2$$

$$\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{ca}{b^2}}=2$$

$$\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\geqq 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}\cdot\frac{ab}{c^2}}=2$$

上の 3 式について，同時に等号が成り立つのは，

$$\frac{a^2}{bc}=\frac{bc}{a^2},\ \frac{b^2}{ca}=\frac{ca}{b^2},\ \frac{c^2}{ab}=\frac{ab}{c^2}\quad \text{すなわち}\quad a=b=c$$

のときである．したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)&=\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\right)+2\\&\geqq 2+2+2+2=\mathbf{8}\end{aligned}$$

5) ［1］$x<0$ のとき，$|x|=-x$，$|x-1|=-x+1$ であるから
方程式は　$-x+(-x+1)=2$
これを解いて　$x=-\dfrac{1}{2}$
これは，$x<0$ を満たすから，解である．
［2］$0\leqq x<1$ のとき，$|x|=x$，$|x-1|=-x+1$ であるから
方程式は　$x+(-x+1)=2$
このとき，左辺は1となり，不適である．
［3］$1\leqq x$ のとき，$|x|=x$，$|x-1|=x-1$ であるから
方程式は　$x+(x-1)=2$
これを解いて　$x=\dfrac{3}{2}$
これは，$1\leqq x$ を満たすから，解である．
したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}}$

6) 与えられた2次不等式の係数について

$$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot1\cdot4=m^2+2m-15$$

とする．2次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ が成り立てばよい．

$m^2+2m-15<0$　これを解いて　$\boldsymbol{-5<m<3}$

7) $xy>0 \not\Rightarrow x>0,\ y>0$,
$xy>0 \Leftarrow x>0,\ y>0$
よって，**必要条件**.

8) 等式の左辺を整理すると

$$ax^2+(-4a+b)x+(4a+3b+c)=x^2-x-2$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a=1,\ -4a+b=-1,\ 4a+3b+c=-2$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-15}$

9) n は整数 k を用いて，$n=7k+4$ とかけるので

$$n^2=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+8k+2)+2$$

$7k^2+8k+2$ は整数であるから，求める**余りは2**である．

III. 1) 2点 $(0,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ の y 座標が等しいので，放物線の軸はこの2点を結ぶ垂直二等分線であるから，軸の方程式は　$x=-\frac{1}{2}$

また，放物線は x 軸に接するので

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

とかける．これが点 $(0,\ 1)$ を通るから

$$1=a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad a=4$$

よって，放物線の方程式は

$$y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{すなわち} \quad y=4x^2+4x+1$$

したがって　$\boldsymbol{a=4,\ b=4,\ c=1}$

2) 放物線 $y=x^2-2x-3$ を x 軸に関して対称移動をすると

$$-y=x^2-2x-3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2+2x+3}$$

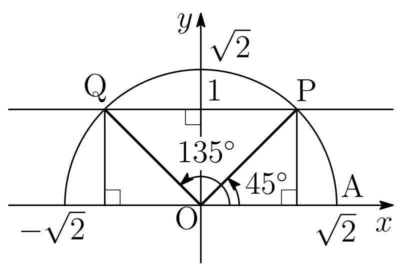
3) $y=4-x$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(4-x)^2 \\ &= 2x^2-8x+16 \\ &= 2(x-2)^2+8 \end{aligned}$$

よって，$x=2$，$y=2$ のとき x^2+y^2 は**最小値 8** をとる．

IV. 半径 $\sqrt{2}$ の半円上で，y 座標が1である点は2つある．求める θ は，右の図で $\angle\mathrm{AOP}$ と $\angle\mathrm{AOQ}$ である．

よって　　$\boldsymbol{\theta=45°,\ 135°}$



V. 1) 余弦定理により　　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

ゆえに　　$(\sqrt{37})^2=4^2+a^2-2\cdot4\cdot a\cos120°$

$$37=16+a^2-2\cdot4\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理して　　$a^2+4a-21=0$

$$(a+7)(a-3)=0$$

$a>0$ より　　$\boldsymbol{a=3}$

2) 余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{5})^2+3^2-(\sqrt{14})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 3} = 0$$

よって，$\cos C = 0$ を満たす C は　　$\boldsymbol{C = 90°}$

3) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ であるから

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin A \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす A は　　$\boldsymbol{A = 60°,\ 120°}$

VI. ${}_6\mathrm{P}_3 = 6\cdot 5\cdot 4 = \mathbf{120}$ (通り)

VII. $5^3 = \mathbf{125}$ (通り)

VIII. $\dfrac{(8-1)!}{2} = \mathbf{2520}$ (通り)　$\leftarrow$ 数珠順列 $= \dfrac{\text{円順列}}{2}$

IX. $n(A) = 51$，$n(B) = 34$，$n(A \cup B) = 70$ を $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ に代入して　$n(A \cap B) = 15$

したがって

	B	$\overline{B}$	合計
A	15		51
$\overline{A}$			
合計	34		90

上の表を完成させると

	B	$\overline{B}$	合計
A	15	36	51
$\overline{A}$	19	20	39
合計	34	56	90

1) 上の表から　$n(\overline{A} \cap B) = \mathbf{19}$

2) 上の表から　$n(\overline{A} \cup B) = 19 + 20 + 15 = \mathbf{54}$

X. 1) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$

2) $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

3) 求める確率は 1) と 2) の余事象の確率であるから

$1 - \left(\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{10}}$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
③	②	③	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	②	③	③
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
①	①	③	③	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	④	③	②	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
⑤	①	③	①	③

2.1.4 一般試験 B 日程 60 分

I. 次の数列の$\boxed{}$に適する数を選べ。 【1】

$$14,\ 15,\ 17,\ 20,\ 24,\ 29,\ \boxed{},\ \cdots$$

① 32　② 33　③ 34　④ 35　⑤ 36

II. 次の各問いに答えよ。

1) $a < 5$ のとき $\sqrt{a^2 - 10a + 25}$ を簡単にせよ. 【2】

① $a + 5$　② $a - 5$　③ $-a + 5$　④ $-a - 5$

2) $a + b + c = 0$ のとき $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ を求めよ。 【3】

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

3) $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。 【4】

① 5　② $5 + 2\sqrt{3}$　③ 1　④ $1 + 2\sqrt{3}$

4) $a > 0$，$b > 0$ のとき，次の不等式の$\boxed{}$を埋めよ。 【5】

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geqq \boxed{}$$

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

5) $|\,a - 2\,| + |\,a + 1\,| = 3$ となる a の値の範囲を求めよ。 【6】

① $1 \leqq a \leqq 2$　② $-1 \leqq a \leqq 2$　③ $-2 \leqq a \leqq 1$　④ $-2 \leqq a \leqq -1$

6) 不等式 $x^2 + kx + 3k - 8 > 0$ の解がすべての数であるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。 【7】

① $4 < k < 8$　② $-8 < k < 4$　③ $-4 < k < 8$　④ $-8 < k < -4$

7) $x = y$ は，$x^2 - y^2 = 0$ であるための$\boxed{}$。 【8】

① 必要条件である　② 十分条件である
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でない

8) 次の等式が x についての恒等式になるように定数 a，b，c の値を求めよ。【9】

$$ax^2 + bx + 3 = (x - 1)(x + 1) + c(x + 2)^2$$

① $a = 2,\ b = 4,\ c = 1$　② $a = 2,\ b = -4,\ c = -1$
③ $a = -2,\ b = 4,\ c = -1$　④ $a = -2,\ b = -4,\ c = 1$

9) a，b，c は5で割ると余りがそれぞれ1，2，3となる正の整数である。$a+2b+3c$ を5で割ると余りはいくらか。 **【10】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

III. 次の2次関数の問いに答えよ。

1) $y = x^2 + bx + c$ のグラフは，点 $(-2,\ 1)$ を通り x 軸に接するという。b，c の値を求めよ。 **【11】**

① $\begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$　② $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$

③ $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$　④ $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 6 \\ c = -9 \end{cases}$

2) 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ と原点に関して対称な放物線を求めよ。 **【12】**

① $y = x^2 - 2x - 3$　② $y = x^2 - 2x + 3$
③ $y = -x^2 - 2x + 3$　④ $y = -x^2 - 2x - 3$

3) $x + 3y = k$ のとき，$x^2 + y^2$ の Min(最小値) は4である。定数 k の値を求めよ。 **【13】**

① $k = -\sqrt{10}$　② $k = -2\sqrt{10}$　③ $k = \pm 2\sqrt{10}$　④ $k = \pm\sqrt{10}$

IV. 次の三角不等式を解け。 **【14】**

$$1 \leqq \sqrt{3}\tan\theta \leqq \sqrt{3} \qquad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

① $30^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$　② $30^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$　③ $30^\circ \leqq \theta \leqq 75^\circ$
④ $45^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$　⑤ $45^\circ \leqq \theta \leqq 75^\circ$

V. △ABC について次の値を求めよ。

1) $b = 2\sqrt{3}$，$c = 6$，$\angle B = 30^\circ$ のとき △ABC の面積を求めよ。 **【15】**

① $3\sqrt{3}$　② $3\sqrt{3}$，$6\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $6\sqrt{3}$，$9\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{3}$，$9\sqrt{3}$

2) 半径 1 の円に内接する $\triangle ABC$ において $\angle A = 60°$，$\angle B = 45°$ とする。

i) BC の長さを求めよ。　【16】

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

ii) CA の長さを求めよ。　【17】

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

iii) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。　【18】

① $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}$　② $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　④ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

VI. 1 個のサイコロを 3 回投げるとき，目の和が 7 となるのは何通りあるか。

① 6　② 9　③ 12　④ 15　【19】

VII. 1 個のサイコロを 4 回投げるとき，奇数の目が 2 回出る確率を求めよ。　【20】

① $\dfrac{2}{8}$　② $\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{4}{8}$　④ $\dfrac{5}{8}$

VIII. 6 人を 3 組に分けるとき 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。　【21】

① 15　② 20　③ 30　④ 60　⑤ 90

IX. 1 から 100 までの整数について次の問いに答えよ。

1) 2，3，5 のどれかで割り切れる数は何個あるか。　【22】

① 71　② 72　③ 73　④ 74　⑤ 75

2) 2 でも，3 でも，5 でも割り切れない数は何個あるか。　【23】

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

X. 箱の中に数字 1 を記入したカード 1 枚，数字 2 を記入したカード 2 枚，数字 3 を記入したカード 3 枚の合計 6 枚のカードが入っている。この箱の中から 3 枚のカードを同時に取り出すとき，それぞれのカードに記入されている数字の和を X とする。

1) $X = 7$ となる確率を求めよ。　【24】

① $\dfrac{1}{10}$　② $\dfrac{2}{10}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{4}{10}$　⑤ $\dfrac{5}{10}$

2) X の期待値を求めよ。　【25】

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

解答例

I. $14\underline{+1}=15$，$15\underline{+2}=17$，$17\underline{+3}=20$，$20\underline{+4}=24$，$24\underline{+5}=29$，$29\underline{+6}=35$
したがって $\boxed{}=\mathbf{35}$

II. 1) $\sqrt{a^2-10a+25}=\sqrt{(a-5)^2}=|\,a-5\,|$
$a<5$ のとき $a-5<0$ であるから　$|\,a-5\,|=-(a-5)=-a+5$
したがって　$\sqrt{a^2-10a+25}=\boldsymbol{-a+5}$

2) $a+b+c=0$ のとき，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\=&a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3+3(a+b)\{b-(a+b)\}\{-(a+b)+a\}\\=&a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\=&a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2\\=&\mathbf{0}\end{aligned}$$

3) $6\sqrt{3}=2{\cdot}3\sqrt{3}=2\sqrt{27}$，$4\sqrt{3}=2{\cdot}2\sqrt{3}=2\sqrt{12}$ であるから

$$\begin{aligned}&\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\\=&\sqrt{12+2\sqrt{27}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}\\=&\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9{\cdot}3}}+\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4{\cdot}3}}\\=&(\sqrt{9}+\sqrt{3})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\=&3+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=\mathbf{5}\end{aligned}$$

4) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=\left(ab+\dfrac{4}{ab}\right)+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均，相乗平均の関係により

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab{\cdot}\frac{4}{ab}}=4$$

したがって

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=\left(ab+\frac{4}{ab}\right)+5\geqq 4+5=\mathbf{9}$$

5)　[1]　$a < -1$ のとき，$|a-2| = -a+2$，$|a+1| = -a-1$ であるから

$$|a-2| + |a+1| = (-a+2) + (-a-1) = -2a+1$$

[2]　$-1 \leqq a < 2$ のとき，$|a-2| = -a+2$，$|a+1| = a+1$ であるから

$$|a-2| + |a+1| = (-a+2) + (a+1) = 3$$

[3]　$2 \leqq a$ のとき，$|a-2| = a-2$，$|a+1| = a+1$ であるから

$$|a-2| + |a+1| = (a-2) + (a+1) = 2a-1$$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 2}$

6)　与えられた2次不等式の係数について

$$D = k^2 - 4\cdot 1(3k-8) = k^2 - 12k + 32$$

とする．2次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D < 0$ が成り立てばよい．

$$k^2 - 12k + 32 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{4 < k < 8}$$

7)　$x = y \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$,

$x = y \not\Leftarrow x^2 - y^2 = 0$

よって，**十分条件**.

8)　等式の右辺を整理すると

$$ax^2 + bx + 3 = (1+c)x^2 + 4cx + (4c-1)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a = 1+c,\ b = 4c,\ 3 = 4c-1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 4,\ c = 1}$

9)　a，b，c は整数 k_1，k_2，k_3 を用いて

$$a = 5k_1 + 1,\ b = 5k_2 + 2,\ c = 5k_3 + 3$$

とかけるので

$$a+2b+3c = (5k_1+1) + 2(5k_2+2) + 3(5k_3+3) = 5(k_1+k_2+k_3+2) + 4$$

$k_1 + k_2 + k_3 + 2$ は整数であるから，求める**余りは 4** である.

III. 1) 放物線の方程式は，$y=(x-p)^2$ とおける．これが点 $(-2,\ 1)$ を通るから

$$1=(-2-p)^2 \quad \text{これを解いて} \quad p=-1,-3$$

したがって

$p=-1$ のとき　$y=(x+1)^2$　すなわち　$y=x^2+2x+1$

$p=-3$ のとき　$y=(x+3)^2$　すなわち　$y=x^2+6x+9$

よって　　$\boldsymbol{(b,\ c)=(2,\ 1),\ (6,\ 9)}$

2) 放物線 $y=x^2-2x+3$ を原点に関して対称移動をすると

$$-y=(-x)^2-2(-x)+3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2-2x-3}$$

3) $x=k-3y$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (k-3y)^2+y^2 \\ &= 10y^2-6ky+k^2 \\ &= 10\left(y-\frac{3k}{10}\right)^2+\frac{k^2}{10} \end{aligned}$$

したがって　　$\dfrac{k^2}{10}=4$　これを解いて　$\boldsymbol{k=\pm 2\sqrt{10}}$

IV. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq \tan\theta \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{30^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ}$

V. 1) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　　$2\sqrt{3}\sin C=6\sin 30^\circ$

$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　　　　$C=60^\circ,\ 120^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$ であるから

$$C=60^\circ \text{ のとき} \quad A=90^\circ, \qquad C=120^\circ \text{ のとき} \quad A=30^\circ$$

したがって　$A=90^\circ$ のとき　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6\sin 90^\circ=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

$A=30^\circ$ のとき　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6\sin 30^\circ=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

2)　i) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

ゆえに　$\mathrm{BC} = a = 2{\cdot}1\sin 60^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

ii) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

ゆえに　$\mathrm{CA} = b = 2{\cdot}1\sin 45^\circ = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

iii) 第1余弦定理により　$c = b\cos A + a\cos B$

ゆえに　$c = \sqrt{2}\cos 60^\circ + \sqrt{3}\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}{\cdot}\sqrt{2}{\cdot}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+3}{4}}$

VI. 目の和が7となるのは，次の **15通り**

$(1,1,5)$，$(1,2,4)$，$(1,3,3)$，$(1,4,2)$，$(1,5,1)$，

$(2,1,4)$，$(2,2,3)$，$(2,3,2)$，$(2,4,1)$，

$(3,1,3)$，$(3,2,2)$，$(3,3,1)$，

$(4,1,2)$，$(4,2,1)$，

$(5,1,1)$

VII. ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{4-2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

VIII. 6人をA，B，Cの3つの組に，2人ずつ分ける方法は

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6{\cdot}5}{2{\cdot}1} \times \frac{4{\cdot}3}{2{\cdot}1} = 90\ (\text{通り})$$

この分け方で，A，B，Cの区別をなくせばよいから

$$\frac{90}{3!} = \mathbf{15}\ (\text{通り})$$

IX. 1 から 100 までの整数全体の集合を U とし，U の部分集合で，2 で割り切れる数全体の集合を A，3 で割り切れる数全体の集合を B，5 で割り切れる数全体の集合を C とすると

$$
\begin{aligned}
A &= \{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 2\cdot50\}, & n(A) &= 50 \\
B &= \{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}, & n(B) &= 33 \\
C &= \{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot20\}, & n(C) &= 20 \\
A\cap B &= \{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}, & n(A\cap B) &= 16 \\
B\cap C &= \{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot6\}, & n(B\cap C) &= 6 \\
C\cap A &= \{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ 10\cdot3,\ \cdots,\ 10\cdot10\}, & n(C\cap A) &= 10 \\
A\cap B\cap C &= \{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3\}, & n(A\cap B\cap C) &= 3
\end{aligned}
$$

1) 求める数は，$n(A\cup B\cup C)$ であるから

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C) \\
&\qquad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A) \\
&\qquad\quad +n(A\cap B\cap C) \\
&= 50+33+20-16-6-10+3=\mathbf{74}
\end{aligned}
$$

2) 求める数は，$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ であるから

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) &= n(\overline{A\cup B\cup C}) \\
&= n(U)-n(A\cup B\cup C) \\
&= 100-74=\mathbf{26}
\end{aligned}
$$

X. 6枚のカードから3枚取り出す組合せの総数は　${}_6C_3 = \dfrac{6{\cdot}5{\cdot}4}{3{\cdot}2{\cdot}1} = 20$ (通り)

$X = 5$ となるのは　$\{1, 2, 2\}$ の組合せで，$1 \times {}_2C_2 = 1$ (通り)
$X = 6$ となるのは　$\{1, 2, 3\}$ の組合せで，$1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$ (通り)
$X = 7$ となるのは　$\{1, 3, 3\}$ の組合せで，$1 \times {}_3C_2 = 1 \times 3 = 3$ (通り)
$\{2, 2, 3\}$ の組合せで，${}_2C_2 \times {}_3C_1 = 1 \times 3 = 3$ (通り)
$X = 8$ となるのは　$\{2, 3, 3\}$ の組合せで，${}_2C_1 \times {}_3C_2 = 2 \times 3 = 6$ (通り)
$X = 9$ となるのは　$\{3, 3, 3\}$ の組合せで，${}_3C_3 = 1$ (通り)

1) $X = 7$ となる確率は　$\dfrac{3+3}{20} = \mathbf{\dfrac{3}{10}}$

2)

X	5	6	7	8	9	計
確率	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

したがって，X の期待値は

$$5 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{6}{20} + 7 \times \frac{6}{20} + 8 \times \frac{6}{20} + 9 \times \frac{1}{20} = \mathbf{7}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	③	③	①	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
②	①	②	①	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
③	④	③	①	②
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
③	②	②	④	②
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	④	②	③	②

2.1.5 一般試験C日程 60分

I. 次の数列の$\square$に適する数を選べ。 【1】

$$40,\ 37,\ 33,\ 28,\ 22,\ 15,\ \square,\ \cdots$$

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

II. 次の各問いに答えよ。

1) $\alpha < 4$ のとき $\sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16}$ を簡単にせよ. 【2】

① $-\alpha - 4$ ② $-\alpha + 4$ ③ $\alpha - 4$ ④ $\alpha + 4$

2) $a + b + c = 0$ のとき $a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab)$ の値を求めよ。 【3】

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3) 二重根号 $\sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$ を簡単にせよ。 【4】

① $\sqrt{2} - 3$ ② $3 - \sqrt{2}$ ③ $-3 - \sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2} + 3$

4) $a,\ b,\ c > 0$ のとき 【5】

$$(b + c)(c + a)(a + b) \geqq \square$$

① $2abc$ ② $3abc$ ③ $4abc$ ④ $8abc$ ⑤ $10abc$

5) 方程式 $x + 2|\,x + 3\,| = 0$ を解け. 【6】

① $x = 2,\ 6$ ② $x = -2,\ 6$ ③ $x = -6,\ 2$ ④ $x = -6, -2$

6) x についての不等式 $x^2 + (k - 2)x + k + 1 > 0$ の解が，実数全体になるような定数 k の値の範囲を求めよ。 【7】

① $0 < k < 8$ ② $-8 < k < 0$ ③ $k < 0,\ 8 < k$ ④ $-8 < k,\ 0 < k$

7) $a = b = 0$ は，$a^2 + b^2 = 0$ であるための$\square$。 【8】

① 十分条件である ② 必要条件である
③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

8) 次の等式が x についての恒等式となるように $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。 【9】

$$4x^2 + 3x + 2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

① $a = 4,\ b = 11,\ c = 9$ ② $a = -4,\ b = 11,\ c = -9$
③ $a = 4,\ b = -11,\ c = 9$ ④ $a = -4,\ b = 11,\ c = -9$

9) n を正の整数とする。n を 5 で割った余りが 3 のとき，n^2 を 5 で割ったときの余りを求めよ。 **【10】**

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

III. 次の 2 次関数の問いに答えよ。

1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(1, -4)$ を通るという。a，b，c の値を求めよ。 **【11】**

① $a = 2,\ b = 2,\ c = -4$　② $a = 2,\ b = -2,\ c = -4$

③ $a = 2,\ b = -2,\ c = 4$　④ $a = 2,\ b = 2,\ c = 4$

2) 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ を y 軸に関して対称な放物線を求めよ。 **【12】**

① $y = x^2 + 2x + 3$　② $y = x^2 + 2x - 3$

③ $y = x^2 - 2x + 3$　④ $y = x^2 - 2x - 3$

3) $x + 3y = 1$ のとき，$x^2 + y^2$ の Min(最小値) を求めよ。 **【13】**

① $-\dfrac{3}{10}$　② $-\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{1}{10}$　④ $\dfrac{3}{10}$

IV. 次の三角不等式を解け。 **【14】**

$$\tan\theta < -1 \qquad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

① $90^\circ < \theta < 150^\circ$　② $90^\circ < \theta < 135^\circ$

③ $135^\circ < \theta < 150^\circ$　④ $135^\circ < \theta < 180^\circ$

V. △ABC について次の値を求めよ。

1) $\angle\mathrm{A} = 45^\circ$，$b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，$c = 2\sqrt{3}$ のとき a の長さ **【15】**

① $4\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{2}$

2) $a = 2\sqrt{3}$，$b = 3\sqrt{2}$，$c = 3 + \sqrt{3}$ のとき ∠A の大きさ　**【16】**

① $30°$　② $45°$　③ $60°$　④ $90°$

3) $b = 2$，$c = 1$，$\cos A = \dfrac{1}{4}$ のとき △ABC の面積を求めよ。　**【17】**

① $\sqrt{15}$　② $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　③ $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

VI. 3 個のサイコロを同時に投げるとき，3 個の目の積が偶数になる確率を求めよ。

① $\dfrac{4}{8}$　② $\dfrac{5}{8}$　③ $\dfrac{6}{8}$　④ $\dfrac{7}{8}$　**【18】**

VII. 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，ちょうど 3 回表が出る確率を求めよ。　**【19】**

① $\dfrac{5}{16}$　② $\dfrac{6}{16}$　③ $\dfrac{7}{16}$　④ $\dfrac{8}{16}$

VIII. 赤玉 4 個，青玉 3 個，白玉 2 個がある。この中から 8 個取り出して 1 列に並べる方法は何通りあるか。　**【20】**

① 700　② 840　③ 980　④ 1260　⑤ 2560

IX. A，B が全体集合 U の部分集合でその要素の個数が $n(U) = 100$，$n(A) = 65$，$n(B) = 40$，$n(A \cap B) = 15$ のとき，次の各集合の要素の個数を求めよ。

1) $\overline{A} \cap \overline{B}$　**【21】**

① 10　② 25　③ 35　④ 50

2) $\overline{A} \cup B$　**【22】**

① 25　② 35　③ 50　④ 55

X. 10 本のくじがあり，1 等 1 本，2 等 2 本の当たりくじが入っている。今 3 本のくじを同時に引くものとする。

1) 1 等が当たる確率を求めよ。　**【23】**

① $\dfrac{1}{10}$　② $\dfrac{2}{10}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{4}{10}$

2) 1 等 1 本，2 等 1 本が当たる確率を求めよ。　**【24】**

① $\dfrac{6}{60}$　② $\dfrac{7}{60}$　③ $\dfrac{8}{60}$　④ $\dfrac{9}{60}$　⑤ $\dfrac{10}{60}$

3) 3 本ともハズレの確率を求めよ。　**【25】**

① $\dfrac{6}{24}$　② $\dfrac{7}{24}$　③ $\dfrac{8}{24}$　④ $\dfrac{9}{24}$

解答例

I. $40\underline{-3}=37$，$37\underline{-4}=33$，$33\underline{-5}=28$，$28\underline{-6}=22$，$22\underline{-7}=15$，$15\underline{-8}=7$

したがって　$\boxed{}=\mathbf{7}$

II. 1) $\sqrt{\alpha^2-8\alpha+16}=\sqrt{(\alpha-4)^2}=|\,\alpha-4\,|$

$\alpha<4$ のとき $\alpha-4<0$ であるから　$|\,\alpha-4\,|=-(\alpha-4)=-\alpha+4$

したがって　$\sqrt{\alpha^2-8\alpha+16}=\boldsymbol{-\alpha+4}$

2) $$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) &= (a^2+2ab+b^2)+2ca+2bc+c^2 \\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \\ &= \{(a+b)+c\}^2=(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

したがって　$a+b+c=0$ のとき　$a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=\mathbf{0}$

3) $$\begin{aligned} \sqrt{11-3\sqrt{8}} &= \sqrt{11-3\cdot 2\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\cdot 3\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(9+2)-2\sqrt{9\cdot 2}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=\boldsymbol{3-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4) $a,\ b,\ c>0$ であるから，相加平均，相乗平均の関係により

$$b+c\geqq 2\sqrt{bc},\quad c+a\geqq 2\sqrt{ca},\quad a+b\geqq 2\sqrt{ab}$$

したがって

$$(b+c)(c+a)(a+b)\geqq 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}=\boldsymbol{8abc}$$

5) ［1］$x\geqq -3$ のとき，$|\,x+3\,|=x+3$ であるから

方程式は　$x+2(x+3)=0$

これを解いて　$x=-2$

これは，$x\geqq -3$ を満たすから，解である．

［2］$x<-3$ のとき，$|\,x+3\,|=-x-3$ であるから

方程式は　$x+2(-x-3)=0$

これを解いて　$x=-6$

これは，$x<-3$ を満たすから，解である．

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=-2,\ -6}$

6) 与えられた2次不等式の係数について

$$D=(k-2)^2-4\cdot 1(k+1)=k^2-8k$$

とする．2次不等式の x^2 の係数が正であるから，$D<0$ が成り立てばよい．

$k^2-8k<0$　これを解いて　$\boldsymbol{0<k<8}$

7) $a=b=0 \Rightarrow a^2+b^2=0$,
$a=b=0 \Leftarrow a^2+b^2=0$
よって，**必要十分条件**.

8) 等式の左辺を整理すると

$$4x^2+3x+2=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$4=a,\ 3=-2a+b,\ 2=a-b+c$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=4,\ b=11,\ c=9}$

9) n は整数 k を用いて

$$n=5k+3$$

とかけるので

$$n^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$$

$5k^2+6k+1$ は整数であるから，求める**余りは** $\mathbf{4}$ である.

III. 1) x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるので，放物線の方程式は,

$$y=a(x+1)(x-2)$$

とおける．これが点 $(1,-4)$ を通るから

$$-4=a(1+1)(1-2)\quad これを解いて\quad a=2$$

したがって　$y=2(x+1)(x-2)$　すなわち　$y=2x^2-2x-4$
よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=-2,\ c=-4}$

2) 放物線 $y=x^2-2x-3$ を y 軸に関して対称移動をすると

$$y=(-x)^2-2(-x)-3\quad すなわち\quad \boldsymbol{y=x^2+2x-3}$$

3) $x=1-3y$ であるから

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (1-3y)^2+y^2 \\ &= 10y^2-6y+1 \\ &= 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10} \end{aligned}$$

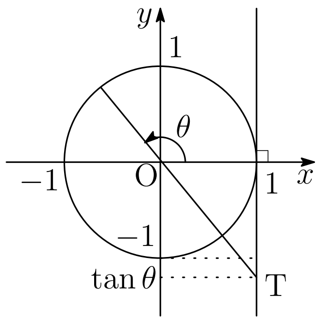
よって，$y=\dfrac{3}{10}$，$x=\dfrac{1}{10}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{10}}$ をとる.

IV. 右の図のように，角 θ の動径と直線 $x=1$ の交点 T の y 座標が $\tan\theta$ であるから，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において

$$\tan\theta < -1$$

を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{90^\circ < \theta < 135^\circ}$$



V. 1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{3}\cos 45^\circ \\ &= (8-4\sqrt{3}) + 12 - 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 8 - 4\sqrt{3} + 12 - 4(3-\sqrt{3}) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a = 2\sqrt{2}}$

2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} = \frac{18+6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} \\ &= \frac{6(3+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって，$\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす A は　　$\boldsymbol{A = 45^\circ}$

3) $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\times\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

VI. 3 個のサイコロの目の積が奇数になるのは，3 個とも奇数の目でその確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{8} = \boldsymbol{\dfrac{7}{8}}$

VII. ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{5-3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$

VIII. 赤玉 3 個，青玉 3 個，白玉 2 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{3!3!2!}=\mathbf{560}\quad(\text{通り})$$

赤玉 4 個，青玉 2 個，白玉 2 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{4!2!2!}=\mathbf{420}\quad(\text{通り})$$

赤玉 4 個，青玉 3 個，白玉 1 個の 8 個を取り出して 1 列に並べる方法は

$$\frac{8!}{4!3!1!}=\mathbf{280}\quad(\text{通り})$$

よって　$560+420+280=\mathbf{1260}$ (通り)

IX. 与えられた条件から

	B	$\overline{B}$	合計
A	15		65
$\overline{A}$			
合計	40		100

上の表を完成させると

	B	$\overline{B}$	合計
A	15	50	65
$\overline{A}$	25	10	35
合計	40	60	100

1) 上の表から　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathbf{10}$

2) 上の表から　$n(\overline{A}\cup B)=25+10+15=\mathbf{50}$

X. 1) 1等1本と残りの9本から2本引く確率であるから

$$\frac{1 \times {}_9C_2}{{}_{10}C_3} = \mathbf{\frac{3}{10}}$$

2) 1等1本，2等1本，はずれ1本を引く確率であるから

$$\frac{1 \times {}_2C_1 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1 \times 2 \times 7}{120} = \mathbf{\frac{7}{60}}$$

3) 7本のはずれから3本引く確率であるから

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \mathbf{\frac{7}{24}}$$

(答)

【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
④	②	③	②	④
【6】	【7】	【8】	【9】	【10】
④	①	③	①	⑤
【11】	【12】	【13】	【14】	【15】
②	②	③	②	③
【16】	【17】	【18】	【19】	【20】
②	②	④	①	④
【21】	【22】	【23】	【24】	【25】
①	③	③	②	②

2.2 熊本リハビリテーション学院

2.2.1 一般前期

[1] 次の〔問1〕～〔問3〕に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

(1) $4x^2 - 8x - k = 0$ の 1 つの解が $\dfrac{5}{2}$ のとき，$k =$ 〔問1〕であり，もう一つの解を α とすると $\alpha =$ 〔問2〕である。

(2) 家から 2500m 離れた学校へ行くのに，はじめ分速 50m で歩くことにする。8 時に家を出て 8 時 30 分の授業開始時刻に間に合うためには〔問3〕分以上を分速 100m で歩けばよい。

1 $-\dfrac{4}{5}$　2 $-\dfrac{1}{2}$　3 $\dfrac{1}{2}$　4 $\dfrac{5}{4}$　5 5

6 12　7 15　8 18　9 20　0 22

[2] x についての 2 次関数 $y = x^2 + 2ax + 3a^2 + 12a + 6 \cdots$ ① の最小値を m とするとき，次の〔問4〕～〔問6〕に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

(1) a の関数 m は，$a =$ 〔問4〕のとき，最小値〔問5〕をとる。

(2) a が (1) をみたすとき，① のグラフが x 軸と交わる 2 点を A，B とし，その頂点を P とする。このとき，$\triangle$ABP の面積 S は $S =$ 〔問6〕である。

1 -12　2 -3　3 -1　4 1　5 3

6 $2\sqrt{3}$　7 12　8 $12\sqrt{3}$　9 36　0 $24\sqrt{3}$

[3] $\cos\theta = -\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ $(90° < \theta < 180°)$ のとき，次の〔問7〕～〔問8〕に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

(1) $\sin\theta =$ 〔問7〕

(2) $\tan^2\theta + 2\tan\theta + 1 =$ 〔問8〕

1 $\dfrac{-4\sqrt{5}}{7}$　2 $\dfrac{-2\sqrt{5}}{15}$　3 $\dfrac{2}{7}$　4 $\dfrac{4\sqrt{5}}{7}$　5 $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

6 $\dfrac{4\sqrt{5}}{49}$　7 $\dfrac{40-12\sqrt{5}}{45}$　8 $\dfrac{49-12\sqrt{5}}{45}$　9 $\dfrac{12\sqrt{5}}{11}$　0 $\dfrac{8}{11}$

[4] 1 辺が 10 の正三角形 ABC を底面とする三角錐 OABC があり，OA = OB = OC かつ $\angle AOB = 90°$ である。AB の中点を M，頂点 O から底面に下ろした垂線を OH とするとき，次の $\boxed{\textbf{〔問 9〕}}$〜$\boxed{\textbf{〔問 12〕}}$ に適するものを ①〜⓪ から選べ。

(1) 線分 OM の長さは $\boxed{\textbf{〔問 9〕}}$ である。

(2) 線分 MH の長さは $\boxed{\textbf{〔問 10〕}}$ である。

(3) 三角錐 OABC の高さ OH の長さは $\boxed{\textbf{〔問 11〕}}$ である。

(4) $\cos\angle OMC$ の大きさは $\boxed{\textbf{〔問 12〕}}$ である。

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$　④ $5\sqrt{3}$　⑤ 5

⑥ $10\sqrt{2}$　⑦ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$　⑧ $10\sqrt{3}$　⑨ $5\sqrt{2}$　⓪ 10

[5] 1 から 20 までの番号をつけたカードがある。これから 1 枚のカードを抜き取り，続いてもう 1 枚のカードを抜き取るとき，次の $\boxed{\textbf{〔問 13〕}}$〜$\boxed{\textbf{〔問 15〕}}$ に適するものを ①〜⓪ から選べ。

(1) 1 枚目のカードが奇数で 2 枚目も奇数である確率は $\boxed{\textbf{〔問 13〕}}$ である。

(2) 1 枚目のカードが 2 桁の 3 の倍数で，2 枚目のカードが 2 桁の 7 の倍数である確率は $\boxed{\textbf{〔問 14〕}}$ である。

(3) 1 枚目のカードが奇数で 2 枚目のカードが 2 桁の偶数である確率は $\boxed{\textbf{〔問 15〕}}$ である。

① $\dfrac{3}{380}$　② $\dfrac{9}{380}$　③ $\dfrac{3}{190}$　④ $\dfrac{1}{19}$　⑤ $\dfrac{21}{380}$

⑥ $\dfrac{3}{38}$　⑦ $\dfrac{9}{38}$　⑧ $\dfrac{1}{4}$　⑨ $\dfrac{3}{19}$　⓪ $\dfrac{19}{40}$

解答例

[1] (1) $\dfrac{5}{2}$ は 2 次方程式 $4x^2-8x-k=0$ の 1 つの解であるから

$$4\left(\frac{5}{2}\right)^2-8\cdot\frac{5}{2}-k=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=5}$$

2 次方程式は $4x^2-8x-5=0$ であるから，左辺を因数分解すると

$$(2x+1)(2x-5)=0$$

ゆえに　$x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}$

よって，もう 1 つの解 α は　$\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1}{2}}$

(2) 分速 100m で x 分間歩くとき，その歩いた距離は $100x$ m であり，分速 50m で歩いた距離は $(2500-100x)$ m となるから，次の不等式を解けばよい．

$$x+\frac{2500-100x}{50} \leqq 30$$

ゆえに　$x+(50-2x) \leqq 30$

整理して　$-x \leqq -20$

よって　$x \geqq \mathbf{20}$

	問 1	問 2	問 3
正解	5	2	9
配点	7 点	6 点	7 点

[2] (1)

$$\begin{aligned} y &= x^2+2ax+3a^2+12a+6 \quad \cdots ① \\ &= (x+a)^2-a^2+3a^2+12a+6 \\ &= (x+a)^2+2a^2+12a+6 \end{aligned}$$

① の最小値 m は　$m=2a^2+12a+6$

$$\begin{aligned} m &= 2(a^2+6a)+6 \\ &= 2\{(a+3)^2-3^2\}+6 \\ &= 2(a+3)^2-12 \end{aligned}$$

よって，**m は $a=-3$ のとき最小値 -12** をとる．

(2) $a=-3$ のとき　$y=(x-3)^2-12$

P の y 座標は -12

x 軸との共有点 A，B の x 座標は，$y=0$ のとき　$x=3\pm 2\sqrt{3}$

ゆえに，AB 間の距離は　$\mathrm{AB}=(3+2\sqrt{3})-(3-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

よって，△ABP の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 12=\mathbf{24\sqrt{3}}$

	問 4	問 5	問 6
正解	2	1	0
配点	7 点	7 点	6 点

[3] (1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2=\dfrac{4}{49}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{4}{49}}=\mathbf{\dfrac{2}{7}}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{7}\div\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)=-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$

ゆえに　$\tan^2\theta+2\tan\theta+1=(\tan\theta+1)^2=\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2$

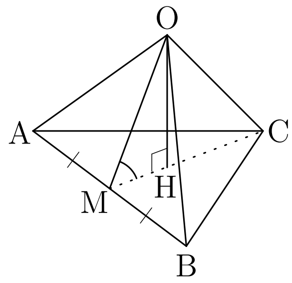
$$=\left(\frac{3\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}\right)^2=\mathbf{\frac{49-12\sqrt{5}}{45}}$$

	問 7	問 8
正解	3	8
配点	7 点	6 点

[4] (1) OA = OB，AM = MB であるから △OAM と △OBM は合同である．

また，$\angle$AOB = 90° であるから，△OAM と △OBM は直角二等辺三角形である．

ゆえに　OM = AM = MB = **5**



(2) (3) (4)

OA = OB = OC より，△OAH，△OBH，△OCH は，合同な直角三角形であるから，HA = HB = HC．ゆえに，H は △ABC の外心である．

また，△ACM と △BCM は合同な直角三角形であるから MC は，AB の垂直二等分線である．ゆえに，H は MC 上にある．

△CAM は AC を斜辺とする直角三角形であるから

$$\mathrm{MC} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{CAM} = 10\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$
$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} = \mathrm{AM}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

△OMC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OMC} &= \frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{MC}^2-\mathrm{OC}^2}{2\mathrm{OM}{\cdot}\mathrm{MC}}\\ &= \frac{5^2+(5\sqrt{3})^2-(5\sqrt{2})^2}{2{\cdot}5{\cdot}5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

このとき　$\sin\angle\mathrm{OMC} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{OMC}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

よって　$\mathrm{MH} = \mathrm{OM}\cos\angle\mathrm{OMC} = 5\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OM}\sin\angle\mathrm{OMC} = 5\times\frac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

	問 9	問 10	問 11	問 12
正解	5	7	3	1
配点	7 点	7 点	7 点	6 点

[5] (1) 奇数2枚を取り出す確率は $\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_2}{{}_{20}\mathrm{P}_2} = \boldsymbol{\dfrac{9}{38}}$

(2) 2桁の3の倍数は $\{12,\ 15,\ 18\}$ の3枚

2桁の7の倍数は $\{14\}$ の1枚

よって，求める確率は $\dfrac{3 \times 1}{{}_{20}\mathrm{P}_2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{380}}$

(3) 奇数は $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$ の10枚

2桁の偶数は $\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$ の6枚

よって，求める確率は $\dfrac{10 \times 6}{{}_{20}\mathrm{P}_2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{19}}$

	問13	問14	問15
正解	7	1	9
配点	7点	7点	6点

2.2.2 一般後期

[1] 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動させたところ，$y = x^2$ のグラフが得られた。次の $\boxed{\textbf{〔問 1〕}}$〜$\boxed{\textbf{〔問 5〕}}$ に適するものを 1 〜 0 から選べ。

(1) a の値は $\boxed{\textbf{〔問 1〕}}$，b の値は $\boxed{\textbf{〔問 2〕}}$，c の値は $\boxed{\textbf{〔問 3〕}}$ である。

(2) 2 次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の解は $\boxed{\textbf{〔問 4〕}} < x < \boxed{\textbf{〔問 5〕}}$ である。

1 -1	2 1	3 -2	4 2	5 -3
6 3	7 -4	8 4	9 -5	0 0

[2] 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とする。次の $\boxed{\textbf{〔問 6〕}}$〜$\boxed{\textbf{〔問 8〕}}$ に適するものを 1 〜 0 から選べ。

(1) AM の長さは $\boxed{\textbf{〔問 6〕}}$ である。

(2) $\angle\mathrm{AMD} = \alpha$ とするとき，$\sin\alpha = \boxed{\textbf{〔問 7〕}}$ である。

(3) $\triangle\mathrm{AMD}$ の面積 S は $S = \boxed{\textbf{〔問 8〕}}$ である。

1 $\dfrac{1}{3}$	2 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	3 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	4 $\dfrac{8}{94}$	5 1
6 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	7 $\sqrt{2}$	8 $\sqrt{3}$	9 $2\sqrt{2}$	0 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

[3] 1つのコインを4回投げるとき，次の〔問9〕～〔問11〕に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

(1) 表がちょうど2回だけ出る場合は〔問9〕通りある。

(2) 表がちょうど3回だけ出る確率は〔問10〕である。

(3) 表が1回出るたびに，100円の賞金が出る。4回投げ終わったとき，得られる賞金総額の期待値は〔問11〕円である。

1　4	2　5	3　6	4　24	5　$\frac{1}{2}$
6　$\frac{1}{4}$	7　$\frac{1}{8}$	8　100	9　200	0　400

[4] 次の〔問12〕～〔問15〕に適するものを 1 ～ 0 から選べ。

(1) 4個の箱に合わせて21個のボールが入っている。このとき，どれか1つの箱にはk個以上入っていることは真であるが，$k+1$個以上入っているということは真ではない。$k=$〔問12〕である。

(2) 自然数m，nについて，積mnが自然数3で割り切れるならばm〔問13〕nが3で割り切れる。

(3) 自然数nが2〔問14〕3で割り切れることは，nが6で割り切れるための必要十分条件である。

(4) 自然数m，nについて，積mnが偶数であることは，mが偶数であるための〔問15〕である。

1　かつ	2　または	3　必要条件	4　十分条件	5　対偶
6　4	7　5	8　6	9　7	0　0

解答例

[1] (1) $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものは

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 4x + 3$$

である．よって，$\boldsymbol{a = 1,\ b = -4,\ c = 3}$

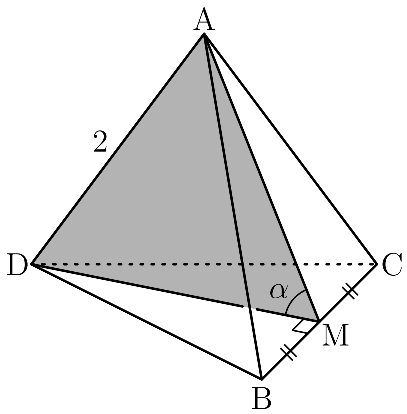
(2) (1) の結果から，2 次不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ の解は，左辺を因数分解して

$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{1 < x < 3}$$

	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
正解	2	7	6	2	6
配点	7 点	7 点	7 点	6 点	6 点

[2] (1) $\mathrm{AM} = \mathrm{DM} = \mathrm{BD}\sin 60^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\triangle$AMD に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{DM}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ゆえに $\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

(3) $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

	問 6	問 7	問 8
正解	8	6	7
配点	7 点	7 点	6 点

[3] (1) ${}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \mathbf{6}$ (通り)

(2) ${}_4\mathrm{C}_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{4-3} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(3)

賞金	0	100	200	300	400	計
確率	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{1}{16}$	1

賞金の期待値は

$$0\times\frac{1}{16}+100\times\frac{4}{16}+200\times\frac{6}{16}+300\times\frac{4}{16}+400\times\frac{1}{16}=\mathbf{200}\ (\text{円})$$

	問 9	問 10	問 11
正解	3	6	9
配点	7 点	7 点	6 点

[4]

	問 12	問 13	問 14	問 15
正解	8	2	1	3
配点	6 点	7 点	7 点	7 点

2.3　九州中央リハビリテーション学院

2.3.1　一般前期

[1] 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 1 \cdots$ ① について，① のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフを表す 2 次関数は $y = \boxed{1}x^2 + \boxed{2}$ であり，① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフと一致する場合，$p = -\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$，$q = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}$ である．

[2] a を定数とする．放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a \cdots$ ② が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は $\boxed{7} < a < \boxed{8}$ である．このとき，② によって切り取られる線分の長さを ℓ とすると，$\ell^2 = -\boxed{9}\,a^2 + \boxed{10}\boxed{11}\,a$ であり，ℓ の最大値は $\boxed{12}$ である．

[3] 自然数 x，y，z が $2x + 9y - 7z = 0$，$3x - 4y + 2z = 0$ をみたしているとき，$x : y : z = \boxed{13} : \boxed{14} : \boxed{15}$ である．

また，$\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$ のとる値のうち最小の自然数は $\boxed{16}\boxed{17}$ で，そのとき $x = \boxed{18}\boxed{19}$ である．

[4] $x = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3}$，$y = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3}$ のとき，

$x^2 + y^2 = \dfrac{\boxed{20}\boxed{21}}{\boxed{22}}$，$x^3 - y^3 = -\dfrac{\boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}}{\boxed{25}}$ である．

[5] $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{26}}}{\boxed{27}}$，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{28}} - \sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$ である．

[6] $\triangle$ABC において，$a + b : b + c : c + a = 5 : 7 : 6$ であるとき，

$a : b : c = \boxed{31} : \boxed{32} : \boxed{33}$，$\sin A : \sin B : \sin C = \boxed{34} : \boxed{35} : \boxed{36}$，

$\cos A : \cos B : \cos C = \boxed{37}\boxed{38} : \boxed{39}\boxed{40} : -\boxed{41}$ である．

[7] $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A} = 120^\circ$，$\mathrm{BC} = 19$，$\mathrm{CA} = 16$，AB の長さは $\boxed{42}$，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{43}\boxed{44}\sqrt{\boxed{45}}$，$\triangle$ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{46}}$ である．

解答例

[1] $y=2x^2-4x+1\cdots$① を変形すると

$$y=2(x-1)^2-1$$

であるから，① の頂点の座標は $(1,-1)$ である．この放物線を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は

$$(1-1,-1+2)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 1)$$

ゆえに，この平行移動後の放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=2x^2+1}$

$y=2x^2+3x+1$ を変形すると　$y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

ゆえに，頂点の座標は　$\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$

これは，① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものであるから

$$1+p=-\frac{3}{4},\ \ -1+q=-\frac{1}{8}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{p=-\frac{7}{4},\ q=\frac{7}{8}}$$

(答) $\boxed{1}$ 2　$\boxed{2}$ 1　$\boxed{3}$ 7　$\boxed{4}$ 4　$\boxed{5}$ 7　$\boxed{6}$ 8

[2] 放物線が x 軸と異なる2点で交わるための条件は，$D/4>0$ であるから

$$(-a)^2-1\cdot(2a^2-4a)>0$$

整理して　$a^2-4a<0$

ゆえに　$a(a-4)<0$

したがって　$\boldsymbol{0<a<4}$

このとき，放物線と x 軸との共有点の x 座標は，
2次方程式 $x^2-2ax+2a^2-4a=0$ を解いて

$$x=\frac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-1\cdot(2a^2-4a)}}{1}=a\pm\sqrt{-a^2+4a}$$

ゆえに，放物線によって切り取られる x 軸の線分の長さ ℓ は

$$\ell=(a+\sqrt{-a^2+4a})-(a-\sqrt{-a^2+4a})=2\sqrt{-a^2+4a}$$

ゆえに　
$$\begin{aligned}\ell^2&=2^2(\sqrt{-a^2+4a})^2\qquad (0<a<4)\\&=4(-a^2+4a)\\&=\boldsymbol{-4a^2+16a}=-4(a-2)^2+16\end{aligned}$$

よって，ℓ^2 は $a=2$ のとき最大となる．

したがって，ℓ は $a=2$ のとき最大値 $\sqrt{16}=\boldsymbol{4}$ をとる．

(答) $\boxed{7}$ 0　$\boxed{8}$ 4　$\boxed{9}$ 4　$\boxed{10}$ 1　$\boxed{11}$ 6　$\boxed{12}$ 4

[3] $2x+9y-7z=0\cdots$①，$3x-4y+2z=0\cdots$②

とおく．① $\times 3-$ ② $\times 2$ から

$$35y-25z=0 \quad \text{すなわち} \quad 7y=5z$$

ゆえに，比例定数 k を用いて，$y=5k$，$z=7k$ とおける．

これを ① に代入して

$$2x+9\cdot 5k-7\cdot 7k=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=2k$$

よって　$x:y:z=2k:5k:7k=\mathbf{2:5:7}$

また

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}=\frac{(2k)^2+(5k)^2+(7k)^2}{2k+5k+7k}=\frac{78k^2}{14k}=\frac{39k}{7}$$

よって，この式がとる最小の自然数は，$k=7$ のとき **39** であり，
このとき　$x=2\cdot 7=\mathbf{14}$

(答) $\boxed{13}$ 2　$\boxed{14}$ 5　$\boxed{15}$ 7　$\boxed{16}$ 3　$\boxed{17}$ 9　$\boxed{18}$ 1　$\boxed{19}$ 4

[4]

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$x-y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}$$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2-2\times\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{16}{9}}$$

$$x^3-y^3=(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{16}{9}+\frac{2}{9}\right)=\mathbf{-\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

(答) $\boxed{20}$ 1　$\boxed{21}$ 6　$\boxed{22}$ 9　$\boxed{23}$ 4　$\boxed{24}$ 3　$\boxed{25}$ 3

[5] $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{4} < 0\ (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ より

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ であるから　$\sin\theta - \cos\theta > 0$　$\cdots$①

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\times\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

① より　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

したがって，$\sin\theta$，$-\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$(x - \sin\theta)(x + \cos\theta) = 0$$

すなわち　$x^2 - (\sin\theta - \cos\theta)x - \sin\theta\cos\theta = 0$

ゆえに　$x^2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0$

この方程式を解いて

$$(\sin\theta, -\cos\theta) = \left(\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

よって　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\pm\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

別解 (数学 II)

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$0 < 2\theta < 360^\circ$ に注意して，これを解くと　$2\theta = 210^\circ,\ 330^\circ$

ゆえに　$\theta = 105^\circ,\ 165^\circ$

$\theta = 105^\circ$ のとき

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\theta = 165^\circ$ のとき

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

実際は，$\cos\theta = \dfrac{\pm\sqrt{\boxed{28}} - \sqrt{\boxed{29}}}{\boxed{30}}$ であるが，拙者が当学院に問い合わせたところによると，試験後に “±” が抜けていたことに出題者が気付かれたようである．

(答) $\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 2　$\boxed{28}$ 2　$\boxed{29}$ 6　$\boxed{30}$ 4

[6] $a+b:b+c:c+a=5:7:6$ であるから，定数 k を用いて $(k>0)$,

$$a+b=5k\cdots①,\ \ b+c=7k\cdots②,\ \ c+a=6k\cdots③$$

とおける．これらの式の辺々を加えると

$$2a+2b+2c=18k \quad \text{ゆえに} \quad a+b+c=9k\cdots④$$

①，④ から $c=4k$,　②，④ から $a=2k$,　③，④ から $b=3k$

ゆえに　$a:b:c=2k:3k:4k=\mathbf{2:3:4}$

正弦定理により $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$ であるから

$$\sin A:\sin B:\sin C=\mathbf{2:3:4}$$

$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ を余弦定理に適用して

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot3k\cdot4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(4k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\cdot4k\cdot2k}=\frac{11k^2}{16k^2}=\frac{11}{16}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\cdot2k\cdot3k}=\frac{-3k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$$

よって　$\cos A:\cos B:\cos C=\frac{7}{8}:\frac{11}{16}:-\frac{1}{4}=\mathbf{14:11:-4}$

(答) $\boxed{31}$ 2　$\boxed{32}$ 3　$\boxed{33}$ 4　$\boxed{34}$ 2　$\boxed{35}$ 3　$\boxed{36}$ 4
　$\boxed{37}$ 1　$\boxed{38}$ 4　$\boxed{39}$ 1　$\boxed{40}$ 1　$\boxed{41}$ 4

[7] $\mathrm{AB}=c$ とおく．△ABC を余弦定理に適用すると

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A$$

ゆえに $19^2=16^2+c^2-2\cdot16\cdot c\cos120^\circ$

整理して $c^2+16c-105=0$

したがって $(c+21)(c-5)=0$

$c>0$ であるから $c=\mathbf{5}$

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot16\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{20\sqrt{3}}$$

$2s=19+16+5$ とおくと $s=20$

△ABC の内接円の半径を r とし，これらを $S=rs$ に代入して

$$20\sqrt{3}=r\cdot20 \quad よって \quad r=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) $\boxed{42}$ 5　$\boxed{43}$ 2　$\boxed{44}$ 0　$\boxed{45}$ 3　$\boxed{46}$ 3

2.3.2 一般後期

[1] $\alpha=-1+\sqrt{3}$ のとき，

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}+\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}}{\boxed{5}},\quad \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=-\frac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}}+\frac{\boxed{9}\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{12}}$$

である．また，$x\alpha^2+y\alpha^3=-2+2\sqrt{3}$ をみたす整数 x，y の値は，

$x=\boxed{13}$，$y=\boxed{14}$ である．

[2] $f(x)=x^2-2\sqrt{11}x+8$ とする．

方程式 $f(x)=0$ の解は，$x=\sqrt{\boxed{15}\boxed{16}}\pm\sqrt{\boxed{17}}$ であり，

不等式 $f(x)<0$ をみたす整数 x の個数は $\boxed{18}$ 個である．

[3] 2 次関数 $f(x)=x^2+2x-3$，$g(x)=-x^2+2ax-a^2+a+3$ について考える．

任意の実数 x について $f(x)>g(x)$ となるような a の値の範囲は

$a<-\sqrt{\boxed{19}\boxed{20}}$，$\sqrt{\boxed{21}\boxed{22}}<a$ である．

また，$y=f(x)$ のグラフの頂点は $(-\boxed{23},-\boxed{24})$ であり，任意の実数 x_1，x_2 について $f(x_1)>g(x_2)$ となるような a の値の範囲は $a<-\boxed{25}$ である．

[4] 放物線 $C:y=x^2-2x+3$ について考える．

直線 $x=2$ に関して C と対称な曲線の方程式は $y=x^2-\boxed{26}x+\boxed{27}\boxed{28}$ であり，点 $(-1,\ 1)$ に関して C と対称な曲線の方程式は $y=-x^2-\boxed{29}x-\boxed{30}$ である．

[5] $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$，

$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=-\dfrac{\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}}$ である．

[6] 四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{DA}=2$，$\angle\mathrm{A}=120^\circ$ である．このとき，$\mathrm{BD}=\sqrt{\boxed{38}}$，$\angle\mathrm{DBC}=\boxed{39}\boxed{40}^\circ$ であり，この四角形の面積は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}$ である．

解答例

[1] $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-1+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-1+\sqrt{3}}=-1+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$=-1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\alpha^2-1+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=4-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2-1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(4-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{35}{4}+\frac{27\sqrt{3}}{4}}$$

次に，$\alpha^2=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$，$\alpha^3=(\sqrt{3}-1)^3=-10+6\sqrt{3}$

を $x\alpha^2+y\alpha^3=-2+2\sqrt{3}$ に代入して

$$x(4-2\sqrt{3})+y(-10+6\sqrt{3})=-2+2\sqrt{3}$$

左辺を整理して　　$(4x-10y)+(-2x+6y)\sqrt{3}=-2+2\sqrt{3}$

$4x-10y$，$-2x+6y$ は有理数であるから

$$4x-10y=-2,\ -2x+6y=2\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{x=2,\ y=1}$$

(答) $\boxed{1}$ 1　$\boxed{2}$ 2　$\boxed{3}$ 3　$\boxed{4}$ 3　$\boxed{5}$ 2　$\boxed{6}$ 3　$\boxed{7}$ 5
　　$\boxed{8}$ 4　$\boxed{9}$ 2　$\boxed{10}$ 7　$\boxed{11}$ 3　$\boxed{12}$ 4　$\boxed{13}$ 2　$\boxed{14}$ 1

[2] $f(x)=0$ の解は，解の公式により

$$x=\frac{-(-\sqrt{11})\pm\sqrt{(-\sqrt{11})^2-1\cdot 8}}{1}=\boldsymbol{\sqrt{11}\pm\sqrt{3}}$$

$f(x)<0$ の解は　$\sqrt{11}-\sqrt{3}<x<\sqrt{11}+\sqrt{3}$

ここで，$3.3^2=10.89$，$3.4^2=11.56$，$1.7^2=2.89$，$1.8^2=3.24$ であるから

$3.3<\sqrt{11}<3.4$，$1.7<\sqrt{3}<1.8$，$-1.8<-\sqrt{3}<-1.7$ により

$$3.3+1.7<\sqrt{11}+\sqrt{3}<3.4+1.8\quad \text{ゆえに}\quad 5<\sqrt{11}+\sqrt{3}<5.2$$
$$3.3-1.8<\sqrt{11}-\sqrt{3}<3.4-1.7\quad \text{ゆえに}\quad 1.5<\sqrt{11}-\sqrt{3}<1.7$$

よって，$f(x)<0$ をみたす整数 x は　　2，3，4，5 の **4 個**

(答) $\boxed{15}$ 1　$\boxed{16}$ 1　$\boxed{17}$ 3　$\boxed{18}$ 4

[3] $f(x) > g(x)$ より　$x^2+2x-3 > -x^2+2ax-a^2+a+3$

変形して　$2x^2+2(1-a)+a^2-a-6>0$　$\cdots$ ①

任意の実数 x に対して，$f(x)>g(x)$ であるためには，① の左辺が常に正であればよいから，x^2 の係数が 2 で正であるから，求める条件は

$$D/4=(1-a)^2-2\cdot(a^2-a-6)<0$$

ゆえに　$a^2-13>0$

よって　$\boldsymbol{a<-\sqrt{13},\ \sqrt{13}<a}$

また　$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

ゆえに，$y=f(x)$ の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1,-4)}$

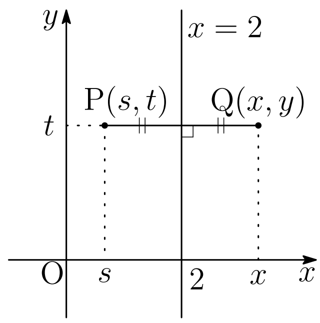
$$g(x)=-x^2+2ax-a^2+a+3=-(x-a)^2+a+3$$

$f(x)$ の最小値が -4，$g(x)$ の最大値が $a+3$ であるから，任意の実数 x_1，x_2 について $f(x_1)>g(x_2)$ となるための条件は

$$-4>a+3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a<-7}$$

(答) $\boxed{19}$ 1　$\boxed{20}$ 3　$\boxed{21}$ 1　$\boxed{22}$ 3　$\boxed{23}$ 1　$\boxed{24}$ 4　$\boxed{25}$ 7

[4] C 上に点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとり，点 P と直線 $x=2$ に関して対称な点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると



$$t=s^2-2s+3 \qquad \cdots ①$$

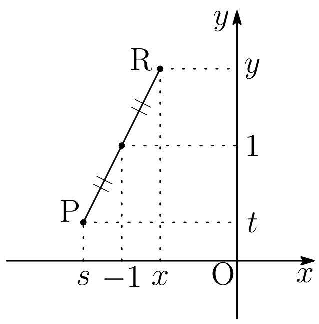
$$\frac{s+x}{2}=2,\ y=t \quad \cdots ②$$

が成り立つ．② から　$s=4-x,\ t=y$

① に代入すると　$y=(4-x)^2-2(4-x)+3$

すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-6x+11}$

同様に，点 P と点 $(-1,\ 1)$ に関して対称な点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると



$$\frac{s+x}{2}=-1,\ \frac{t+y}{2}=1 \quad \cdots ③$$

が成り立つ．③ から　$s=-2-x,\ t=2-y$

① に代入すると

$$2-y=(-2-x)^2-2(-2-x)+3$$

すなわち　$-y=x^2+6x+9$

よって　$\boldsymbol{y=-x^2-6x-9}$

(答) $\boxed{26}$ 6　$\boxed{27}$ 1　$\boxed{28}$ 1　$\boxed{29}$ 6　$\boxed{30}$ 9

[5] $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{2}{5}}$

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1\div\left(-\frac{2}{5}\right)=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$$

$$\tan^2\theta-1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-3=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-3=\frac{13}{4}$$

ゆえに　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)\left(\tan^2\theta-1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$$=-\frac{5}{2}\times\frac{13}{4}=\boldsymbol{-\frac{65}{8}}$$

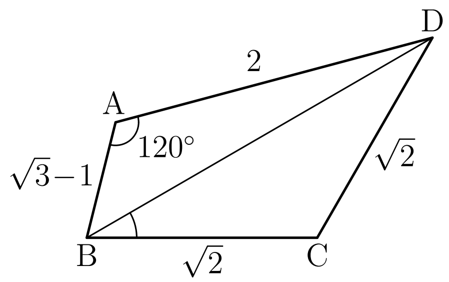
(答) $\boxed{31}$ 2　$\boxed{32}$ 5　$\boxed{33}$ 5　$\boxed{34}$ 2　$\boxed{35}$ 6　$\boxed{36}$ 5　$\boxed{37}$ 8

[6] $\triangle$ABD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{DA}^2+\mathrm{AB}^2-2\cdot\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\ &= 2^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cos 120^\circ\\ &= 4+(4-2\sqrt{3})-2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 6\end{aligned}$$

BD > 0 であるから　$\mathbf{BD=\sqrt{6}}$

$\triangle$BCD に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DBC} &= \frac{\mathrm{DB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{DB}\cdot\mathrm{BC}}\\ &= \frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{6}\sqrt{2}}\\ &= \frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ゆえに　$\angle\mathbf{DBC=30^\circ}$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DAB} &= \frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\sin A\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)\sin 120^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DBC} &= \frac{1}{2}\mathrm{DB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{DBC}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{DAB}+\triangle\mathrm{DBC}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(答) $\boxed{38}$ 6　$\boxed{39}$ 3　$\boxed{40}$ 0　$\boxed{41}$ 3　$\boxed{42}$ 2

2.4　西日本リハビリテーション学院

2.4.1　一般試験 (昼間部)

[A] 2つの異なる放物線 $y = ax^2 - 2x + 3 \cdots$ ①，$y = x^2 - 2x + b \cdots$ ② がある。① の頂点の y 座標は 問1 であり，① の頂点が ② 上，② の頂点が ① 上にあるときの a の値は 問2 である。

問1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$3+a$	$3-a$	4	2	$3+\dfrac{1}{a}$	$3-\dfrac{1}{a}$

問2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	-1	± 1	2	-2	± 2

[B] 実数 x，y，z が $x + y + 3z - 11 = 0$，$3x - y + z - 5 = 0$ をみたしている。$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき，x のとりうる値の範囲は 問3 $\leqq x \leqq$ 問4 であり，このときの $x^2 + y^2 + z^2$ の最大値は 問5，最小値は 問6 である。

問3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	3

問4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	45	50	55	60	65	70

問6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	7	9	11	13	15	17

[C] $0° < \theta < 180°$ とする。x の 2 次方程式 $x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)x - 2\sin^2\theta + 1 = 0$ について，

異なる 2 つの実数解をもつような θ の範囲は $\boxed{問 7} < \theta < \boxed{問 8}$

2 つの解がともに正であるような θ の範囲は $\boxed{問 9} < \theta < \boxed{問 10}$

2 つの解の符号が異なるような θ の範囲は $\boxed{問 11} < \theta < \boxed{問 12}$

問 7	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0°	30°	45°	60°	90°	120°

問 8	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	45°	60°	90°	120°	135°	150°

問 9	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0°	30°	45°	60°	90°	120°

問 10	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	45°	60°	90°	120°	135°	150°

問 11	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0°	30°	45°	60°	90°	120°

問 12	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	45°	60°	90°	120°	135°	150°

[D] 円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 8$，$BC = 5$，$\angle B = 60^\circ$ のとき，AC の長さは $\boxed{問 13}$，円の半径は $\boxed{問 14}$ である。
また，$CD = 3$ のとき，DA の長さは $\boxed{問 15}$，BD の長さは $\boxed{問 16}$ である。
この四角形の面積が最大となるような DA の長さは $\boxed{問 17}$ で，そのときの面積は $\boxed{問 18}$ である。

問 13	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問 14	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$

問 15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問 16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	4	5	6	7	8	9

問 17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$

問 18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\frac{27\sqrt{3}}{4}$	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$	$\frac{121\sqrt{3}}{12}$	$12\sqrt{3}$	$\frac{169\sqrt{3}}{12}$	$\frac{49\sqrt{3}}{3}$

[E] 0，2，4，6，8 から 4 個の数字を選び，4 桁の整数を作るとき，数字がすべて異なるものは全部で 問 19 個できる。
同じ数字が含まれてもよいときは全部で 問 20 個でき，この場合に 6480 より小さいものは 問 21 個できる。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 19	24	48	72	96	120	144

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 20	320	400	480	500	600	625

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 21	160	200	240	280	320	360

[F] A の袋には赤球が 2 個，白球が 3 個入っている。B の袋には赤球が 4 個，白球が 6 個入っている。甲は A の袋から 2 球，乙は B の袋から 2 球取り出し，取り出した球に赤球が少なくとも 1 つ含まれていたら 1 点，2 球とも白球であれば 0 点とする。
このとき，甲が 1 点になる確率は 問 22 であり，乙が 1 点になる確率は 問 23 である。次に，取り出した球は 1 回ごとにもとに戻すものとして，乙がこの操作を 3 回行って得点の合計が 2 点になる確率は 問 24 である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 22	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 23	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{9}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 24	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$

解答例

[A] 放物線 ① を変形すると

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 - 2x + 3 \\
&= a\left(x^2 - \frac{2}{a}\right) + 3 \\
&= a\left\{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 3 \\
&= a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + 3 - \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は　$\left(\frac{1}{a},\ \boldsymbol{3 - \frac{1}{a}}\right)$

放物線 ② を変形すると

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2x + b \\
&= (x-1)^2 - 1^2 + b \\
&= (x-1)^2 + b - 1
\end{aligned}
$$

したがって，放物線 ② の頂点の座標は　$(1,\ b-1)$

$(1,\ b-1)$ は，放物線 ① 上にあるから

$$b - 1 = a\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 3 \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 2 \cdots ③$$

よって，放物線 $y = x^2 - 2x + a + 2$ 上に $\left(\frac{1}{a},\ 3 - \frac{1}{a}\right)$ があるから

$$3 - \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}\right) + a + 2$$

整理して　$a - 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 0$

a^2 をかけて　$a^3 - a^2 - a + 1 = 0$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
a^2(a-1) - (a-1) &= 0 \\
(a-1)(a^2-1) &= 0 \\
(a-1)(a+1)(a-1) &= 0 \\
(a-1)^2(a+1) &= 0
\end{aligned}
$$

これを解いて　$a = \pm 1$

③ より　$a = 1$ のとき $b = 3$,　$a = -1$ のとき $b = 1$

①，② は異なる放物線であるから　$\boldsymbol{a = -1}$**,** $b = 1$

(答) 問1 [6]　問2 [2]

[B]

$$x+y+3z-11=0 \quad \cdots ①$$
$$3x-y+z-5=0 \quad \cdots ②$$

①，② を加えて　$4x+4z-16=0$

ゆえに　$z=4-x \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して　$x+y+3(4-x)-11=0$

ゆえに　$y=2x-1 \quad \cdots ④$

$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ であるから，③，④ より

$4-x \geqq 0$ かつ $2x-1 \geqq 0$　ゆえに　$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 4} \quad \cdots ⑤$

③，④ より

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^2+(2x-1)^2+(4-x)^2 \\ &= 6x^2-12x+17 \\ &= 6(x^2-2x)+17 \\ &= 6\{(x-1)^2-1^2\}+17 \\ &= 6(x-1)^2+11 \end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲において，$x=4$ で**最大値 65**，$x=1$ で**最小値 11** をとる．

(答) 問 3 [1]　問 4 [4]　問 5 [5]　問 6 [3]

[C] 2 次方程式 $x^2-2\left(1+\sqrt{2}\cos\theta\right)x-2\sin^2\theta+1=0 \cdots ①$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-(1+\sqrt{2}\cos\theta)\}^2-1\cdot(-2\sin^2\theta+1) \\ &= 1+2\sqrt{2}\cos\theta+2\cos^2\theta+2\sin^2\theta-1 \\ &= 2\sqrt{2}\cos\theta+2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= 2(\sqrt{2}\cos\theta+1) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

異なる 2 つの実数解をもつのは，$D>0$ のときであるから

$\sqrt{2}\cos\theta+1>0$　すなわち　$\cos\theta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0° < \theta < 180°$ であるから，これを解いて　$\boldsymbol{0° < \theta < 135°}$

次に，$y = x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)x - 2\sin^2\theta + 1 \cdots$ ③ とおくと，この放物線の軸の式は

$$x = -\frac{-2\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\right)}{2\cdot 1} = 1 + \sqrt{2}\cos\theta \quad \cdots ④$$

放物線 ③ は下に凸の放物線であるから，2 次方程式 ① がともに正の解をもつのは

$$D > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 + \sqrt{2}\cos\theta > 0 \quad \text{かつ} \quad x = 0 \text{ のとき } y > 0$$

したがって，②，④ から，$0° < \theta < 180°$ において

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{2}\cos\theta > 0 \\ -2\sin^2\theta + 1 > 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

第 1 式から　$0° < \theta < 135° \quad \cdots$ ⑤

第 2 式から　$\sin^2\theta - \dfrac{1}{2} < 0$　ゆえに　$\left(\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$

このとき $\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ であるから　$\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0$ より

$$\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，これを解いて

$$0° < \theta < 45°,\ 135° < \theta < 180° \quad \cdots ⑥$$

⑤ と ⑥ の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0° < \theta < 45°}$

放物線 ③ は下に凸の放物線であるから，2 次方程式 ① が符号の異なる解をもつのは

$$x = 0 \text{ のとき } y < 0 \quad \text{すなわち} \quad -2\sin^2\theta + 1 < 0$$

よって　$\sin^2\theta - \dfrac{1}{2} > 0$　ゆえに　$\left(\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$

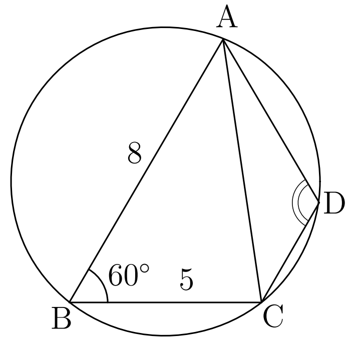
このとき $\sin\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ であるから　$\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ より

$$\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，これを解いて　　$\boldsymbol{45° < \theta < 135°}$

(答) 問 7 [1]　問 8 [5]　問 9 [1]　問 10 [1]　問 11 [3]　問 12 [5]

[D] △ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B\\ &= 8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos60^\circ\\ &= 64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}\\ &= 49\end{aligned}$$

AC >0 であるから　　$\mathbf{AC=7}$

円は，△ABC の外接円であるから，この円の半径を R とすると

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$

ゆえに　　$R=\dfrac{\mathrm{AC}}{2\sin B}=\dfrac{7}{2\sin60^\circ}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\dfrac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$

四角形 ABCD は円に内接するから　　$D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

CD $=3$ のとき，DA $=x$ とおいて，△ACD に余弦定理を適用すると

$$7^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos120^\circ$$
$$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理すると　$x^2+3x-40=0$

ゆえに　$(x-5)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　$x=\mathbf{5}$

∠BAC と ∠ACD は，ともに鋭角であり，BC $=$ DA であるから

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ACD}$$

ゆえに，四角形 ABCD は等脚台形であるから　BD $=$ AC $=\mathbf{7}$

四角形 ABCD の面積が最大となるのは，△ACD が最大となるときである．

DA $=y$，CD $=z$ とおくと　$\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}yz\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}yz$　$\cdots$①

ここで，△ACD に余弦定理を適用すると　$7^2=y^2+z^2-2yz\cos120^\circ$

ゆえに　$49=(y-z)^2+3yz$　よって　$yz=\dfrac{49}{3}-\dfrac{(y-z)^2}{3}$　$\cdots$②

①，② より，$y=z=\dfrac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$ のとき，① は最大．このとき四角形の面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{49}{3}=\frac{\mathbf{169\sqrt{3}}}{\mathbf{12}}$$

(答) 問 13 [4]　問 14 [3]　問 15 [2]　問 16 [4]　問 17 [3]　問 18 [5]

[E] (4桁の整数を作るとき，数字がすべて異なる整数の個数)

千の位は，2，4，6，8から1個を取るから　4通り

そのおのおのについて，百，十，一の位は，0と残りの3個の計4個から3個取る順列で　${}_4\mathrm{P}_3 = 4\cdot3\cdot2 = 24$ (通り)

よって，求める個数は　$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = \mathbf{96}$ (個)

(4桁の整数を作るとき，同じ数字が含まれる整数の個数)

千の位は，2，4，6，8から1個を取るから　4通り

そのおのおのについて，百，十，一の位は，0，2，4，6，8の計5個から3個取る重複順列で　$5^3 = 125$ (通り)

よって，求める個数は　$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = \mathbf{500}$ (個)

この場合，6480より小さいものは

　　2□□□，4□□□の形が　$2 \times 5^3 = 250$ (個)

　　60□□，62□□の形が　$2 \times 5^2 = 50$ (個)

　　640□，642□，644□，646□の形が　$4 \times 5 = 20$ (個)

よって，求める個数は　$250 + 50 + 20 = \mathbf{320}$ (個)

(答) 問19 [4]　問20 [4]　問21 [5]

[F] 甲が0点になる確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{10}$

甲が1点になる確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{3}{10} = \mathbf{\dfrac{7}{10}}$

乙が0点になる確率は　$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{3}$

乙が1点になる確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

乙が3回行って得点の合計が2点になるのは，3回のうち2回だけ1点になる確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{4}{9}} $$

(答) 問22 [5]　問23 [4]　問24 [2]

2.4.2 一般試験 (夜間部)

[A] 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について考える。

$x=1$ のとき，$(y,\ z)$ の組は $\boxed{\text{問 1}}$ 通りある。

x のとり得る値は $\boxed{\text{問 2}}$ 通りだけあり，$(x,\ y,\ z)$ の組は全部で $\boxed{\text{問 3}}$ 通りある。

問 1	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問 2	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

問 3	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	1	2	3	4	5	6

[B] $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，

$t=x^2-4x+3$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{問 4}} \leqq t \leqq \boxed{\text{問 5}}$ であり，

$y=(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+3+a$ の最大値が 6 であるとき，

定数 a の値は $\boxed{\text{問 6}}$ である。

問 4	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-5	-4	-3	-2	-1	0

問 5	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	0	1	2	3	4	5

問 6	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	-6	-3	0	3	6	9

[C] 2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+25$，$g(x)=-x^2+4ax-25$ (a は定数) がある。

任意の実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は

$\boxed{問 7}<a<\boxed{問 8}$ であり，

任意の実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲は

$\boxed{問 9}<a<\boxed{問 10}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 7	-10	-5	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{5}$	-2	$-\sqrt{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 8	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	5	10

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 9	-10	-5	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{5}$	-2	$-\sqrt{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 10	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	5	10

[D] $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，

$\sin\theta\cos\theta=\boxed{問 11}$，$\sin\theta-\cos\theta=\boxed{問 12}$，

$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\boxed{問 13}$，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\boxed{問 14}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 11	$-\dfrac{1}{9}$	$-\dfrac{1}{8}$	$-\dfrac{1}{6}$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 12	$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 13	$-\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$	$-\dfrac{5\sqrt{5}}{16}$	$-\dfrac{3\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{3\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{5\sqrt{5}}{16}$	$\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問 14	-9	-8	-6	-4	-3	-2

[E] △ABC は ∠A = 30°，∠B = 45° であり，半径 1 の円に内接している。このとき，BC，CA，AB の長さはそれぞれ $\boxed{問15}$，$\boxed{問16}$，$\boxed{問17}$ であり，cos ∠C の値は $\boxed{問18}$ である。

問15	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	2

問16	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

問17	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

問18	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

[F] 両親と 4 人の息子と 2 人の娘からなる 8 人の家族がある。この 8 人が 1 列に並ぶ。並び方の総数は $\boxed{問19}$ 通りであり，このうち，娘 2 人が隣り合う並び方は $\boxed{問20}$ 通り，また，女性 3 人のどの 2 人も隣り合わない並び方は $\boxed{問21}$ 通りである。

問19	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	420	840	2520	5040	20160	40320

問20	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	144	630	1440	3780	10080	14400

問21	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	144	630	1440	3780	10080	14400

[G] 2つのサイコロを同時に投げるとき，出る目の和の期待値は $\boxed{\text{問 22}}$，出る目の差の絶対値の期待値は $\boxed{\text{問 23}}$，出る目の最大値の期待値は $\boxed{\text{問 24}}$ である。

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問22	4	5	6	7	8	9

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問23	$\frac{29}{18}$	$\frac{31}{18}$	$\frac{35}{18}$	$\frac{37}{18}$	$\frac{41}{18}$	$\frac{43}{18}$

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
問24	$\frac{121}{36}$	$\frac{131}{36}$	$\frac{151}{36}$	$\frac{161}{36}$	$\frac{181}{36}$	$\frac{191}{36}$

解答例

[A] $x=1$ のとき $\quad \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{3}$$

両辺に $6yz$ をかけて $\quad 3y+2z=2yz$

整理して $\quad 2yz-3y-2z=0$

両辺に 2 をかけて $\quad 2y{\cdot}2z-3{\cdot}2y-2{\cdot}2z=0$

両辺に 6 をたして $\quad 2y{\cdot}2z-3{\cdot}2y-2{\cdot}2z+(-2)(-3)=(-2)(-3)$

$$(2y-2)(2z-3)=6$$

ゆえに $\quad (y-1)(2z-3)=3$

$y-1$，$2z-3$ は整数であるから，上式を満たす正の整数 y，z の組は

$$\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-3=3 \end{cases},\quad \begin{cases} y-1=3 \\ 2z-3=1 \end{cases}$$

これを解いて $\quad (y,\ z)=(2,\ 3),\ (4,\ 2)$

よって $\quad x=1$ を満たす $(y,\ z)$ の組は **2 組**

$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3y}\leqq\dfrac{1}{2{\cdot}1}+\dfrac{1}{3{\cdot}1}=\dfrac{5}{6}$ であるから

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\leqq\frac{5}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x}\geqq\frac{1}{2}$$

x は正の整数であるから $\quad x$ のとり得る値は 1 と 2 の 2 通りである。

$x=2$ のとき $\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=\frac{5}{6}$$

両辺に $6yz$ をかけて $\quad 3y+2z=5yz$

整理して $\quad 5yz-3y-2z=0$

両辺に 5 をかけて $\quad 5y{\cdot}5z-3{\cdot}5y-2{\cdot}5z=0$

両辺に 6 をたして $\quad 5y{\cdot}5z-3{\cdot}5y-2{\cdot}5z+(-2)(-3)=(-2)(-3)$

ゆえに $\quad (5y-2)(5z-3)=6$

$5y-2$，$5z-3$ は整数であるから，上式を満たす正の整数 y，z の組は

$$\begin{cases} 5y-2=3 \\ 5z-3=2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (y,\ z)=(1,\ 1) \text{ の 1 組}$$

よって，(x,y,z) の組は $\quad 2+1=\mathbf{3}$ (組)

(答) 問 1 [3]　問 2 [2]　問 3 [3]

[B] $t = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ は

$x = 0$ で最大値 3，$x = 2$ で最小値 -1 をとる．

ゆえに，t のとり得る値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$

y を t を用いて表すと

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 4x + 3)^2 - 2x^2 + 8x + 3 + a \\ &= (x^2 - 4x + 3)^2 - 2(x^2 - 4x + 3) + a + 9 \\ &= t^2 - 2t + a + 9 \\ &= (t-1)^2 + a + 8 \end{aligned}$$

ゆえに，$t = 1$ のとき最小値 $a + 8$，$t = -1,\ 3$ のとき最大値 $a + 12$ をとる．

よって，$a + 12 = 6$ を解いて　$\boldsymbol{a = -6}$

(答) 問4 [5]　問5 [4]　問6 [1]

[C] $f(x) > g(x)$ から　　$x^2 + 2ax + 25 > -x^2 + 4ax - 25$
移項して整理すると　$x^2 - ax + 25 > 0$

任意の実数 x に対して上式が成り立つとき，係数について

$$(-a)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}25 < 0 \quad \text{すなわち} \quad (a+10)(a-10) < 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-10 < a < 10}$

任意の実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つとき，

$f(x)$ の最小値 $>$ $g(x)$ の最大値 を満たせばよい．

$$f(x) = x^2 + 2ax + 25 = (x+a)^2 - a^2 + 25$$

$$g(x) = -x^2 + 4ax - 25 = -(x - 2a) + 4a^2 - 25$$

ゆえに　　$-a^2 + 25 > 4a^2 - 25$
整理して　$a^2 - 10 < 0$
よって　　$\boldsymbol{-\sqrt{10} < a < \sqrt{10}}$

(答) 問7 [1]　問8 [6]　問9 [3]　問10 [4]

[D] $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする x の 2 次方程式は

$$(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)=0$$

すなわち　$x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta=0$

ゆえに　$x^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{8}=0$

これを解いて　$x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}}{4}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\sin\theta\geqq0$

よって　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$,　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$

したがって　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

これらの結果を利用して

$$\begin{aligned}\sin^3\theta-\cos^3\theta&=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{5}}{16}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1\div\left(-\frac{1}{8}\right)=\boldsymbol{-8}\end{aligned}$$

(答) 問 11 [2]　問 12 [6]　問 13 [6]　問 14 [2]

[E] 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R$

ゆえに $a = 2R\sin A = 2{\cdot}1\sin 30^\circ = 2 \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{1}$

$b = 2R\sin B = 2{\cdot}1\sin 45^\circ = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= b\cos A + a\cos B = \sqrt{2}\cos 30^\circ + 1\cos 45^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

(第 2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{1^2+(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2{\cdot}1{\cdot}\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} \end{aligned}$$

(答) 問 15 [3]　問 16 [5]　問 17 [2]　問 18 [2]

[F] (8 人が 1 列に並ぶ並び方の総数)
8 人が 1 列に並ぶとき　$8! = 8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{40320}$ (通り)

(娘 2 人が隣り合う並び方の総数)
娘 2 人をひとまとめにする．
娘以外の 6 人と娘ひとまとめの並び方は，7! 通りある．
また，ひとまとめにした娘 2 人の並び方は，2! 通りある．
よって，並び方の総数は　$7! \times 2! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 2{\cdot}1 = \mathbf{10080}$ (通り)

(女子 3 人のどの 2 人も隣り合わない並び方の総数)
男性 5 人の並び方は 5! 通りある．
このとき女性 3 人の並び方は，下の図のように 6ヶ所の [|] から 3ヶ所に並ぶ方法であるから，${}_6\mathrm{P}_3$ 通りある．

| 男 | 男 | 男 | 男 | 男 |

よって，並び方の総数は　$5! \times {}_6\mathrm{P}_3 = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 \times 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot} = \mathbf{14400}$ (通り)

(答) 問 19 [6]　問 20 [5]　問 21 [6]

[G]

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

出る目の和の期待値は

$$
\begin{aligned}
&2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\
&\quad + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = \mathbf{7}
\end{aligned}
$$

差	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

出る目の差の期待値は

$$
0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \mathbf{\frac{35}{18}}
$$

和	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

差	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

最大	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

出る目の最大の期待値は

$$1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}=\boldsymbol{\frac{161}{36}}$$

最大	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

(答) 問22 [4]　問23 [3]　問24 [4]

2.5　熊本労災看護専門学校

2.5.1　一般試験 60 分

〔問 1〕 2 次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x+3\ (0 \leqq x \leqq 5)$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) 最大値　11　　最小値　1

(2) 最大値　11　　最小値　3

(3) 最大値　13　　最小値　0

(4) 最大値　19　　最小値　0

(5) 最大値　19　　最小値　3

〔問 2〕 x 軸と $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，$(1,\ 8)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(1) $y=2x^2+2x-12$

(2) $y=2x^2-2x-12$

(3) $y=-2x^2-2x+12$

(4) $y=-2x^2+2x+12$

(5) $y=-2x^2-2x-12$

〔問 3〕 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，x^4+y^4 の値を求めよ。

(1) 98

(2) 100

(3) 102

(4) 112

(5) 116

〔問 4〕 2 桁の自然数の中で，4 でも 6 でも割り切れない数は何個あるか。

(1) 54

(2) 57

(3) 60

(4) 61

(5) 65

〔問5〕 さいころを5個同時に投げるとき，4より大きい目が3個出る確率を求めよ。

(1) $\dfrac{4}{243}$

(2) $\dfrac{40}{243}$

(3) $\dfrac{52}{243}$

(4) $\dfrac{35}{216}$

(5) $\dfrac{83}{216}$

〔問6〕 $\triangle$ABC において，AB $=8$，BC $=5$，$\angle$B $=60^\circ$ のとき，AC の長さを求めよ。

(1) 3

(2) 5

(3) 6

(4) 7

(5) 9

〔問7〕 $\begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ x^2-8x+15 \geqq 0 \end{cases}$ の連立不等式を解け。

(1) $3 \leqq x < 4$

(2) $4 < x \leqq 5$

(3) $2 < x \leqq 5$

(4) $2 \leqq x < 4$

(5) $2 < x \leqq 3$

〔問 8〕 6 人を区別しない 2 つの部屋に入れる方法は何通りあるか。ただしそれぞれの部屋には少なくとも 1 人は入るものとする。

(1) 31

(2) 32

(3) 44

(4) 62

(5) 64

〔問 9〕 $y = x^2 + (a+5)x + 4$ のグラフと x 軸と共有点をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1) $-9 < a < -1$

(2) $-9 \leqq a \leqq -1$

(3) $-1 < a < 9$

(4) $a \leqq -9,\ -1 \leqq a$

(5) $a < -9,\ -1 < a$

〔問 10〕 0，1，2，3，4，5 から異なる 4 つの数字を選んで 4 桁の整数を作る。そのうち，偶数になるものは何個あるか求めよ。

(1) 120

(2) 156

(3) 162

(4) 180

(5) 196

〔問 11〕 $\triangle$ABC において $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ とするとき $\cos A : \cos B : \cos C$ の比を求めよ。

(1) $11 : 7 : 13$
(2) $(-11) : 13 : 7$
(3) $13 : (-11) : 7$
(4) $11 : (-7) : 13$
(5) $13 : 11 : (-7)$

〔問 12〕 $x + y + z = 10$ を満たす 0 以上の整数解 x，y，z の総数を求めよ。

(1) 52
(2) 66
(3) 72
(4) 86
(5) 92

〔問 13〕 $y = 3x^2 - 4x + 7$ のグラフを原点に関して対称移動したグラフの方程式を求めよ。

(1) $y = -3x^2 - 4x - 7$
(2) $y = -3x^2 + 4x + 7$
(3) $y = -3x^2 - 4x + 7$
(4) $y = 3x^2 + 4x - 7$
(5) $y = 3x^2 + 4x + 7$

〔問 14〕 男子 5 人，女子 3 人が 1 列に並ぶとき，女子同士が隣り合わない確率を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{5}{7}$

(3) $\dfrac{5}{14}$

(4) $\dfrac{3}{28}$

(5) $\dfrac{5}{28}$

〔問 15〕 周の長さが 42cm で面積が 80cm^2 以上の長方形を作るには，長方形の 1 辺の長さをどのような範囲にすればよいか求めよ。

(1) 2cm より大きく 4cm 未満

(2) 2cm 以上 4cm 以下

(3) 5cm より大きく 16cm 未満

(4) 5cm 以上 16cm 以下

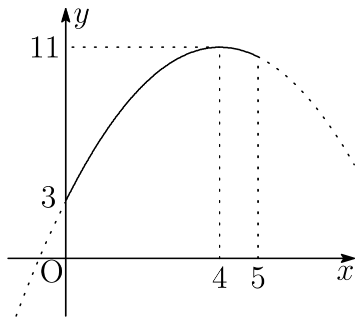
(5) 8cm 以上 10cm 以下

解答例

〔問1〕式を変形すると

$$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+11$$

$0 \leqq x \leqq 5$ であるから，
$x=4$ で**最大値 11** をとり，
$x=0$ で**最小値 3** をとる．



〔問2〕グラフは x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+3)(x-2)$$

と表される．そのグラフが点 $(1,\ 8)$ を通るから

$8=a(1+3)(1-2)$　　これを解くと　　$a=-2$

よって　　$y=-2(x+3)(x-2)$

したがって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y=-2x^2-2x+12}$

〔問3〕

$$x+y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=2\sqrt{3}$$

$$xy=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$$

であるから

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 1=10$$

ゆえに　　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=10^2-2\cdot 1^2=\mathbf{98}$

〔問4〕2 桁の自然数全体の集合を U，4 で割り切れる数全体の集合を A，6 で割り切れる数全体の集合を B とすると

$$A=\{4\cdot 3,\ 4\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \cdots,\ 4\cdot 24\}$$

$$B=\{6\cdot 2,\ 6\cdot 3,\ 6\cdot 4,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$$

$$A\cap B=\{12\cdot 1,\ 12\cdot 2,\ 12\cdot 3,\ \cdots,\ 12\cdot 8\}$$

よって　　$n(A)=22$，$n(B)=15$，$n(A\cap B)=8$
　　　　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+15-8=29$

求める個数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ であるから

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B)=90-29=\mathbf{61}\ (\text{個}) \end{aligned}$$

〔**問 5**〕さいころを 1 回投げるとき，4 より大きい目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，5 個投げて 4 より大きい目が 3 個出る確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-3}=10\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{40}{243}} $$

〔**問 6**〕余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B\\&=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos60^\circ\\&=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}\\&=49\end{aligned}$$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　　$\mathbf{AC=7}$

〔**問 7**〕$\begin{cases}x^2-6x+8<0\\x^2-8x+15\geqq0\end{cases}$

第 1 式から　　$(x-2)(x-4)<0$

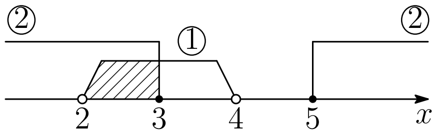
これを解くと　　$2<x<4$　$\cdots$①

第 2 式から　　$(x-3)(x-5)\geqq0$

これを解くと　　$x\leqq3,\ 5\leqq x$　$\cdots$②

① と ② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{2<x\leqq3}$$



〔**問 8**〕6 人を 2 つの部屋 A，B に入れる方法は　$2^6=64$

A だけに入る場合と B だけに入る場合を除いて　$64-2=62$

よって，A と B の区別をなくして　　$\dfrac{62}{2!}=\mathbf{31}$ (通り)

〔**問 9**〕グラフが x 軸と共有点をもつとき，係数について

$$(a+5)^2-4\cdot1\cdot4\geqq0$$

整理して　　$a^2+10a+9\geqq0$

ゆえに　　$(a+1)(a+9)\geqq0$

よって　　$\boldsymbol{a\leqq-9,\ -1\leqq a}$

〔問 10〕 偶数となるのは，一の位が 0，2，4 の場合である．

［1］1 の位が 0 になる数

他の位には，残りの 5 個の数字から 3 個とって並べるから，
その総数は ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ (個)

［2］1 の位が 2，4 になる数

千の位には，0 以外の 4 通り，百の位と十の位は残りの 4 個の数字から 2 個とって並べるから，その総数は $2 \times 4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 96$ (個)

［1］，［2］より，偶数の個数の総数は　$60 + 96 = \mathbf{156}$ (個)

〔問 11〕 正弦定理により $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ であるから，$a : b : c = 3 : 5 : 7$
よって，正の数 k を用いて，$a = 3k$，$b = 5k$，$c = 7k$ とおくと

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (7k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 7k} = \frac{65k^2}{70k^2} = \frac{13}{14}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(7k)^2 + (3k)^2 - (5k)^2}{2 \cdot 7k \cdot 3k} = \frac{33k^2}{42k^2} = \frac{11}{14}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\cos A : \cos B : \cos C = \dfrac{13}{14} : \dfrac{11}{14} : -\dfrac{1}{2} = \mathbf{13 : 11 : (-7)}$

〔問 12〕 異なる 3 種類のものから，重複を許して 10 個とる組合せの総数であるから

$$ {}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \mathbf{66} \quad (\text{組}) $$

[例] チョコ，バニラ，メロンの 3 種類のアイスクリームがたくさんある．これらの中から 5 個のアイスクリームを選ぶとき，何通りの選び方があるか．ただし，含まないアイスクリームがあってもよいものとする．

考え方 2 つの仕切り (|) があれば，3 種類のアイスクリームに分けることができるので，仕切りの左側をチョコ，仕切りと仕切りの間をバニラ，仕切りの右側をメロンとする．たとえば

○ | ○○ | ○○ は チョコ 1 個，バニラ 2 個，メロン 2 個
○○○○ | | ○ は チョコ 4 個，バニラ 0 個，メロン 1 個
○○ | ○○○ | は チョコ 2 個，バニラ 3 個，メロン 0 個

このように考えると，2 つの | と 5 つの○の配列の仕方の総数が 3 種類のアイスクリーム 5 個の選び方の総数である．これは同じものを含む順列で，$7 = (3-1)+5$ 個の場所から 5 個の○の場所を選ぶ組合せの数で

$$ {}_{(3-1)+5}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21 \ (\text{通り}) $$

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個を取る組合せの数は，上と同じ考えで，$n-1$ 個の仕切り | と r 個○の順列の数で，$(n-1)+r$ 個の場所から，r 個の○の場所を選ぶことであるから

$$ {}_{(n-1)+r}\mathrm{C}_r \quad \text{すなわち} \quad {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

である．このような組合せを**重複組合せ**といい，その数を ${}_n\mathbf{H}_r$ で表す．

重複組合せ

異なる n 個のものから，**重複を許して** r 個とる組合せの数は

$$ {}_n\mathbf{H}_r = {}_{n+r-1}\mathbf{C}_r \qquad (n < r \ \text{でもよい}) $$

$x+y+z=n \ (n \geqq 0)$ の負でない整数解の個数は

$$ {}_3\mathrm{H}_n = {}_{3+n-1}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} $$

〔問 13〕 原点に関する対称移動後のグラフの方程式は

$$-y = 3(-x)^2 - 4(-x) + 7 \quad すなわち \quad \boldsymbol{y = -3x^2 - 4x - 7}$$

対称移動

$y = f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動後の方程式は

x 軸：$-y = f(x)$　　y 軸：$y = f(-x)$　　原点：$-y = f(-x)$

〔問 14〕 男子 5 人と女子 3 人が 1 列に並ぶ方法は　8! (通り)

まず，男子 5 人が 1 列に並ぶ方法は　5! (通り)

6 か所 (|) に女子 3 人が 1 人ずつ並ぶ方法は　　| 男 | 男 | 男 | 男 | 男 |

$_6\mathrm{P}_3$ (通り)

よって，女子同士が隣り合わない並び方は　$5! \times {}_6\mathrm{P}_3$ (通り)

したがって，求める確率は　$\dfrac{5! \times {}_6\mathrm{P}_3}{8!} = \boldsymbol{\dfrac{5}{14}}$

〔問 15〕 1 辺の長さを x cm とすると，他方の辺の長さは $(21 - x)$cm である．

$x > 0$ かつ $21 - x > 0$ から　$0 < x < 21$　$\cdots$①

長方形の面積が 80cm^2 以上であるから

$$x(21 - x) \geqq 80$$

整理すると　$x^2 - 21x + 80 \leqq 0$

① に注意して　$\boldsymbol{5 \leqq x \leqq 16}$

(答)

〔問 1〕	**〔問 2〕**	**〔問 3〕**	**〔問 4〕**	**〔問 5〕**
(2)	(3)	(1)	(4)	(2)
〔問 6〕	**〔問 7〕**	**〔問 8〕**	**〔問 9〕**	**〔問 10〕**
(4)	(5)	(1)	(4)	(2)
〔問 11〕	**〔問 12〕**	**〔問 13〕**	**〔問 14〕**	**〔問 15〕**
(5)	(2)	(1)	(3)	(4)

熊本県入試問題　数学正解

大学・短大・医療系

発行　平成 19 年 7 月 2 日
編者　西村　信一
印刷　(株) 協和印刷
〒 868-0022　熊本県人吉市願成寺町 396-6
TEL (0966)25-1211　FAX (0966)24-7880